This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

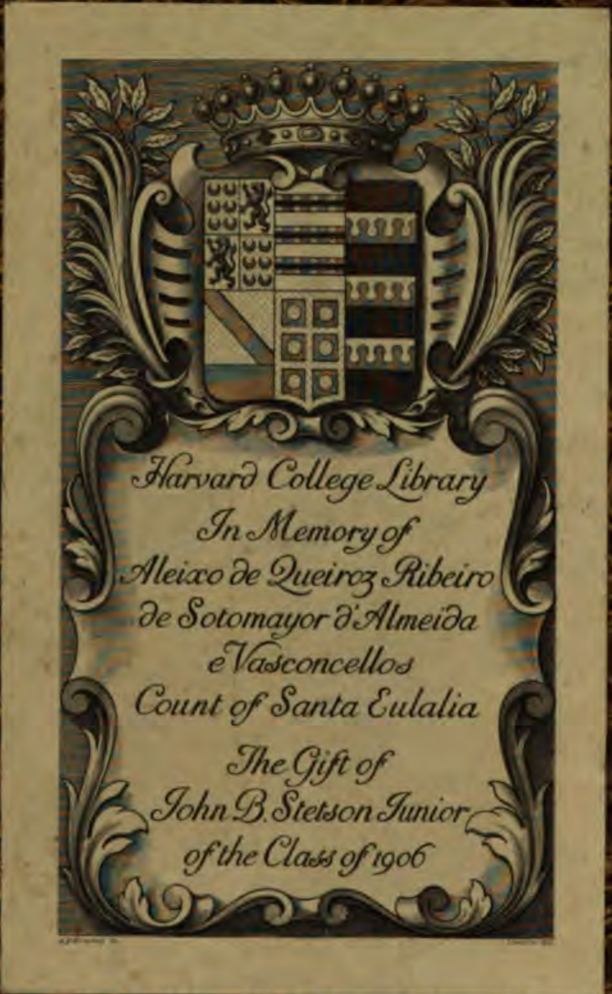
SOC
3796
8

Harvard College Library
In Memory of
Aleixo de Queiroz Ribeiro
de Sotomayor d'Almeida
e Vasconcellos
Count of Santa Eulalia
The Gift of
John B. Stetson Junior
of the Class of 1906

LSoc 3796 8

Harvard College Library
In Memory of
Aleixo de Queiroz Ribeiro
de Sotomayor d'Almeida
e Vasconcellos
Count of Santa Eulalia
The Gift of
John B. Stetson Junior
of the Class of 1906

3796
8


Harvard College Library
In Memory of
Aleixo de Queiroz Ribeiro
de Sotomayor d'Almeida
e Vasconcellos
Count of Santa Eulalia
The Gift of
John B. Stetson Junior
of the Class of 1906

Harvard College Library
In Memory of
Aleixo de Queiroz Ribeiro
de Sotomayor d'Almeida
e Vasconcellos
Count of Santa Eulalia
The Gift of
John B. Stetson Junior
of the Class of 1906

18.3616

MEMORIAS
DE
MATHEMATICA
E PHISICA

MEMORIAS
DE
MATHEMATICA
E PHISICA
DA
ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS
DE LISBOA.

Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.

TOMO II.

LISBOA
NA TYPOGRAFIA DA ACADEMIA,
1799.
Com licença de S. ALTEZA REAL.

LSoc 3796.8

HARVARD COLLEGE LIBRARY
COUNT OF SANTA EULALIA
COLLECTION
GIFT OF
JOHN B. STETSON, Jr.

AUG 14 1924

ADVERTENCIA.

O presente Volume de Memorias, que a Academia Real das Sciencias dá ao Publico, he continuação do que publicou em 1797 *debaixo do titulo geral de* Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa: *cujo titulo se alterou neste em razaõ de haver a Sociedade determinado depois, que das suas Memorias se fizessem tres Collecções separadas debaixo dos titulos de* Memorias de Litteratura Portugueza, Memorias Economicas, e Memorias de Mathematica e Phisica. *Da primeira Collecçaõ tem a Academia já publicado seis volumes, da segunda tres; e este he o segundo da terceira, a qual d'aqui em diante continuará debaixo deste titulo particular.*

ME-

ERROS

Que devem emendar-se nas Memorias pag. 1; *e* pag. 402.

Na pagina 24 linha 13 em lugar de » então procedendo pelo methodo » inverso das series d'esta expressaõ &c. » deve lêr-se

» entaõ, procedendo pelo methodo inverso das series, d'esta ex» pressaõ &c. »

Na pag. 26 lin. 6, e seguintes em lugar de » sommando depois á par» te &c. » deve lêr-se

» sommando depois á parte todas as fracções, cujos denominadores » forem pares, e todas aquellas cujos denominadores forem impa» res, e tirando a segunda somma da primeira »

Na pag. 402 lin. penultima, e ultima; em lugar de » quae ad ejus solu» tionem sequentem » deve lêr-se

» quae ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem »

Na pag. 431 lin. 9 em lugar de $\frac{2dx - a}{r}$, deve lêr-se $\frac{2x - a}{r}$

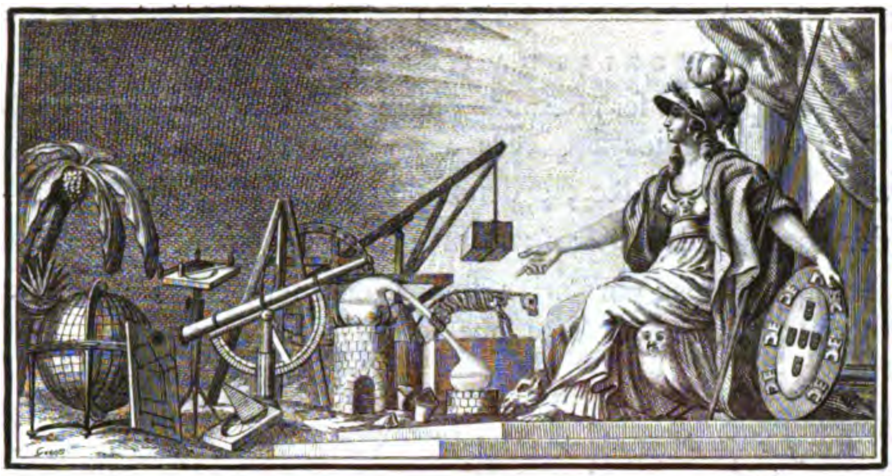
Na pag. 436 lin. 15 em lugar de dx' deve lêr-se dx

E na pag. 458 lin. 21 em lugar de

$$b = \frac{g \,\text{Sen.}(A + B + C)}{\text{Sen.}\, C'' \,\text{Cos.}\, L}$$

deve lêr-se

$$b = \frac{g \,\text{Sen.}(A + B + C)}{\text{Sen.}\, C \,\text{Cos.}\, L}$$



MEMORIAS
DE
MATHEMATICA E PHISICA
DA
ACADEMIA REAL DAS SCIENÇIAS DE LISBOA.

DEMONSTRAÇAÕ

Do Theorema de Newton sobre a relaçaõ que tem os coefficientes de qualquer equaçaõ algebrica com as sommas das potencias das suas raizes, e applicaçaõ do mesmo Theorema ao desenvolvimento em serie dos productos compostos de infinitos factores.

Por Francisco de Borja Garçaõ Stockler.

§. I.

Dada huma equaçaõ de qualquer gráo Lida em 17 de Dez. de 1789.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \dots + N = 0$$

que se supponha ser produsida pela multiplicaçaõ de hum numero n de binomios simpleces $x+a$; $x+a'$; $x+a''$; $x+a'''$; $x+a^{\text{IV}}$; $x+a^{\text{V}}$; &c., e denotando por $\int a$ a somma de todas as quantidades a; a'; a''; a'''; &c. por $\int a^2$ a somma dos seus quadrados; por $\int a^3$ a somma dos seus cubos; e assim successivamente, de sorte que seja

$$\int a = a + a' + a'' + a''' + a^{\text{IV}} + a^{\text{V}} + \&c.$$
$$\int a^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + a^{\text{IV}\,2} + a^{\text{V}\,2} + \&c.$$
$$\int a^3 = a^3 + a'^3 + a''^3 + a'''^3 + a^{\text{IV}\,3} + a^{\text{V}\,3} + \&c.$$
$$\int a^4 = a^4 + a'^4 + a''^4 + a'''^4 + a^{\text{IV}\,4} + a^{\text{V}\,4} + \&c.$$

- -

- -

$$\int a^n = a^n + a'^n + a''^n + a'''^n + a^{\text{IV}\,n} + a^{\text{V}\,n} + \&c.$$

afirma *Newton* em o Capitulo terceiro da segunda Parte da sua *Arithmetica Universal*, sem com tudo o demonstrar, que será sempre

$$\int a = A$$
$$\int a^2 = A\int a - 2B$$
$$\int a^3 = A\int a^2 - B\int a + 3C$$
$$\int a^4 = A\int a^3 - B\int a^2 + C\int a - 4D$$
$$\int a^5 = A\int a^4 - B\int a^3 + C\int a^2 - D\int a + 5E$$

- -

- -

$$\int a^n = A\int a^{n-1} - B\int a^{n-2} + C\int a^{n-3} - D\int a^{n-4} + E\int a^{n-5} - \ldots \pm nN.$$

§. II.

Para demonstrar este elegantissimo Theorema observaremos primeiramente, que pela natureza dos productos compostos

poſtos de factores binomios, como ſe acha demonſtrado em quasi todos os livros elementares de Algebra, A reprezenta a ſomma de todas as quantidades a; a'; a''; a'''; &c. B reprezenta a ſomma dos ſeus productos ſendo ellas entre ſi multiplicadas duas a duas; C a ſomma dos ſeus productos ſendo ellas entre ſi multiplicadas tres a tres; e aſſim ſucceſſivamente. Ora ſe dividirmos a Equaçaõ

$$(x+a)(x+a')(x+a'')(x+a''')\cdots(x+a^{\overline{n-1},})=$$
$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\cdots+N$$

por x^n teremos

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{a'}{x}\right)\left(1+\frac{a''}{x}\right)\left(1+\frac{a'''}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a^{\overline{n-1},}}{x}\right)=$$
$$1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\cdots+\frac{N}{x^n}$$

e chamando Z a eſta expreſſaõ, e tomando o ſeu logarithmo hyperbolico ſerá

$$\text{Log.}\,Z=\text{Log.}\left(1+\frac{a}{x}\right)+\text{Log.}\left(1+\frac{a'}{x}\right)+\text{Log.}\left(1+\frac{a''}{x}\right)+\text{\&c.}$$

ou deſenvolvendo cada hum deſtes logarithmos em ſerie

$$\text{Log.}\,Z=\begin{cases}\frac{a}{x}-\frac{a^2}{2x^2}+\frac{a^3}{3x^3}-\frac{a^4}{4x^4}+\frac{a^5}{5x^5}-\frac{a^6}{6x^6}+\cdots\text{\&c.}\\ \frac{a'}{x}-\frac{a'^2}{2x^2}+\frac{a'^3}{3x^3}-\frac{a'^4}{4x^4}+\frac{a'^5}{5x^5}-\frac{a'^6}{6x^6}+\cdots\text{\&c.}\\ \frac{a''}{x}-\frac{a''^2}{2x^2}+\frac{a''^3}{3x^3}-\frac{a''^4}{4x^4}+\frac{a''^5}{5x^5}-\frac{a''^6}{6x^6}+\cdots\text{\&c.}\\ \frac{a'''}{x}-\frac{a'''^2}{2x^2}+\frac{a'''^3}{3x^3}-\frac{a'''^4}{4x^4}+\frac{a'''^5}{5x^5}-\frac{a'''^6}{6x^6}+\cdots\text{\&c.}\\ \text{\&c.}\end{cases}$$

expreſſaõ que evidentemente ſe redus a

$$\text{Log. } Z = \frac{1}{x}\int a - \frac{1}{2x^2}\int a^2 + \frac{1}{3x^3}\int a^3 - \frac{1}{4x^4}\int a^4 + \frac{1}{5x^5}\int a^5 - \frac{1}{6x^6}\int a^6 + \cdots \&c.$$

mas he tambem

$$\text{Log. } Z = \text{Log. }\left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} + \cdots \&c.\right)$$

ou desenvolvendo em serie

$$\text{Log. } Z = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} + \&c.$$

$$- \frac{1}{2}\frac{A^2}{x^2} - \frac{AB}{x^3} - \frac{AC}{x^4} - \frac{AD}{x^5} - \frac{AE}{x^6} - \&c.$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{A^3}{x^3} - \frac{1}{2}\frac{B^2}{x^4} - \frac{BC}{x^5} - \frac{BD}{x^6} - \&c.$$

$$+ \frac{A^2B}{x^4} + \frac{A^2C}{x^5} - \frac{1}{2}\frac{C^2}{x^6} - \&c.$$

$$- \frac{1}{4}\frac{A^4}{x^4} + \frac{AB^2}{x^5} + \frac{A^2D}{x^6} + \&c.$$

$$- \frac{A^3B}{x^5} + \frac{1}{3}\frac{2ABC}{x^6} + \&c.$$

$$+ \frac{1}{5}\frac{A^5}{x^5} + \frac{1}{3}\frac{B^3}{x^6} + \&c.$$

$$- \frac{A^3C}{x^6} + \&c.$$

$$- \frac{3}{2}\frac{A^2B^2}{x^6} + \&c.$$

$$+ \frac{A^4B}{x^6} - \&c.$$

$$- \frac{1}{6}\frac{A^6}{x^6} - \&c.$$

$$- \&c.$$

c

e esta expreſſaõ deve ſer identica com a precedente; logo tambem deve ſer

$$\int a = A$$
$$\int a^2 = A^2 - 2B$$
$$\int a^3 = A^3 - 3AB + 3C$$
$$\int a^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D$$
$$\int a^5 = A^5 - 5A^3B + 5A^2C + 5AB^2 - 5AD - 5BC + 5E$$
&c.

§. III.

Subſtituindo na ſegunda deſtas equações $A\int a$ em lugar de A^2 ella ſe reduzirá a

$$\int a^2 = A\int a - 2B$$

e ſubſtituindo na terceira o valor de A^2 tirado da ſegunda, ella ſe reduzirá a $\int a^3 = A\int a^2 - AB + 3C$: e finalmente a

$$\int a^3 = A\int a^2 - B\int a + 3C$$

ſubſtituindo por A no penultimo termo do ſegundo membro o ſeu valor $\int a$ tirado da primeira

§. IV.

Subſtituindo na quarta o valor de A^3 tirado da terceira, ella ſe converterá em $\int a^4 = A\int a^3 - A^2B + AC + 2B^2 - 4D$: ſubſtituindo por A^2 o ſeu valor tirado da ſegunda ficará $\int a^4 = A\int a^3 - B\int a^2 + AC - 4D$: e finalmente ſubſtituindo no penultimo termo por A o ſeu valor $\int a$ tirado da primeira teremos

$$\int a^4 = A\int a^3 - B\int a^2 + C\int a - 4D$$

§ V.

Do mesmo modo substituindo na quinta equaçaõ primeiramente o valor de A^4 tirado da quarta: depois o valor de A^3 tirado da terceira: depois o valor de A^2 tirado da segunda: e finalmente no penultimo termo o valor de A tirado da primeira, ella se converterá em

$$\int a^5 = A\int a^4 - B\int a^3 + C\int a^2 - D\int a + 5E$$

e continuando assim successivamente a substituir em cada huma das equaçoens achadas no §. II. em lugar das potencias successivas de A os seus valores tirados das equaçoens precedentes, se iraõ achando todas as equaçoens

$$\begin{aligned}
\int a &= A \\
\int a^2 &= A\int a - 2B \\
\int a^3 &= A\int a^2 - B\int a + 3C \\
\int a^4 &= A\int a^3 - B\int a^2 + C\int a - 4D \\
\int a^5 &= A\int a^4 - B\int a^3 + C\int a^2 - D\int a + 5E \\
\int a^6 &= A\int a^5 - B\int a^4 + C\int a^3 - D\int a^2 + E\int a - 6F
\end{aligned}$$

&c.

que constituem a serie de expressões indicada em o §. I. e cuja demonstraçaõ se pertendia.

§. VI.

He evidente, que a primeira serie infinita, que achamos exprimir o valor de Log. Z, ou (fallando com toda a exacçaõ geometrica) de cuja somma he Log. Z o limite de expressaõ, he a mesma quanto á forma, e successaõ dos seus

termos,

termos, qualquer que feja o numero dos factores de Z, e por confequencia, reprezentando por n o numero dos ditos factores, da comparaçaõ della com a fegunda fe podem deduzir as expressões naõ fó de $\int a$ até $\int a^n$; mas tambem de todas as outras fommas de potencias além defta, e que por tanto o Theorema de *Newton* naõ tem limitaçaõ alguma.

§. VII.

Do que temos dito fe fegue, que reprezentando por X; X'; X''; X'''; &c. quaesquer Funcções de x, as quaes constituaõ os termos fucceffivos de huma ferie infinita de termos addicionados

$$X + X' + X'' + X''' + X^{\text{IV}} + X^{\text{V}} + \text{\&c.}$$

toda a ferie infinita de termos multiplicados desta forma

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X^{\text{IV}})(1 + X^{\text{V}})\ \text{\&c.}$$

ferá capaz de limite de expreffaõ (*) todas as vezes que as fommas das feries infinitas

$$(B)\quad \begin{array}{l} X + X' + X'' + X''' + X^{\text{IV}} + X^{\text{V}} + \text{\&c.} \\ X^2 + X'^2 + X''^2 + X'''^2 + X^{\text{IV}^2} + X^{\text{V}^2} + \text{\&c.} \\ X^3 + X'^3 + X''^3 + X'''^3 + X^{\text{IV}^3} + X^{\text{V}^3} + \text{\&c.} \\ X^4 + X'^4 + X''^4 + X'''^4 + X^{\text{IV}^4} + X^{\text{V}^4} + \text{\&c.} \\ \text{\&c.} \end{array}$$

forem capazes de hum tal limite; por quanto reprezentan-

(*) Por limite da expreffaõ de qualquer Funcçaõ variavel entendo a expreffaõ, que reprezentaria o feu limite de grandeza, no cafo que a fua raiz tiveffe as condições neceffarias para fazer a dita Funcçaõ capaz de limite, (Veja fe a minha *Theorica dos Limites*). Mas como as fommas das feries de termos addicionados podem variar já por caufa fómente da variaçaõ do numero dos feus termos, já por caufa da variaçaõ de grandeza de cada hum delles, já por hum

do por $F'X$ o eſtado de grandeza do producto $(1+X)$ $(1+X')(1+X'')$ &c. quando o numero dos ſeus factores he n; reprezentando por A' a ſomma dos termos $X+X'+X''+X'''+\ldots+X^{n-1}$: por B' a ſomma dos ſeus productos ſendo elles entre ſi multiplicados dois a dois: por C' a ſomma dos ſeus productos ſendo elles entre ſi multiplicados tres a tres, e aſſim ſucceſſivamente, ſerá

$$F'X = 1 + A' + B' + C' + D' + E' + F' + \ldots \text{ \&c.}$$

ſerie que variará em grandeza, e numero de termos todas as vezes que n variar; e que ſerá capaz de limite de expreſſaõ, quando as quantidades A'; B'; C'; D'; &c. forem capazes de hum tal limite. Ora que as quantidades A'; B'; C'; D' &c. ſaõ capazes de limite de expreſſaõ, todas as vezes que o ſaõ as ſommas das ſeries (B), he evidente; pois que repreſentando por $\int' X$ a ſomma da primeira das ditas ſeries; por $\int' X^2$ a ſomma da ſegunda; por $\int' X^3$ a ſomma da terceira, e aſſim ſucceſſivamente, e conſiderando cada huma dellas continuada até ao termo n, das Fórmulas do §. V. ſe deduz

$$A' = \int' X$$

$$B' = -\frac{1}{2}\left(\int' X^2 - A'\int' X\right)$$

$$C' = \frac{1}{3}\left(\int' X^3 - A'\int' X^2 + B'\int' X\right)$$

D'

---

hum, e outro deſtes dois motivos juntamente: entaõ no primeiro caſo chamo limite de expreſſaõ da ſua ſomma aquella expreſſaõ, que repreſentaria o limite de grandeza da meſma ſomma, ſe a ſerie tiveſſe as condiçôes neceſſarias para admitir hum tal limite; e nos outros dois chamo indiſtinctamente limite de expreſſaõ da ſomma da ſerie tanto á outra ſerie, que ſe obteria ſubſtituindo em lugar de cada hum dos termos da primeira o ſeu limite particular de expreſſaõ, como ao limite de expreſſaõ da ſomma dos termos deſta ſegunda ſerie.

$$D' = -\frac{1}{4}\left(\int' X^4 - A'\int' X^3 + B'\int' X^2 - C'\int' X\right)$$

$$E' = \frac{1}{5}\left(\int' X^5 - A'\int' X^4 + B'\int' X^3 - C'\int' X^2 + D'\int' X\right)$$

&c.

expressões em que naõ entraõ senaõ quantidades todas capazes de limite de expressaõ: logo reprezentando por FX o limite de expressaõ de $F' X$; por $\int X$ o limite de expressaõ de $\int' X$; por $\int X^2$ o limite de expressaõ de $\int' X^2$; e assim por diante; e reprezentando semelhantemente por A o limite de expressaõ de A', por B o limite de expressaõ de B'; por C o limite de expressaõ de C'; e assim successivamente será

$$A = \int X$$

$$B = -\frac{1}{2}\left(\int X^2 - A\int X\right)$$

$$C = \frac{1}{3}\left(\int X^3 - A\int X^2 + B\int X\right)$$

$$D = -\frac{1}{4}\left(\int X^4 - A\int X^3 + B\int X^2 - C\int X\right)$$

$$E = \frac{1}{5}\left(\int X^5 - A\int X^4 + B\int X^3 - C\int X^2 + D\int X\right)$$

&c.

e por tanto

$$1 + A + B + C + D + E + F + \&c.$$

ou o seu limite de expressaõ FX, será o limite de expressaõ da serie proposta de termos multiplicados

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X^{\text{IV}})\ \&c.$$

§. VIII.

§. VIII.

Aos productos assim compostos de hum numero ilimitado de factores chamaremos *Productos infinitos*, por nos accommodarmos ao modo commum de fallar de *Wallis*, e dos Geometras, que depois delle tem tratado das series infinitas de termos multiplicados; e assim tambem a operaçaõ de assinar, dado hum producto infinito qualquer, huma serie de termos addicionados, que seja o seu limite de expressaõ, chamaremos *converter*, ou *dezenvolver em serie o dito Producto*.

§. IX.

EXEMPLO I.

Supponhamos que se pertende converter em serie o Producto infinito

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ \&c.}$$

como neste caso he

$$\int' X = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{\&c.}$$
$$\int' X^2 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + \text{\&c.}$$
$$\int' X^3 = x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21} + \text{\&c.}$$
$$\int' X^4 = x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + x^{24} + x^{28} + \text{\&c.}$$
&c.

será

$$\int X = \frac{x}{1-x}$$

$\int X$

$$\int X^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$\int X^3 = \frac{x^3}{1 - x^3}$$

$$\int X^4 = \frac{x^4}{1 - x^4}$$

&c.

ſubſtituindo eſtes valores nas expreſsões de A; B; C; D; &c. acharemos

$$A = \frac{x}{1 - x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1 - x^2} = \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)}$$

$$C = \frac{Bx^3}{1 - x^3} = \frac{x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1 - x^4} = \frac{x^{10}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1 - x^5} = \frac{x^{15}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)}$$

&c.

e por conſequencia o limite de expreſſaõ do producto propoſto ſerá

$$1 + \frac{x}{1 - x} + \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)} + \frac{x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)} + \&c.$$

ſerie cuja lei he facil de notar, e que por tanto ſe póde continuar quanto se quizer; pois que os expoentes de x em os numeradores dos ſeus termos ſaõ os numeros triangulares; e em os factores dos denominadores vaõ ſucceſſivamente creſcendo huma unidade.

§. X.

EXEMPLO II.

Se quizermos converter em ſerie o producto infinito

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ \&c.}$$

entaõ ſendo

$$\int' X = -(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{\&c.})$$
$$\int' X^2 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + \text{\&c.}$$
$$\int' X^3 = -(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21} + \text{\&c.})$$
$$\int' X^4 = x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + x^{24} + x^{28} + \text{\&c.}$$

&c.

ſerá

$$\int X = \frac{-x}{1-x}$$
$$\int X^2 = \frac{x^2}{(1-x^2)}$$
$$\int X^3 = \frac{-x^3}{1-x^3}$$
$$\int X^4 = \frac{x^4}{1-x^4}$$

&c.

e por tanto

$$A = \frac{-x}{1-x}$$
$$B = \frac{-Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

C =

$$C=\frac{-Bx^3}{1-x^3}=\frac{-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D=\frac{-Cx^4}{1-x^4}=\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E=\frac{-Dx^5}{1-x^5}=\frac{-x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

&c.

donde ſe conclue, que o limite de expreſſaõ do producto propoſto ſerá

$$1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\&c.$$

ſerie que ſó difere da precedente na mudança de ſinal dos termos pares.

§. XI.

Do meſmo modo querendo converter em ſerie o producto infinito

$$(1+x)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^4)(1+x^5)(1-x^6)\ \&c.$$

achariamos.

$$1+\frac{x}{1+x}-\frac{x^3}{(1+x)(1-x^2)}-\frac{x^6}{(1+x)(1-x^2)(1+x^3)}+\&c.$$

ſerie em que a lei da formaçaõ dos termos he facil de conhecer, e em que os ſinaes ſe alternaõ de dois em dois termos. Igualmente achariamos.

$$1-\frac{x}{1+x}-\frac{x^3}{(1+x)(1-x^2)}+\frac{x^6}{(1+x)(1-x^2)(1+x^3)}+\&c.$$

ſe quizeſſemos converter em ſerie o producto

$$(1-x)(1+x^2)(1-x^3)(1+x^4)(1-x^5)(1+x^6)\ \&c.$$

e he facil de ver que a ſerie, que rezulta deſta operaçaõ, ſó difere da precedente em mudarem de ſinal todos os termos pares.

§. XII.

He evidente, que por eſte modo ſe pode facilmente converter em ſerie qualquer outro producto infinito, que tenha as condições mencionadas; aſſim como tambem que com igual facilidade ſe pode determinar o limite de expreſſaõ do ſeu logarithmo; pois ſe na expreſſaõ

$$(x+a)(x+a')(x+a'')(x+a''')(x+a^{IV})(x+a^{V}) \text{ \&c.}$$

do §. II. ſuppoſermos $x=1$, e $a=X$; $a'=X'$; $a''=X''$; $a'''=X'''$; &c. e ſe chamarmos FX ao limite de expreſſaõ de

$$(1+X)(1+X')(1+X'')(1+X''')(1+X^{IV}) \text{ \&c.}$$

ſerá

$$FX=1+A+B+C+D+E+F+G+ \text{ \&c.}$$

e

$$\text{Log.}\, FX=\int X-\frac{1}{2}\int X^2+\frac{1}{3}\int X^3-\frac{1}{4}\int X^4+\frac{1}{5}\int X^5- \text{\&c.}$$

Com tudo ſendo os termos de huma, e outra deſtas ſeries expreſſados pelos limites de expreſſaõ das ſommas de outras ſeries he claro, que neſte eſtado ellas naõ ſeraõ ſempre ſeries ſimpleces; porém ainda quando naõ o forem, ſe poderáõ reduzir a que o ſejaõ com mais, ou menos facilidade, ſegundo a natureza, e fórma das expreſsões $\int X$; $\int X^2$; $\int X^3$; &c.

§. XIII.

Para dar alguma idéa do noſſo modo de proceder neste

te genero de transformações, supponhamos que se pertende converter em serie simples o producto infinito

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\ \&c.$$

Primeiramente o dezenvolveremos como praticamos em o §. IX. em a serie

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\&c.$$

e depois suppondo esta igual a

$$1+A^{1\prime}x+A^{2\prime}x^2+A^{3\prime}x^3+A^{4\prime}x^4+A^{5\prime}x^5+\ldots\ldots+A^{n\prime}x^n+\&c.$$

teremos a seguinte Equação

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\&c.=$$

$$A^{1\prime}x+A^{2\prime}x^2+A^{3\prime}x^3+A^{4\prime}x^4+A^{5\prime}x^5+\ldots\ldots+A^{n\prime}x^n+\&c.$$

e multiplicando ambos os seus membros por $1-x$ teremos

$$x+\frac{x^3}{1-x^2}+\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^{10}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\&c.$$

$$=A^{1\prime}x+A^{2\prime}x^2+A^{3\prime}x^3+A^{4\prime}x^4+A^{5\prime}x^5+\ldots\ldots+A^{n\prime}x^n+\&c.$$

$$-A^{1\prime}x^2-A^{2\prime}x^3-A^{3\prime}x^4-A^{4\prime}x^5-\ldots\ldots-A^{(n-1)\prime}x^n-\&c.$$

Donde se tira $A^{1\prime}=1$, e $A^{2\prime}=1$; pois que deve ser $A^{1\prime}x=x$; e que o primeiro termo, que de necessidade deve rezultar do dezenvolvimento de $\frac{x^3}{1-x^2}$ em serie, he evidentemente x^3; o que mostra ser $A^{2\prime}-A^{1\prime}=0$, ou $A^{2\prime}=1$.

§. XIV.

Achados estes valores, e substituidos nos seus devidos lugares tiraremos de hum e outro membro os termos identicos,

ticos, e escreveremos de novo a mesma equaçaõ, a qual por estas operaçoens fica reduzida a

$$\frac{x^3}{1-x^2}+\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^{10}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\&c.$$
$$=(A^{3\prime}-1)x^3+(A^{4\prime}-A^{3\prime})x^4+(A^{5\prime}-A^{4\prime})x^5+(A^{6\prime}-A^{5\prime})x^6$$
$$+\cdots\cdots\cdots+(A^{n\prime}-A^{(n-1)\prime})x^n+\&c.$$

e multiplicando ambos os seus membros por $1-x^2$ teremos

$$x^3+\frac{x^6}{1-x^3}+\frac{x^{10}}{(1-x^3)(1-x^4)}+\frac{x^{15}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}+\&c.$$
$$=(A^{3\prime}-1)x^3+(A^{4\prime}-A^{3\prime})x^4+(A^{5\prime}-A^{4\prime})x^5+(A^{6\prime}-A^{5\prime})x^6$$
$$-(A^{3\prime}-1)x^5-(A^{4\prime}-A^{3\prime})x^6$$
$$+\cdots\cdots\cdots+(A^{n\prime}-A^{(n-1)\prime})x^n+\&c.$$
$$-\cdots\cdots\cdots-(A^{(n-1)\prime}-A^{(n-2)\prime})x^n-\&c.$$

Donde se tira $A^{3\prime}-1=1$; ou $A^{3\prime}=2$; $A^{4\prime}-A^{3\prime}=0$, ou $A^{4\prime}=2$; $A^{5\prime}-A^{4\prime}-A^{3\prime}+1=0$; ou $A^{5\prime}=3$; levando a determinaçaõ dos coefficientes indeterminados até ao termo, em que x tem por expoente 5; por isso que do dezenvolvimento da fracçaõ $\frac{x^6}{1-x^3}$ naõ pode rezultar termo em que o expoente de x seja menor que 6.

§. XV.

Substituindo estes valores no segundo membro da Equaçaõ precedente, e tirando x^3 de hum e outro membro ella se redus a

$$\frac{x^6}{1-x^3}+\frac{x^{10}}{(1-x^3)(1-x^4)}+\frac{x^{15}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}+\&c.$$
$$=$$

$$= (A^{6\prime} - 3)\, x^6 + (A^{7\prime} - A^{6\prime})\, x^7 + (A^{8\prime} - A^{7\prime})\, x^8 + (A^{9\prime} - A^{8\prime})\, x^9$$
$$- x^7 - (A^{6\prime} - 3)\, x^8 - (A^{7\prime} - A^{6\prime})\, x^9$$

$$+ \dots\dots\dots\dots + (A^{n\prime} - A^{(n-1)\prime})\, x^n + \&c.$$
$$- \dots\dots\dots\dots - (A^{(n-1)\prime} - A^{(n-2)\prime})\, x^n - \&c.$$

e multiplicando ambos os ſeus membros por $1 - x^5$ teremos

$$x^6 + \frac{x^{10}}{1 - x^4} + \frac{x^{15}}{(1 - x^4)(1 - x^5)} + \frac{x^{21}}{(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6)} + \&c.$$
$$= (A^{6\prime} - 3)\, x^6 + (A^{7\prime} - A^{6\prime})\, x^7 + (A^{8\prime} - A^{7\prime})\, x^8 + (A^{9\prime} - A^{8\prime})\, x^9$$
$$- x^7 - (A^{6\prime} - 3)\, x^8 - (A^{7\prime} - 3)\, x^9$$

$$+ (A^{10\prime} - A^{9\prime})\, x^{10} + (A^{11\prime} - A^{10\prime})\, x^{11} + \dots + (A^{n\prime} - A^{(n-1)\prime})\, x^n + \&c.$$
$$- (A^{8\prime} - A^{6\prime})\, x^{10} - (A^{9\prime} - A^{7\prime})\, x^{11} - \dots - (A^{(n-2)\prime} - A^{(n-4)\prime})\, x^n - \&c.$$
$$+ x^{10} + (A^{6\prime} - 3)\, x^{11} + \dots + (A^{(n-5)\prime} - A^{(n-6)\prime})\, x^n + \&c.$$

Donde ſe tira $A^{6\prime} - 3 = 1$; ou $A^{6\prime} = 4$; $A^{7\prime} - A^{6\prime} - 1 = 0$; ou $A^{7\prime} = 5$; $A^{8\prime} - A^{7\prime} - A^{6\prime} + 3 = 0$; ou $A^{8\prime} = 6$; $A^{9\prime} - A^{8\prime} - A^{7\prime} + 3 = 0$; ou $A^{9\prime} = 8$.

§. XVI.

Subſtituindo eſtes valores na Equaçaõ antecedente eſta ſe reduz a

$$\frac{x^{10}}{1 - x^4} + \frac{x^{15}}{(1 - x^4)(1 - x^5)} + \frac{x^{21}}{(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6)} + \&c.$$
$$= (A^{10\prime} - 9)\, x^{10} + (A^{11\prime} - A^{10\prime})\, x^{11} + (A^{12\prime} - A^{11\prime})\, x^{12} + (A^{13\prime} - A^{12\prime})\, x^{13}$$
$$- 2\, x^{11} - (A^{10\prime} - 7)\, x^{12} - (A^{11\prime} - 9)\, x^{13}$$

$$+(A^{14,}-A^{13,})x^{14}+(A^{15,}-A^{14,})x^{15}+\ldots+(A^{n,}-A^{(n-1),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{12,}-A^{10,})x^{14}-(A^{13,}-A^{11,})x^{15}-\ldots-(A^{(n-2),}-A^{(n-4),})x^{n}-\&c.$$
$$+2x^{14}+(A^{10,}-8)x^{15}+\ldots+(A^{(n-5),}-A^{(n-6),})x^{n}+\&c.$$

e multiplicando por $1-x^4$ teremos

$$x^{10}+\frac{x^{15}}{1-x^5}+\frac{x^{21}}{(1-x^5)(1-x^6)}+\&c.=(A^{10}-9)x^{10}$$
$$+(A^{11,}-A^{10,})x^{11}+(A^{12,}-A^{11,})x^{12}+(A^{13,}-A^{12,})x^{13}+(A^{14,}-A^{13,})x^{14}$$
$$-2x^{11}-(A^{10,}-7)x^{12}-(A^{11,}-9)x^{13}-(A^{12,}-11)x^{14}$$
$$+(A^{15,}-A^{14,})x^{15}+(A^{16,}-A^{15,})x^{16}+\ldots+(A^{n,}-A^{(n-1),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{13,}-A^{10,})x^{15}-(A^{14,}-A^{11,})x^{16}-\ldots-(A^{(n-2),}-A^{(n-5),})x^{n}-\&c.$$
$$+(A^{10,}-6)x^{15}+(A^{11,}-7)x^{16}+\ldots+(A^{(n-5),}-A^{(n-8),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{(n-9),}-A^{(n-10),})x^{n}-\&c.$$

Donde ſe conclue $A^{10,}-9=1$; ou $A^{10,}=10$, $A^{11,}-A^{10,}-2=0$; ou $A^{11,}=12$. $A^{12,}-A^{11,}-A^{10,}+7=0$; ou $A^{12,}=15$. $A^{13,}-A^{12,}-A^{11,}+9=0$; ou $A^{13,}=18$. e $A^{14,}-A^{13,}-A^{12,}+11=0$; ou $A^{14,}=22$.

§. XVII.

Subſtituindo eſtes valores na meſma Equaçaõ ella ſe reduz a

$$\frac{x^{15}}{1-x^5}+\frac{x^{21}}{(1-x^5)(1-x^6)}+\frac{x^{28}}{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)}+\&c.=$$
$$(A^{15,}-26)x^{15}+(A^{16,}-A^{15,})x^{16}+\ldots+(A^{n,}-A^{(n-1),})x^{n}+\&c.$$
$$-5x^{16}-\ldots-(A^{(n-2),}-A^{(n-5),})x^{n}-\&c.$$
$$+(A^{(n-5),}-A^{(n-8),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{(n-9),}-A^{(n-10),})x^{n}-\&c.$$

e

e multiplicando por $1 - x^5$ se teria huma nova expressaõ; da qual se poderiaõ tirar os valores dos coefficientes $A^{15\prime}$; $A^{16\prime}$; $A^{17\prime}$; $A^{18\prime}$; $A^{19\prime}$; e $A^{20\prime}$: e semelhantemente todos os outros, que se quizessem, procedendo pelo mesmo modo, que até aqui temos praticado; sendo porém a cada operaçaõ continuamente maior o numero dos coefficientes, que se poderaõ determinar; pois que cada huma dellas nos dá sempre tantos coefficientes e mais hum, quantos saõ os que dá a operaçaõ precedente.

§. XVIII.

Naõ querendo porém passar além do coefficiente $A^{15\prime}$; todos os coefficientes $A^{10\prime}$; $A^{11\prime}$; $A^{12\prime}$; $A^{13\prime}$; $A^{14\prime}$; determinados em §. XVI; e o mesmo coefficiente $A^{15\prime}$ se poderiaõ determinar independentemente das operações alli praticadas, reflectindo em que os primeiros tres termos, que rezultariaõ do dezenvolvimento do primeiro membro da Equaçaõ expressada no dito §. saõ $x^{10} + x^{14} + x^{15}$; e que por consequencia deve ser $A^{10\prime} - 9 = 1$; $A^{11\prime} - A^{10\prime} - 2 = 0$; $A^{12\prime} - A^{11\prime} - A^{10\prime} + 7 = 0$; $A^{13\prime} - A^{12\prime} - A^{11\prime} + 9 = 0$; $A^{14\prime} - A^{13\prime} - A^{12\prime} + A^{10\prime} + 2 = 1$; e $A^{15\prime} - A^{14\prime} - A^{13\prime} + A^{11\prime} + A^{10\prime} - 8 = 1$; donde se tira igualmente $A^{10\prime} = 10$; $A^{11\prime} = 12$; $A^{12\prime} = 15$; $A^{13\prime} = 18$; $A^{14\prime} = 22$; e além disso $A^{15\prime} = 27$.

§. XIX.

Procedendo pois pelo modo indicado teremos, que o limite de expressaõ do producto infinito proposto se converte em

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9$$
$$+ 10x^{10} + 12x^{11} + 15x^{12} + 18x^{13} + 22x^{14} + 27x^{15} + \&c.$$

serie simples, cujos coefficientes reprezentaõ cada hum re-

 la-

lativamente ao termo, a que pertence, o differente numero de modos, porque o expoente de x neſſe meſmo termo pode ſer formado pela addiçaõ dos termos da ſerie dos numeros naturaes.

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ \&c.$$

Por exemplo o coefficiente 12 do termo $12\,x^{11}$ denota que o numero 11 ſe pode formar pela addiçaõ dos termos da ſerie dos numeros naturaes por 12 modos differentes; e com effeito he

$11 = 11 + 0$	$11 = 7 + 4$	$11 = 6 + 4 + 1$
$11 = 10 + 1$	$11 = 6 + 5$	$11 = 6 + 3 + 2$
$11 = 9 + 2$	$11 = 8 + 2 + 1$	$11 = 5 + 4 + 2$
$11 = 8 + 3$	$11 = 7 + 3 + 1$	$11 = 5 + 3 + 2 + 1$

pois ſendo os numeros naturaes os expoentes de x em todos os factores do producto infinito, de que ſe trata, e devendo pela multiplicaçaõ effectiva delles rezultar eſta meſma ſerie ſimples, he evidente que os coefficientes de cada termo denotaõ por quantos modos diverſos o ſeu expoente pode rezultar da ſomma dos expoentes de x nos factores do producto; pois que em todos eſtes o ſegundo termo tem ſinal additivo.

§. XX.

Tambem ſe poderia converter a ſerie

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

em ſerie ſimples contraindo primeiro os ſeus termos dois a dois; iſto he, reduzindo-a primeiro á fórma

$$\frac{1}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \&c.$$

ou á forma

$$1 + \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \&c.$$

mas ainda que por eſte modo o numero das operações ſeria menor, e a cada huma dellas ſe determinaria hum numero maior de coefficientes; com tudo cada huma dellas ſeria tambem mais complicada, e trabalhoza; pois que em vez de conſtar o multiplicador ſó de dois termos conſtaria de quatro.

§. XXI.

Se quizeſſemos converter em ſerie ſimples o producto infinito

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ \&c.$$

achariamos pelo methodo expoſto, que o ſeu limite de expreſſaõ

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{-x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

ſe reduz a

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \&c.$$

ſerie facil de continuar quanto ſe quizer; pois que, como he facil denotar, ella ſe pode ſeparar em duas

$$x^0 - x^2 + x^7 - x^{15} + x^{26} - x^{40} + x^{57} - x^{77} + \&c.$$

e

$$-x + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + x^{51} - x^{70} + x^{92} - \&c.$$

ambas faceis de continuar; por quanto as differenças dos expoentes de x na primeira conſtituem a progreſſaõ arithmetica

2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23, 26, 29; &c.

e as differenças dos expoentes de x na segunda constituem a progressaõ arithmetica

$$4, 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; \&c.$$

donde se vê que os expoentes de x na primeira serie constituem huma serie recurrente, cujo termo geral he $\frac{3n^2-5n+2}{2}$; e que os expoentes de x na segunda constituem outra serie recurrente, cujo termo geral he $\frac{3n^2-n}{2}$. Do mesmo modo se poderiaõ converter em series simpleces os outros dois productos infinitos mencionados em o §. XI.

§. XXII.

O dezenvolvimento do producto infinito, que tomámos por primeiro exemplo, e a lei que entre si guardaõ os seus factores nos mostraõ, que os divisores simpleces do primeiro gráo da serie infinita

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \&c.$$

saõ os mesmos que os de todas as Equações $x+1=0$; $x^2+1=0$; $x^3+1=0$; $x^4+1=0$; $x^5+1=0$; $x^6+1=0$; &c. donde se conclue, que reprezentando por p a semicircumferencia do circulo, cujo raio he 1, elles se poderaõ determinar substituindo na expressaõ

$$x - \text{Cos.}\left(\frac{2k+1}{n}\right)p \mp \sqrt{-1}.\ \text{Sen.}\left(\frac{2k+1}{n}\right)p$$

todos os numeros inteiros positivos em lugar de n; e substituindo em lugar de k a cada valor de n todos os numeros inteiros positivos naõ maiores que $\frac{n-1}{2}$; por quanto todas as ditas Equações saõ da fórma $1+x^n=0$; e buscando os factores trinomios d'esta expressaõ se achará, que elles todos se contém na fórmula geral

1

$$1 - 2x \text{ Cof. } \left(\frac{2k+1}{n}\right) p + x^2$$

a qual igualada a cifra dá

$$x = \text{Cof. } \left(\frac{2k+1}{n}\right) p \pm \sqrt{-1}. \text{ Sen. } \left(\frac{2k+1}{n}\right) p$$

expreſſaõ da qual ſe deduzem por conſequencia todos os diviſores ſimpleces da ſerie expreſſada fazendo em lugar de n, e k as ſubſtitutições ſobreditas.

§. XXIII.

Do meſmo modo ſe conclue pelo dezenvolvimento em ſerie do producto infinito, que tomámos por ſegundo exemplo, que os diviſores ſimpleces do primeiro gráo da ſerie infinita

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \&c.$$

ſaõ os meſmos que os das Equações $x - 1 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x^3 - 1 = 0$; $x^4 - 1 = 0$; $x^5 - 1 = 0$; $x^6 - 1 = 0$; &c. n'uma palavra que elles ſaõ todos os que rezultaõ da igualação de todos os factores do meſmo producto a cifra; e porque todos elles ſaõ da fórma $1 - x^n = 0$ fica evidente pela razaõ expreſſada no §. antecedente, que os diviſores ſimpleces da referida ſerie ſe podem determinar ſubſtituindo na expreſſaõ

$$x - \text{Cof. } \frac{2k}{n} p \pm \sqrt{-1}. \text{ Sen. } \frac{2k}{n} p$$

em lugar de n todos os numeros inteiros poſitivos; e ſubſtituindo em lugar de k a cada valor de n todos os numeros inteiros poſitivos naõ maiores que $\frac{1}{2} n$.

§. XXIV.

Se quizermos deſde logo converter em ſerie ſimples

qualquer producto infinito, que tenha as condições mencionadas no §. VII. sem primeiro converter em serie composta, reduziremos primeiramente o segundo membro da Equação

$$\text{Log. } FX = \int X - \frac{1}{2}\int X^2 + \frac{1}{3}\int X^3 - \frac{1}{4}\int X^4 + \frac{1}{5}\int X^5 - \frac{1}{6}\int X^6 + \text{\&c.}$$

em serie simples, o que he sempre possivel ainda que as expressões de $\int X$; $\int X^2$; $\int X^3$; &c. se naõ possaõ obter; pois que sendo sempre dados os factores do producto saõ sempre dadas as series de cujas somas saõ $\int X$; $\int X^2$; $\int X^3$; &c. os limites de expressaõ; series que sempre se podem converter em series simpleces se no seu primitivo estado o naõ forem já; entaõ procedendo pelo methodo inverso das series d'esta expressaõ de Log. FX deduziremos

$$\begin{aligned}
FX = 1 + \int X - \frac{1}{2}\int X^2 + \frac{1}{3}\int X^3 - \frac{1}{4}\int X^4 + \frac{1}{5}\int X^5 - \text{\&c.}\\
+ \frac{1}{2}\int^2 X - \frac{1}{2}\int X \int X^2 + \frac{1}{3}\int X \int X^3 - \frac{1}{4}\int X \int X^4 + \text{\&c.}\\
+ \frac{1}{6}\int^3 X + \frac{1}{8}\int^2 X^2 - \frac{1}{6}\int X^2 \int X^3 + \text{\&c.}\\
- \frac{1}{4}\int^2 X \int X^2 + \frac{1}{6}\int^2 X \int X^3 + \text{\&c.}\\
+ \frac{1}{24}\int^4 X + \frac{1}{8}\int X \int^2 X^2 - \text{\&c.}\\
- \frac{1}{12}\int^3 X \int X^2 - \text{\&c.}\\
+ \frac{1}{120}\int^5 X + \text{\&c.}\\
+ \text{\&c.}
\end{aligned}$$

tambem expressado em serie simples.

§. XXV.

§. XXV.

Porém este methodo, posto que mais amplo que o precedente, pois que naõ depende da condiçaõ de se conhecerem as expressões de $\int X; \int X^2; \int X^3$; &c. he nimiamente longo, e assaz laborioso todas as vezes que a lei, que seguem os termos da serie logarithmica, naõ he facil de notar; ou ainda quando, sendo facil de notar, os primeiros termos da serie, que d'esta se deduz pelo methodo inverso, naõ manifestaõ desde logo a lei, que devem seguir na sua successaõ. O exemplo do §. IX. em que he dado o producto infinito

$$FX = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ \&c.}$$

dá huma serie logarithmica simples, cuja lei he assaz patente; pois sendo

$$\text{Log.} FX = \text{Log.}(1+x) + \text{Log.}(1+x^2) + \text{Log.}(1+x^3) + \text{\&c.}$$

desenvolvendo todos estes logarithmos em series, ordenando em huma mesma columna todos os termos, em que as potencias de x forem as mesmas, e sommando acharemos

$$\text{Log.} FX = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{4}{6}x^6 + \frac{8}{7}x^7 + \text{\&c.}$$

serie cuja lei he com effeito facilima de notar, attendendo-se ao modo porque cada hum dos seus termos he formado pela addiçaõ dos termos semelhantes das series, que rezultaõ do desenvolvimento de Log. $(1+x)$; Log. $(1+x^2)$; Log. $(1+x^3)$; &c. pois por este modo se vê evidentemente

que

que todos os coefficientes dos ſeus termos ſe podem determinar buſcando todos os diviſores do numero, que denota o lugar que cada hum d'elles occupa na meſma ſerie, e fazendo com cada hum dos meſmos diviſores huma fracçaõ, que tendo a unidade por numerador tenha cada hum d'elles por denominador; ſommando depois á parte todas as fracções, cujos denominadores forem pares, e tirando a ſegunda ſomma da primeira. Querendo por exemplo o coefficiente do ſexto termo, determinaremos todos os diviſores do numero 6, que ſaõ $1, 2, 3$, e 6: com elles faremos quatro fracções $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$: ſommando a primeira, e a terceira teremos $\frac{4}{3}$; e ſommando a ſegunda, e a quarta teremos $\frac{4}{6}$; tirando finalmente eſta ſegunda ſomma da primeira teremos o reſto $\frac{4}{6}$, que ſerá o coefficiente de x^6. Do meſmo modo querendo o coefficiente do nono termo, buſcaremos os diviſores de 9, que ſaõ $1, 3$, e 9, e faremos as fracções $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{3}$; e $\frac{1}{9}$, as quaes tendo todas denominadores impares ſe juntaraõ em huma ſó ſomma $\frac{13}{9}$, que ſerá por conſequencia o coefficiente de x^9; e aſſim ſemelhantemente ſe poderáõ obter os coefficientes de todos os outros termos. Porém a paſſagem d'eſte logarithmo para o valor de FX dando

$$
\begin{aligned}
FX = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{6}{5}x^5 + \tfrac{4}{6}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{4}{3}x^4 + \tfrac{1}{4}x^5 + \tfrac{6}{5}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{4}{6}x^5 + \tfrac{1}{8}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{4}{6}x^5 + \tfrac{8}{9}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 + \tfrac{1}{8}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{12}x^5 + \tfrac{4}{6}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{120}x^5 + \tfrac{1}{48}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{2}{9}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{16}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{48}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{720}x^6 + \&c. \\
+ \&c.
\end{aligned}
$$

dá huma expressaõ assaz trabalhoza de calcular, e que naõ deixa descobrir taõ facilmente a lei dos coefficientes, como o methodo de que antecedentemente uzámos.

§. XXVI.

Poderia igualmente uzar-se para o mesmo effeito de buscar duas expressões de $\frac{d \,\text{Log.}\, FX}{dx}$ huma determinada, e outra indeterminada, e pela comparaçaõ de ambas de-

 ter-

terminar a expressaõ de FX em serie simples. Por exemplo sendo como em o §. antecedente

$$FX = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\&c.$$

e suppondo

$$FX = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \&c.$$

será

$$\text{Log.}\, FX = \text{Log.}\,(1+x) + \text{Log.}\,(1+x^2) + \text{Log.}\,(1+x^3) + \&c.$$

$$= \text{Log.}\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.)$$

e por consequencia

$$\frac{d\,\text{Log.}\,FX}{dx} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^3} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{5x^4}{1+x^5} + \&c.$$

$$= \frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + 7Gx^6 + \&c.}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + \&c.}$$

Ora reduzindo em serie as fracções $\frac{1}{1+x}$; $\frac{2x}{1+x^2}$; $\frac{3x^2}{1+x^3}$; &c. se terá

$$\frac{d\,\text{Log.}\,FX}{dx} = \begin{array}{llllllllll}
1 & -\,x & +\,x^2 & -\,x^3 & +\,x^4 & -\,x^5 & +\,x^6 & -\,x^7 & +\,x^8 & -\,\&c. \\
 & +2x & * & -2x^3 & * & +2x^5 & * & -2x^7 & * & +\,\&c. \\
 & & +3x^2 & * & * & -3x^5 & * & * & +3x^8 & -\,\&c. \\
 & & & +4x^3 & * & * & * & -4x^7 & * & +\,\&c. \\
 & & & & +5x^4 & * & * & * & * & -\,\&c. \\
 & & & & & +6x^5 & * & * & * & -\,\&c. \\
 & & & & & & +7x^6 & * & * & -\,\&c. \\
 & & & & & & & +8x^7 & * & -\,\&c. \\
 & & & & & & & & +9x^8 & -\,\&c. \\
 & & & & & & & & & +\,\&c.
\end{array}$$

ou

d

$$\frac{d\,\text{Log.}\,FX}{dx} = 1 + x + 4x^2 + x^3 + 6x^4 + 4x^5 + 8x^6 + x^7 + \&c.$$

ſerie facil de continuar quanto ſe quizer ; pois que cada hum dos coefficientes dos ſeus termos ſe determina pelo modo indicado em o §. antecedente, iſto he, buſcando o numerador da fracçaõ, que pelo methodo alli expoſto ſe acharia para coefficiente de cada hum dos termos correſpondentes na ſerie alli expreſſada : mas ſendo

$$\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \&c.}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \&c.} = 1 + x$$
$$+ 4x^2 + x^3 + 6x^4 + 4x^5 + 8x^6 + \&c.$$

multiplicando ambos os membros deſta Equaçaõ pelo denominador do primeiro, ſerá

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + \&c.$$
$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
= 1 & + x & + 4x^2 & + x^3 & + 6x^4 & + 4x^5 & + 8x^6 & + \&c. \\
 & + Ax & + Ax^2 & + 4Ax^3 & + Ax^4 & + 6Ax^5 & + 4Ax^6 & + \&c. \\
 & & + Bx^2 & + Bx^3 & + 4Bx^4 & + Bx^5 & + 6Bx^6 & + \&c. \\
 & & & + Cx^3 & + Cx^4 & + 4Cx^5 & + Cx^6 & + \&c. \\
 & & & & + Dx^4 & + Dx^5 & + 4Dx^6 & + \&c. \\
 & & & & & + Ex^5 & + Ex^6 & + \&c. \\
 & & & & & & + Fx^6 & + \&c. \\
 & & & & & & & + \&c.
\end{array}$$

expreſſaõ igualmente facil de continuar; pois que os coefficientes numericos ſaõ os meſmos em cada linha de calculo, e as letras A; B; C; &c. que reprezentaõ os coefficientes indeterminados entraõ huma ſó em cada linha, e vaõ-ſe ſuccedendo ſegundo a ordem Alfabetica. Devendo pois eſta Equaçaõ ſer identica, a igualaçaõ dos termos, que em hum e outro membro multiplicaõ cada huma das differentes potencias de x, daraõ tantas Equações de condiçaõ quantas baſtem para determinar os coefficientes indeterminados A;

 B;

B; C; &c. que se acharaõ como acima: a saber, $A=1$; $B=1$; $C=2$; $D=2$; $E=3$; &c.

§. XXVII.

Para naõ terminar esta Memoria sem dar hum exemplo de desenvolvimento de hum producto infinito, de que rezulte immediatamente pelo nosso methodo huma serie simples, supponhamos

$$FX=(1+x)\left(1+\frac{1}{4}x\right)\left(1+\frac{1}{9}x\right)\left(1+\frac{1}{16}x\right)\left(1+\frac{1}{25}x\right) \text{ \&c.}$$

será

$$\int' X = x\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\text{\&c.}\right)$$

$$\int' X^2 = x^2\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{36^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{64^2}+\text{\&c.}\right)$$

$$\int' X^3 = x^3\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{36^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{64^3}+\text{\&c.}\right)$$

$$\int' X^4 = x^4\left(1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{36^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{64^4}+\text{\&c.}\right)$$

- -

$$\int' X^n = x^n\left(1+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{16^n}+\frac{1}{25^n}+\frac{1}{36^n}+\frac{1}{49^n}+\frac{1}{64^n}+\text{\&c.}\right)$$

Donde, chamando p a semicircumferencia do circulo, cujo raio he 1, se deduz

$$\int X = \frac{p^2}{1.\,2.\,3}\,x$$

$$\int X^2 = \frac{2^2}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\cdot\frac{1}{3}\,p^4 x^2$$

$\int X^3$

$$\int X^3 = \frac{2^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} \cdot \frac{1}{3} p^6 x^3$$

$$\int X^4 = \frac{2^6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9} \cdot \frac{3}{5} p^8 x^4$$

$$\int X^5 = \frac{2^8}{1.\,2.\,3.\,4 \ldots\ldots 8.\,9.\,10.\,11} \cdot \frac{5}{3} p^{10} x^5$$

$$\int X^6 = \frac{2^{10}}{1.\,2.\,3.\,4 \ldots\ldots 10.\,11.\,12.\,13} \cdot \frac{601}{105} p^{12} x^6$$

&c.

Ou servindo-nos dos numeros Bernoullianos, e reprezentando-os por $B^{1\prime}$; $B^{2\prime}$; $B^{3\prime}$; $B^{4\prime}$; $B^{5\prime}$; &c.

$$\int X = \frac{2\,B^{1\prime}}{1.\,2.} p^2 x$$

$$\int X^2 = \frac{2^3\,B^{2\prime}}{1.\,2.\,3.\,4} p^4 x^2$$

$$\int X^3 = \frac{2^5\,B^{3\prime}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} p^6 x^4$$

$$\int X^4 = \frac{2^7\,B^{4\prime}}{1.\,2.\,3 \ldots 6.\,7.\,8} p^8 x^4$$

$$\int X^5 = \frac{2^9\,B^{5\prime}}{1.\,2.\,3 \ldots\ldots 8.\,9.\,10.} p^{10} x^5$$

\- - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - -

$$\int X^n = \frac{2^{2n-1}\,B^{n\prime}}{1.\,2.\,3 \ldots\ldots (2n-2)\,(2n-1)\,2n} p^{2n} x^n$$

&c.

serie cuja lei he assaz patente, e que se póde por consequencia continuar por tantos termos quantos forem os numeros Bernoullianos, que se tiverem calculado. A substitui-

çaõ d'eſtes valores nas expreſsões de A; B; C; D; &c. que indicamos em o §. VII., e que actualmente reprezentaremos por $A^{1\prime}$; $A^{2\prime}$; $A^{3\prime}$; $A^{4\prime}$; &c. nos dá

$$A^{1\prime} = \frac{p^2 x}{1.\ 2.\ 3}$$

$$A^{2\prime} = \frac{p^4 x^2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

$$A^{3\prime} = \frac{p^6 x^3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}$$

$$A^{4\prime} = \frac{p^8 x^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}$$

$$A^{5\prime} = \frac{p^{10} x^5}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 9.\ 10.\ 11}$$

&c.

ou em geral

$$A^{n\prime} = \frac{p^{2n} x^n}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (2n-1).\ 2n.\ (2n+1)}$$

e por tanto nos moſtra ſer

$$FX = 1 + \frac{p^2 x}{1.\ 2.\ 3} + \frac{p^4 x^2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} + \frac{p^6 x^3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} + \&c.$$

§. XXVIII.

Comparando eſta expreſſaõ com as fórmulas exponenciaes bem conhecidas

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.\ 2} + \frac{z^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{z^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \&c.$$

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.\ 2} - \frac{z^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{z^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \&c.$$

em que e reprezenta o numero, cujo Logarithmo hyperbolico

co he 1, veremos que diminuindo a segunda da primeira, tomando metade da differença, e dividindo depois por z se tem

$$\frac{e^{z}-e^{-z}}{2z}=1+\frac{z^2}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4.5}+\frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\&c.$$

expressaõ que será a mesma que a do §. antecedente, todas as vezes que fizermos $z=px^{\frac{1}{2}}$, e que por consequencia nos mostra, que o limite de expressaõ do producto infinito, que alli considerámos, póde naõ só ser representado pela serie simples alli expressada; mas tambem por huma expressaõ de numero limitado de termos; pois que feitas as substituições mencionadas fica

$$FX=\frac{e^{px^{\frac{1}{2}}}-e^{-px^{\frac{1}{2}}}}{2px^{\frac{1}{2}}}$$

§. XXIX.

Das fórmulas

$$A^{n\prime}=\frac{p^{2n}x^{n}}{1.2.3\ldots\ldots 2n(2n+1)}$$

$$fX^{n}=\frac{2^{2n-1}B^{n\prime}}{1.2.3\ldots\ldots(2n-1).2n}.p^{2n}x^{n}$$

achadas em o §. antecedente se conclue, que o Theorema Newtoniano demonstrado nesta Memoria póde tambem contribuir para se calcularem com facilidade os *Numeros Bernoullianos*; pois que substituindo na segunda destas Equações o valor de $p^{2n}x^{n}$ tirado da primeira se terá

$$B^{n\prime}=\frac{fX^{n}}{(2n+1)2^{2n-1}A^{n\prime}}$$

e como pelo Theorema Newtoniano he

$$\int X^n = A^{1\prime} \int X^{n-1} - A^{2\prime} \int X^{n-2} + A^{3\prime} \int X^{n-3} - A^{4\prime} \int X^{n-4}$$
$$+ \ldots\ldots \pm n A^{n\prime}$$

expressaõ em que o final + do ultimo termo serve para o caso de ser n numero impar, e o final − para o caso de ser n numero par, he evidente que por meio destas tres fórmulas

$$A^{n\prime} = \frac{p^{2n} \pi^n}{1.2.3\ldots\ldots 2n\,(2n+1)}$$

$$\int X^n = A^{1\prime} \int X^{n-1} - A^{2\prime} \int X^{n-2} + A^{3\prime} \int X^{n-3} - A^{4\prime} \int X^{n-4}$$
$$+ \ldots\ldots \pm n A^{n\prime}$$

$$B^{n\prime} = \frac{\int X^n}{(2n+1)\,2^{2n-1}\,A^{n\prime}}$$

se podem com effeito calcular tantos dos numeros Bernoullianos quantos se quizer, substituindo em cada huma dellas em lugar de n todos os numeros inteiros positivos desde 1 até aquelle que se quizer.

§. XXX.

Todas as vezes que a serie $1 + A + B + C + D + E +$ &c. que reprezenta em geral o limite de expressaõ de hum producto infinito qualquer da fórma

$$(1+X)(1+X')(1+X'')(1+X''')(1+X^{\text{IV}})\ \&c.$$

como vimos em o §. XII. for tal, que a sua somma admita limite de expressaõ, o dito producto naõ só poderá converter-se

ter-se em serie simples; mas terá por limite de expressaõ o limite da somma da serie $1 + A + B + C +$ &c. o qual será huma expressaõ algebrica, ou transcendente segundo a natureza d'esta serie, como acabamos de ver em o exemplo do §. XXVII. O mesmo succederá todas as vezes que a serie

$$\text{Log. } FX = \int X - \frac{1}{2}\int X^2 + \frac{1}{3}\int X^3 - \frac{1}{4}\int X^4 + \frac{1}{5}\int X^5 - \frac{1}{6}\int X^6 + \text{\&c.}$$

for capaz de limite de expressaõ; pois que he evidente que sendo esta serie o Logarithmo hyperbolico d'aquelle producto; e sendo por exemplo v o limite de expressaõ da sua somma será

$$FX = e^v$$

Sendo e o numero cujo Logarithmo hyperbolico he 1.

ADVERTENCIA.

Pelo que dizemos nos §§. XXII., e XXIII. sobre as substituições de valores numericos em lugar de k naõ se deve entender, que excluimos a substituiçaõ de o; antes pelo contrario esta he sempre aquella pela qual se deve começar. E quando nas Fórmulas dos ditos §§. tivermos feito as mencionadas substituições deveremos sempre trocar o lugar dos termos passando x para segundo, e a expressaõ em que naõ entra x para primeiro; havendo além disso tambem a cautella de trocar-lhe os sinaes quando a fórmula for a do §. XXIII.

ADITAMENTO.

§. I.

Quando naõ occorrer nenhuma das circunſtancias ſobreditas, e com tudo for conveniente ter por aproximaçaõ o limite da ſomma dos termos da ſerie, que rezulta do deſenvolvimento do producto

$$(1+X)(1+X')(1+X'')(1+X''')(1+X^{V}) \text{ \&c.}$$

iſto ſe poderá conſeguir pelos methodos ſabidos para a transformaçaõ das ſeries em outras mais convergentes; porém por naõ repetir o que em muitos livros ſe acha eſcrito, proporei ſómente hum Methodo aſſaz ſimples de ſubſtituir a qualquer ſerie convergente huma Funcçaõ algebrica, de cujo deſenvolvimento rezulte huma ſerie recurrente proximamente igual a ella, e meſmo taõ proximamente quanto ſe quizer; e que por tanto poderá algumas vezes ter util applicaçaõ, naõ ſó neſte genero de queſtões, mas ainda meſmo em outras quaeſquer, em que ſe precize ſommar ſeries por aproximaçaõ.

§. II.

Seja $1 + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + a^{IV} x^4 + a^{V} x^5 + a^{VI} x^6 + a^{VII} x^7 + \text{\&c.}$ huma ſerie qualquer convergente, e reprezente Fx o limite da ſomma dos ſeus termos, cuja expreſſaõ ſe ignora, e cujo valor aproximado ſe pertende: ſupponhamos

$$Fx, \text{ ou } \frac{1 + A^{1\prime}x + A^{2\prime}x^2 + A^{3\prime}x^3 + A^{4\prime}x^4 + \cdots + A^{m\prime}x^m}{1 + Bx}$$

$$= 1 + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + a^{IV} x^4 + a^{V} x^5 + \text{\&c.}$$

mul-

multiplicando ambos os membros d'esta Equação por $1 + Bx$ será

$$1 + A^{1\prime} x + A^{2\prime} x^2 + A^{3\prime} x^3 + A^{4\prime} x^4 + \cdots + A^{m\prime} x^m =$$
$$1 + (a' + B)x + (a'' + B a')x^2 + (a''' + B a'')x^3 + (a^{\text{IV}} + B a''')x^4 + \&c.$$

mas sendo a serie proposta huma serie convergente, tambem a que constitue o segundo membro d'esta Equação será convergente, e por tanto tomando os seus primeiros $m + 2$ termos teremos, que será proximamente

$$1 + A^{1\prime} x + A^{2\prime} x^2 + A^{3\prime} x^3 + A^{4\prime} x^4 + \cdots + A^{m\prime} x^m =$$
$$1 + (a' + B)x + (a'' + B a')x^2 + \cdots + (a^{(m+1)\prime} + B a^{m\prime}) x^{m+1}$$

Equação que igualada termo por termo nos dá as seguintes $m + 1$ Equações de condição

$$A^{1\prime} = a' + B; \quad A^{2\prime} = a'' + B a'; \quad A^{3\prime} = a''' + B a''$$
$$A^{m\prime} = a^{m\prime} + B a^{(m-1)\prime}; \quad 0 = a^{(m+1)\prime} + B a^{m\prime}$$

da ultima das quaes se tira $B = -\frac{a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}$; valor que substituido nas outras as converte em

$$A^{1\prime} = \frac{a' a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}; \quad A^{2\prime} = \frac{a'' a^{m\prime} - a' a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}};$$

$$A^{3\prime} = \frac{a''' a^{m\prime} - a'' a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}; \ldots A^{m\prime} = \frac{a^{m\prime} a^{m\prime} - a^{(m-1)\prime} a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}$$

e por consequencia substituindo estes valores na Equação primitiva teremos, que será proximamente

$$Fx = \frac{a^{m\prime} + (a' a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime})x + (a'' a^{m\prime} - a' a^{(m+1)\prime})x^2 + \ldots + (a^{m\prime} a^{m\prime} - a^{(m-1)\prime} a^{(m+1)\prime})x^m}{a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime} x}$$

§. III.

Dividindo o numerador d'esta fracçaõ pelo seu denominador até se ter no quociente hum numero $m+2$ de termos acharemos

$$1 + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + \ldots + a^{m\prime} x^m + a^{(m+1)\prime} x^{m+1} + \frac{a^{(m+1)\prime} a^{(m+1)\prime} x^{m+2}}{a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime} x}$$

expressaõ identica até ao termo $m+2$ com a serie proposta, e que nos mostra que depois de sommarmos hum numero qualquer $m+2$ de termos da dita serie o valor aproximado de todos os outros será $\frac{a^{(m+1)\prime} a^{(m+1)\prime} x^{m+2}}{a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime} x}$; donde se conclue, que o methodo indicado se reduz a suppor, que os termos da serie proposta subsequentes ao termo m constituem huma Progressaõ Geometrica, e que por tanto o limite da somma de todas as series, em que a razaõ dos seus termos immediatos depois de algum determinado numero d'elles se for continua, e rapidamente aproximando á igualdade, se poderá obter muito proximamente por meio da fórmula antecedente.

§. IV.

Neste caso está a serie

$$1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1) x^2}{2 n^2 u^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1) x^3}{2.3.4. n^4 u^{4n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1) x^4}{2.3.4. n^4 u^{4n}} + \&c.$$

a qual tem por limite $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u}$; pois que sendo qualquer

dos

dos ſeus termos, a que na ordem numerica chamo k, para o ſeu immediato $k+1$ como $1 : \left(\frac{1-(k-1)n}{kn}\right)\frac{x}{u^n}$, e o termo $k+1$ para o ſeu immediato $k+2$ como $1 : \left(\frac{(1-kn)}{(k+1)n}\right)\frac{x}{u^n}$, he claro, que eſtas duas razões ſeraõ tanto mais proximas á igualdade, quanto maior for o numero k; pois que ſuppondo k ſem limite em augmento ſe acha, que o limite da razaõ, que ellas entre ſi tem, he a razaõ de igualdade; e por tanto a lei da ſucceſſaõ dos termos d'eſta ſerie ſe avezinha continuamente á lei da ſucceſſaõ dos termos de huma progreſſaõ geometrica: donde podemos concluir, que o noſſo methodo ſerá muito conveniente para determinar por aproximaçaõ as raizes irracionaes de qualquer gráo que ſejaõ.

§. V.

Supponhamos pois que ſe pertenda o valor aproximado de $\sqrt[n]{u^n+x}$; ſerá $\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = 1 + \frac{x}{nu^n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2u^{2n}} +$
$\frac{(n-1)(2n-1)x^3}{2.3.n^3u^{3n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{2.3.4.n^4u^{4n}} + \&c.$;

e por tanto $a' = \frac{1}{nu^n}$; $a'' = \frac{(n-1)}{2n^2u^{2n}}$; $a''' = \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3n^3u^{3n}}$;

ou em geral $a^{m\prime} = \frac{(n-1)(2n-1)\ldots((m-1)n-1)}{2.3\ldots m\, n^m u^{mn}}$ ſegundo m for numero impar, ou numero par; e por tanto ſubſtituindo eſtes valores na fórmula que termina o §. II. teremos a expreſſaõ geral do valor aproximado de $\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}$, d'aqual, ſubſtituindo por m differentes valores, poderemos tirar tantas fórmulas particulares para calcular $\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}$ por

 apro-

aproximaçaõ quantas nos quizermos; mas por evitar huma fórmula complicada começaremos por determinar as fórmulas particulares antes da geral. Supponhamos primeiramente $m = 1$ será

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = \frac{a' + (a'a' - a'')x}{a' - a''x}$$

ou $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{a'a'x}{a' - a''x}$; e por tanto, substituindo por a', e a'' os seus valores, será $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{nu^n + \frac{n-1}{2}x}$;

e multiplicando por u

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{ux}{nu^n + \frac{n-1}{2}x}$$

expressaõ que, sendo a menos exacta de todas as que podemos affinar pelo nosso methodo, se pode com tudo reputar taõ vantajoza como as celebres fórmulas de *Halley* incertas nas Transacções Filosoficas da Sociedade Real de Londres do anno de 1694; porque tendo a superioridade de ser racional, e applicavel a todos os gráos, dá huma aproximaçaõ quasi igualmente exacta, e muito mais facil de calcular.

§. VI.

Se supozermos $m = 2$ a nossa fórmula será

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = \frac{a'' + (a'a'' - a''')x + (a''a'' - a'a''')x^2}{a'' - a'''x}$$

ou $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + a'x + \frac{a''a''x^2}{a'' - a'''x}$; e por tanto substituindo por a'; a''; e a''' os seus valores será

$\sqrt[n]{}$

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}=1+\frac{x}{nu^n}-\frac{\frac{n-1}{2}x^2}{n^2u^{2n}+n\left(\frac{2n-1}{3}\right)u^n x}$$

e multiplicando por u

$$\sqrt[n]{u^n+x}=u+\frac{x}{nu^{n-1}}-\frac{\frac{n-1}{2}x^2}{n^2u^{2n-1}+n\left(\frac{2n-1}{3}\right)u^{n-1}x}$$

expressaõ muito mais exacta que a precedente, e tambem mais exacta que as de *Halley* em todos os casos, em que x he positivo.

§. VII.

Do mesmo modo supponDo $m=3$ será a nossa fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}=\frac{a'''+(a'a'''-a^{IV})x+(a''a'''-a'a^{IV})x^2+(a'''a'''-a''a^{IV})x^3}{a'''-a^{IV}x}$$

ou $\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}=1+a'x+a''x^2+\frac{a'''a'''x^3}{a'''-a^{IV}x}$; e por consequencia substituindo por a'; a''; a'''; e a^{IV} os seus valores será

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}=1+\frac{x}{nu^n}-\frac{(n-1)x^2}{2n^2u^{2n}}-\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{3}\right)x^3}{n^3u^{3n}+n^2u^{2n}\left(\frac{3n-1}{4}\right)x}$$

e multiplicando por u

$$\sqrt[n]{u^n+x}=u+\frac{x}{nu^{n-1}}-\frac{(n-1)x^2}{2n^2u^{2n-1}}+\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{3}\right)x}{n^3u^{3n-1}+n^2\left(\frac{3n-1}{4}\right)u^{2n-1}x}$$

valor ainda mais exacto que o precedente.

§. VIII.

Procedendo do mefmo modo fe achariaõ as aproximações relativas a todos os outros valores particulares de m; porém fem paffar mais adiante já fica evidente, que chamando S a fomma dos primeiros m termos da ferie rezultante do defenvolvimento de $\sqrt[n]{u^n + x}$ ferá geralmente falando

$$\sqrt[n]{u^n + x} = S \pm \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{(m-1)n-1}{m}\right)x^n}{n^m u^{nm-1} + n^{m-1}\left(\frac{nm-1}{m+1}\right)u^{(m-1)n-1}x}$$

fervindo o final + do fegundo termo quando m for numero impar > 1, e o final − quando m for numero par, ou 1.

§. IX.

Se em vez de applicarmos o noffo methodo a fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2 u^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)x^3}{2.\,3.\,n^3 u^{3n}}$$

$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{2.\,3.\,4.\,n^4 u^{4n}} + \&c.$$

o applicarmos a fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{n(u^n + x)} + \frac{(n+1)x^2}{2n^2(u^n + x)^2} + \frac{(n+1)(2n+1)x^3}{2.\,3.\,n^3(u^n + x)^3}$$

$$+ \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)x^4}{2.\,3.\,4.\,n^4(u^n + x)^4} + \&c.$$

entaõ fuppondo na fórmula do §. II. $m = 1$, e multiplican-

cando por u acharemos

$$\sqrt[n]{u^n+x}=u+\frac{u\,x}{n\left(u^n+x\right)-\left(\frac{n+1}{2}\right)x}$$

Expressaõ que fazendo as multiplicações indicadas se reduz a

$$\sqrt[n]{u^n+x}=u+\frac{u\,x}{n\,u^n+\left(\frac{n-1}{2}\right)x}$$

que he a mesma que achamos no §. V.

§. X.

Suppondo $m=2$, e fazendo a multiplicaçaõ por u acharemos

$$\sqrt[n]{u^n+x}=u+\frac{u\,x}{n\left(u^n+x\right)}+\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)u\,x^2}{n^2(u^n+x)^2-n\left(\frac{2n+1}{3}\right)(u^n+x)\,x}$$

Formula mais exacta que a precedente, e tambem mais exacta que as de *Halley* em todos os casos, em que x he negativo; e que por tanto combinada com a do §. VI. nos poem em estado de podermos sempre obter aproximações mais exactas, e com mais facilidade, do que pelas fórmulas do Geometra Inglez.

§. XI.

Se supozermos $m=3$ acharemos

$$\sqrt[n]{u^n+x}=u+\frac{u\,x}{n(u^n+x)}+\frac{(n+1)u\,x^2}{2n^2(u^n+x)^2}+\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2n+1}{3}\right)u\,x^3}{n^3(u^n+x)^3-n^2\left(\frac{3n+1}{4}\right)(u^n+x)^2\,x}$$

e em geral se reprezentarmos por S a somma dos primeiros m termos da serie

$$u + \frac{u\,x}{n\,(u^n + x)} + \frac{(n+1)\,u\,x^2}{2\,n^2\,(u^n + x)^2} + \frac{(n+1)\,(2\,n+1)\,u\,x^3}{2.\,3.\,n^3\,(u^n + x)^3} + \text{\&c.}$$

acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = S + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2\,n+1}{3}\right) \cdots\cdots \left(\frac{(m-1)\,n+1}{m}\right) u\,x^m}{n^m(u^n+x)^m - n^{m-1}\left(\frac{m\,n+1}{m+1}\right)(u^n + x)^{m-1}\,x}$$

§. XII.

Por meio desta fórmula, e da outra que achamos no §. VII. se póde levar a aproximaçaõ das raizes a qualquer gráo de exacçaõ, que se pertender; mas ainda mesmo servindo-nos só da primeira fórmula particular

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u\,x}{n\,u^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x}$$

se póde conseguir esta vantagem repetindo o calculo; isto he, chamaudo u' ao valor achado por esta primeira aproximaçaõ, fazendo $u^n + x - u'^n = x'$; e calculando esta nova expressaõ

$$\sqrt[n]{u'^n + x'} = u' + \frac{u'x'}{n\,u'^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x'}$$

e se ainda esta aproximaçaõ se naõ julgar bastante, se pode repetir outra semelhante operaçaõ, chamando u'' a este novo valor achado; fazendo $u'^n + x' - u''^n = x''$, e calculando esta expressaõ

$\sqrt[n]{}$

$$\sqrt[n]{u''^n + x''} = u'' + \frac{u'' x''}{n u''^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x''}.$$

e assim successivamente

§. XIII.

Se pelo decurso d'estas operações se chegar a alguma expressaõ, em que o segundo termo do denominador seja huma quantidade muito pequena, o Calculo se abreviará, e simplificará consideravelmente omittindo-o: por exemplo, se logo na segunda operaçaõ acharmos, que a quantidade $\frac{n-1}{2} x'$ he muito pequena, poderemos omittilla, e por este modo reduziremos o segundo membro da expressaõ

$$\sqrt[n]{u'^n + x'} = u' + \frac{u' x'}{n u'^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x'}$$

a $u' + \frac{x'}{n u'^{n-1}}$; quantidade muito mais facil de calcular; pois que u' he o valor achado pela primeira approximaçaõ, e a quantidade $\frac{x'}{n u'^{n-1}}$, que se lhe deve accrescentar, ou tirar, segundo x' for positivo, ou negativo, facilmente se calcula por meio dos Logarithmos. Querendo continuar a approximaçaõ chamar-se-ha u'' ao valor ultimamente achado, e fazendo $u'^n + x' - u''^n = x''$ lhe accrescentaremos ou tiraremos a quantidade $\frac{x''}{n u''^{n-1}}$ segundo x'' for positivo, ou negativo, e assim continuaremos successivamente até se ter obtido a approximaçaõ, que se pertender. Esta mesma repetiçaõ de

calculos ſe pode praticar com qualquer das outras fórmulas mais exaćtas, de que fizemos mençaõ em os §. §. VI., e VII.; e por meio d'ellas ſe obterá a approximaçaõ pertendida, ſem que o Calculo ſe repita tantas vezes.

§. XIV.

He claro, que ſe em vez de termos ſuppoſto

$$FX = \frac{1 + A^{1\prime}x + A^{2\prime}x^2 + A^{3\prime}x^3 + \cdots + A^{m\prime}x^m}{1 + Bx}$$

tiveſſemos ſuppoſto FX igual a outra qualquer Funcçaõ racional, em cujo denominador entraſſem mais de hum coefficiente indeterminado, teriamos achado outras expreſſões para o valor approximado do limite da ſomma dos termos da ſerie, de que ſe trataſſe, ainda mais exaćtas em quaſi todos os caſos, e que nos dariaõ occaſiaõ a novas reflexões, e nos manifeſtariaõ meios faceis de ſommar por approximaçaõ outras ſeries, além das que ſervem para a determinaçaõ das raizes irracionaes; mas eſte trabalho além de naõ ſer difficil depois dos paſſos, que até aqui temos dado, nos obrigaria a ſer demaſiadamente extenſos.

ME-

MEMORIA

Sobre huma especie de petrificaçaõ animal.

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

Flumen habent Cicones, quod potum saxea reddit
Viscera, quod tactis inducit marmora rebus.
Ovidio nas Metamorfoses. l. XV. v. 313.

NAõ he tudo fabuloso, o que se acha escrito nos Poetas; mas como a sua arte lhes dá privilegio para fingir, e dizer o que naõ he, precisamos de muita cautela, e muita critica, antes de dar crédito ás noticias, que nos communicaõ: muito mais quando estas trataõ de materias extraordinarias. O Poeta Ovidio na elegante obra das Transformações, em que se apurou em descrever com assaz naturalidade as mesmas couzas, que naõ saõ conformes á natureza, nos dá huma noticia, que posto que exotica, bem pode ser natural. Diz elle, que no Paiz dos Cicones (povos da Thracia, hoje pertencentes á Turquia) corre hum rio, que transforma em pedra os animaes, que allí bebem, e outras couzas, que tocaõ nas suas agoas. Plinio o Naturalista nos confirma em parte esta noticia, naõ só do rio dos Cicones, mas de outros varios, em cujas agoas diz, que os páos, ramos, e folhas de arvores se convertem em pedra. E ainda que Plinio o naõ affirma de viventes sensitivos, eu o tenho visto, e experimentado d'estes (assim como o refere Ovidio) em hum rio de Cochinchina, onde naõ todos os animaes, mas sim varias especies de Caranguejos, que bebem, e se banhaõ nas suas agoas, ficaõ inteiramente transformados em pedra dura.

Plin. l. II. c. 103.

Os Gabinetes dos curiosos, e amantes da Sciencia Natural se achaõ hoje providos d'estas maravilhas, ou raridades, que

que por taes se fazem estimaveis; mas que já se naõ pode duvidar, que saõ effeitos da Natureza. No que toca ao Reino Vegetal, se vem allí troncos, ramos, folhas, espigas de flores, e fructos de diversas arvores, principalmente de diversos Filices inteiros, e outros generos pertencentes á Cryptogamia: dando a todos estes o nome generico de *Phytolithos*. No que pertence ao Reino Animal, se vem nos mesmos Muséos muitos petrificados de insectos, de vermes, de peixes, de amphibios, de aves, de animaes quadrupedes, e ainda de homens. D'estes, que saõ os mais maravilhosos, se achaõ alguns citados por Linneo na terceira parte do *Systema Naturae*, e entre elles hum descripto por Scheuchzero com o titulo, de *Homem testemunha do diluvio*. E nesta materia ainda he mais admiravel, o que refere Helmoncio de huma horda, ou tribu inteiro de Tartaros vagabundos Baskires, sogeitos agora ao Imperio Russiano, que no anno de 1320, diz, fôra transformada inteiramente em pedra, com todo o seu gado, carros, e alfayas, de que ainda permanecem naquelle sitio as estatuas de marmore mais naturaes, e mais conformes ao seu prototypo, que jámais deu á luz Esculptor algum.

Lin. Syst. nat. p. III. p. 130.

Helm. *Tract. de Lithiasi.* c. I.

Porém eu duvido muito de taõ memoravel successo, naõ porque o tenha por impossivel; pois os mesmos agentes naturaes, que tem força para petrificar hum vivente, a tem da mesma sorte para muitos, em quem achem as mesmas disposições: mas como se pode crer, que se ache huma tal raridade nos dominios da Russia ha mais de quatro Seculos, sem que ao menos parte d'ella se tenha conduzido para o Muséo de Petersburgo? Desde o tempo do Çzar Pedro o Grande até ao presente saõ excessivas as diligencias, e as despezas, que os seus Augustos Successores, verdadeiros Protectores das Sciencias, principalmente a que hoje taõ dignamente occupa o throno, tem feito em conduzir para a sua Metropole dos lugares mais difficeis tudo aquillo, que pode servir para o augmento d'ellas: e com tudo

do naõ ſei que allí ſe ache algum daquelles Tartaros Baſkires, que ſe achaõ petrificados em grande número nas Obras de Helmoncio. Pelo que deixando caſos, quando menos duvidoſós, vamos expôr hum do meſmo genero, em que naõ ha duvida.

No Reino de Cochinchina corre hum rio pela Provincia de *Gua'ng binh*, que paſſando pela Cidade de *Muòi ko* toma d'ella o nome, chamando-ſe *Soung Muòi ko*, e vai deſembocar no porto *Sâì*, diſtante d'aquella Cidade quatro legoas para o Norte: ficando o tal porto quaſi em 18 gráos de latitude Boreal, e por conſeguinte pouco diſtante dos confins do Reino de Tunkim. Quaſi no meio d'aquella diſtancia ſe alarga o rio, formando hum pequeno lago, ou enſeada, na qual o fundo he de lodo, a agoa ſalgada, e ambas as margens do rio ſaõ cultivadas, e habitadas.

Neſte ſitio, e na altura de oito pés, ou pouco mais, ſe acha ſempre deſde alguns ſeculos até ao preſente grande numero de Caranguejos petrificados, huns na ſuperficie, e outros pouco encravados no lodo, dos quaes eu tenho hoje a honra de offerecer alguns ao ſabio exame da Real Academia, que comigo trouxe da meſma paragem, aonde ſe transformaõ.

Pertencem eſtes ao quadrageſſimo genero do Syſtema Lapidum do Cel. Linneo, em que conſtituem a primeira eſpecie com o nome de *Entemolithus Cancri*, Petrificado de Caranguejo. Dos quatro modos em que, ſegundo Linneo, ſe obſerva a petrificaçaõ, he a que ſe diz *Transſubſtanciaçaõ*, o modo mais proprio e adequado: e eſte he o que ſe pratíca no noſſo *Entemolithus*, no qual o corpo, e natureza de Caranguejo ſe muda, e transforma no corpo, e natureza de pedra. Eſta pedra he denſa, homogenea, pezada, e dura em huns mais que outros, ou ſeja pelo maior, ou menor influxo do agente, que em diverſas occaſiões os transformou, ou, como julgo mais certo, por ter perſeverado mais tempo o tal influxo. Por fora conſervaõ naõ ſómente a fór-

Syſt. Nat. P. III. p. 160.

a fórma de Caranguejo; mas muitas vezes a côr propria da sua casca, ou concha natural: e por dentro tem todos a côr escura de ferro. Muitas vezes se achaõ encrustados, e pegados huns a outros como lodo, que ao mesmo tempo se converteo tambem em pedra menos escura, e menos dura.

Se me perguntarem, a que genero, e especie de pedras pertencem estas, de que fallamos, que dantes fôraõ viventes sensitivos? Responderei, que consideradas sómente pelo que saõ, sem respeito ao que fôraõ, pertencem á 2.ª especie do genero * *Cos* de Linneo, chamada *Cos Quadrum*, pois se achaõ nellas os Caracteres Generico, e Especifico, com que o mesmo Linneo as distingue das outras pedras. E se alguem quizer saber as especies do genero Cancer, que padecem esta transformaçaõ? Digo, que saõ varias, e todas dos *Brachyuros*, nenhuma dos *Macrouros*. E d'aquelles observei com mais frequencia esta mudança na especie 47.ª de Linneo, dita *Cancer Brachyuros Longipes*: e na 52.ª, dita *Cancer Brachyuros Calappa*: talvez por serem estas duas especies mais frequentes na India, como se faz mençaõ no *Musæum de Rumphio*. Naõ he facil o distinguir claramente todas as outras especies: assim porque o lodo, em que estaõ commummente involtos, naõ deixa descobrir adequadamente a fórma, que os distingue, como tambem porque a maior parte d'elles se tiraõ do lodo mutilados, e disformes: principalmente faltos de pernas, que sendo delgadas, e mui frageis, quando formados em pedra se quebraõ facilmente em lhes tocando antes de sahirem da agoa.

* Rumph. Arab. l. I. cap. 38. p. 124. de Ligno petrificato.

Syst. nat. P. III. p. 61.

Syst. nat. P. I. p. 1047.

Parecerá talvez superfluo o fallar eu nesta materia, de que já antes tem tratado homens mui sabios, e instruidos na Sciencia Natural, como fôraõ Gesnero, Rumphio, Scheuchzero, Lesser, d'Argenville, Seba, Grimmio, Bourguet, e outros; mas duvido muito, se algum d'estes Authores assistio, e presenceou (como a mim me succedeo) no lugar em

em que se formáraõ as taes petrificações, ou se pela noticia dos Viajantes fôraõ entendidas do mesmo modo, que eu as vi.

O Doutor Joaõ Jacobo d'Annone, membro illustre da Sociedade Helvetica, dando noticia de alguns Caranguejos petrificados, que tinha em seu poder, e d'antes tinhaõ sido do Muséo do celebre Naturalista Seba, começa dizendo: *Do mesmo nome se póde colligir, que os Caranguejos petrificados saõ Caranguejos, que tendo nascido, e vivido na agoa fôraõ levados para a terra, e mudados em substancia de pedra por meio de varias mudanças, que tem havido no globo terrestre.* Este he tambem o parecer de outros Authores, que elle cita: o qual eu naõ nego, que se verifique em alguma parte: só digo, que naõ se póde admittir geralmente. *Acta Helvet. t. 3. p. 265.*

A origem dos nossos petrificados de Cochinchina naõ só he diversa, mas tambem mais natural, e mais palpavel, sem para isso nos vermos precisados a suppôr alguma mudança extraordinaria no nosso globo, de grandes diluvios, terremotos, ou vulcanos, que talvez naõ houve, nem ha lembrança, que houvesse jámais em Cochinchina.

Os petrificados d'este paiz nem se achaõ nas entranhas da terra, nem nas praias do mar, nem na extençaõ de todo aquelle rio, mais que sómente na pequena superficie de huma milha á flor da terra, e debaixo da agoa, e isto perennemente por alguns Seculos, sem notavel diminuiçaõ, por mais que os pescadores os tirem para terra: logo he indubitavel, que allí mesmo successivamente se formaõ, e naõ saõ levados para allí de outra parte por revoluçaõ alguma extraordinaria do globo terrestre. Tambem he indubitavel, que isto naõ succede por virtude alguma lapidífica das agoas d'aquelle rio, que os transforma; pois sendo elle assaz extenço em nenhuma outra paragem se achaõ Caranguejos de pedra, mas sim muitos Caranguejos vivos, que pescaõ, e comem os habitantes.

Daquí se infere, e conhece claramente, que a violencia

cia, que tira a vida, e transforma em pedra aquelles viventes, está no lodo, e no fundo d'aquelle pequeno espaço de rio, aonde se achaõ sem cavar a terra: e tendo elles allí chegado vivos, quando sobem do mar, ou descem com a corrente para o mar, ficaõ naquelle sitio entorpecidos, e duros como he a pedra, em cuja substancia se transformaõ. Esta acçaõ, e mudança, naõ he instantanea; pois se achaõ alguns mais endurecidos, e petrificados que outros: o que parece ser em razaõ do mais, ou menos tempo, em que ficáraõ expostos ao mortal influxo, que lhes destruio a propria natureza, depois de lhes tirar a vida.

Os naturaes da terra pertendem, que a transformaçaõ se faça naquelle tempo do anno, em que os Caranguejos mudaõ a casca; pois he certo, que a mudaõ, assim como as Serpentes mudaõ a pelle: porém, ainda que neste estado se achaõ mais dispostos para receber quaesquer influencias externas, com tudo naõ se póde affirmar isto geralmente de todos; por quanto na maior parte d'elles depois de mudados em pedra, se distingue ainda claramente a casca, ou concha, que os vestía, quando nelles se effeituou aquella mudança.

Arist. *Hist. Anim.* l. VIII c. 17. p. 56.

Para de algum modo percebermos o como se faz a tal transformaçaõ, he necessario advertirmos com o celebre Chimico e Medico Boerhaave, que assim o composto animal, como o de pedra tem por base, e fundamento o mesmo elemento da terra, e que os corpos, que tem este mesmo principio, facilmente se transmudaõ huns em outros. Todo o corpo animal, além da terra, he composto de grande quantidade de partes oleosas, e volateis, que se naõ achaõ na terra simples, nem nas pedras; pelo que, em se exhalando as taes particulas oleosas, e volateis, e restando sómente as fixas, fica logo o corpo animal reduzido a terra, como succede quotidianamente aos cadaveres sepultados.

Boerh. *El. Chim. de terra.* p. 333. vol. 1.

Assim os Caranguejos, a que os vapores d'aquelle sitio petri-

petrificante tiráraõ a vida, ficando logo cubertos, ou estendidos no lodo, perdem naturalmente com o tempo as partes mais subtís, e volateis, proprias do animal, permanecendo as fixas, e terreas: e ajuntando-se a estas as exhalaçóes metallicas, principalmente de ferro, e chumbo, de que ha minas naquella Provincia, ficaõ mais condensadas, mais pezadas, e mais duras que a mesma terra; que estas saõ as propriedades das pedras metallicas, e estas mesmas saõ as das pedras de Caranguejo. Tambem he mui provavel, que as mesmas exhalaçóes metallicas fossem a causa dos Caranguejos ficarem naquelle sitio entorpecidos, e mortos, como tem succedido muitas vezes a alguns homens, que trabalhavaõ em minas. Aos que trabalhaõ nas de ouro em Cochinchina, se lhes endurece muitas vezes o ventre de tal sorte, que parece principio de petrificaçaõ, de que muitos morrem. Porém naõ he possivel o examinar-se com certeza pela Anatomia; por quanto naquellas terras tem por impiedade execranda o abrir hum corpo humano depois de morto.

Bem conheço, que com esta exposiçaõ naõ fica totalmente clara a difficuldade da petrificaçaõ animal; com tudo parece, que explica mais a materia do que a sentença commum, que diz, que hum animal se petrifica, porque se lhe introduz o succo, ou espirito Lapidifico, sem explicar que cousa seja, e como obre o dito espirito: ou a sentença Aristotelica, na qual pela corrupçaõ da fórma antiga de animal se diz gerar-se de novo a fórma de pedra, sem dizer o como: ou finalmente por se lhe introduzir alguma semente de pedra, das que andaõ espalhadas, como as das plantas, por muitas partes, e fazer vegetar a materia, que achasse disposta, na mesma figura, e substancia de pedra: como poderia alguem dizer, seguindo o parecer de Baglivio, Tournefort, e Homberg á cerca da geraçaõ, vegetaçaõ, e sementes das pedras: mas esta sentença, ainda que fosse mais provavel, do que he, nunca poderia admittir-se

nos petrificados animaes, como os nossos, que nunca tem crescimento, nem por conseguinte vegetaçaõ.

Tom. III. p. 274. Dos petrificados de Caranguejos, que se descrevem nas Actas Helveticas, se diz, que naõ se sabe, de que parte do mundo foraõ trazidos para Europa; mas que pela grande semelhança, que tem com os que descreve Rumphio, Kundmann, Bruckmann, e Bourguet, se julga, que vieraõ da China, Japaõ, ou da Costa de Coromandel. Eu que viví 46 annos naquellas terras (excepto o Japaõ) nunca lá ví, ou ouví dizer, que se formasse a tal petrificaçaõ. Por muitas partes da India correm elles com o nome de Caranguejos de Hainan, que he huma Ilha assaz grande do Imperio da China, cujo lado Austral fica quasi na mesma Latitude, em que está situado o porto *Sái* de Cochinchina, aonde se transformaõ os Caranguejos; porém eu fallando com varias pessoas, que assistíraõ na Ilha de Hainan, nenhuma me pôde certificar, que na dita Ilha se faça a tal patrificaçaõ.

Voyag. Tom. 7. p. 269. No 7.º tomo do resumo da Historia das Viagens, diz Mr. de la Harpe, *que os habitantes d'aquella Ilha (Hainan) naõ conhecem hum Lago celebrado de alguns Viajantes, por ter a virtude de petrificar tudo, o que nelle se lança: mas que esta idéa póde vir das petrificações, que saõ communs em Cantaõ.* Eu naõ julgo ser esta a razaõ do engano na noticia dos Viajantes, mas sim a proximidade dos dous lugares, e o julgarem alguns, que a Cochinchina naõ he Reino separado, e independente da China. Eu tenho fundamento para julgar, que a maior parte dos Caranguejos petrificados, ou talvez todos os que se achaõ espalhados por diversos Reinos da Asia, e tambem da Europa, tem a sua origem naquelle Lago do Rio de *Mudi ko* de Cochinchina; por quanto tenho visto, que assim os Navios da China, como os Européos os compraõ allí em grande quantidade, e por baixo preço, e depois os exportaõ para a China, e outras partes, aonde se servem d'elles na Medicina.

E

E qual he o ſeu uſo, ou virtude? Por experiencia de muitos annos poſſo affirmar, que ſaõ hum excellente Abſorbente, e em nada inferior ao *Oculi Cancrorum* das Officinas. Daõ-ſe interiormente nas febres, nas dyſenterias, nas diarrhéas, nos tenesmos, nas dores, e azías do eſtomago, nos pleurizes, nos accidentes hyſtericos, e epilepticos, principalmente quando procedem do acido: e externamente ſaõ uteis nas inflamaçóes, e apoſtemas. De ſorte que, ſendo taõ proveitoſo o ſeu uſo para conſervar a vida dos homens, naõ ſe póde julgar por meramente eſpeculativo, e ocioſo o ſeu conhecimento, que entaõ ſeria contra o fim, que eſta Real Academia nos propoem para ſeguir no ſeu judicioſo apophthegma:

Niſi utile eſt, quod facimus, ſtulta eſt gloria.

EXA-

EXAME PHISICO, E HISTORICO.

Se ha, ou tem havido no mundo diversas especies de homens?

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

Fecitque ex uno omne genus hominum inhabitare super universam faciem terrae. Act. Ap. C. XVII.

Lida em 25 de Janeiro de 1784.

TENDO o celebre Linneo concebido a vasta idéa de expôr por novo, e claro methodo todas as producções naturaes sublunares, que se comprehendem nos tres reinos, Animal, Vegetal, e Mineral, começou pelo primeiro, e o dividio em seis Classes. Na 1.ª Classe, dita *Mamalia* (a que os antigos chamavaõ *animaes perfeitos*) collocou na primeira ordem aquelles, a que por excellencia chamou *Primates.* E dentre estes escolheo o Homem, e o poz por principio, e cabeça de todo o creado, e juntamente da sua obra; por ser o Homem o genero mais nobre de todos, que sendo feito conforme á imagem, e semelhança do Creador, leva maior vantagem a todos os viventes sensitivos, do que estes excedem os vegetaveis, e os vegetaveis os mineraes.

Linn. Syst. Nat. T. I. pag. 28.

Como caracter generico, distinctivo do Homem, lhe assignou o discurso, e reflexaõ, que se denota no dito do Sabio Legislador de Athenas Solon *Nosce te ipsum.* Pois seria taõ chimerico hum Homem, que naõ fosse racional, como o seria hum animal, que naõ fosse sensitivo, ou huma planta, que naõ fosse vegetavel. E para proceder coherente no seu Systema, em que distingue tambem os diversos generos de animaes da primeira ordem, pelo diverso numero, fórma, e disposiçaõ dos dentes, propoz Linneo a que lhe pareceo mais propria do genero humano: ain-

ainda que nesta bem pouco se differença o Homem dos monos, e bugios; pois tem commummente huns, e outros o mesmo numero, e fórma de dentes: e sómente as prezas dos bugios saõ de ordinario hum pouco apartadas dos incisores de ambas as partes, e em alguns maiores. Porém differe infinitamente d'elles o Homem no racional, de que dá provas evidentes no fallar com hum discurso seguido, e juntamente na Policia, com que vive, no bem Moral, que estima, e no conhecimento, que tem do Creador, e de outros entes incorporeos: o que nunca jámais se vio em bruto algum.

Além da 1.ª especie de Homens, a que Linneo chamou *Homo Sapiens*, e *Homo diurnus*, poem logo immediatamente outra 2.ª especie, a que chama *Homo Troglodytes*, *Homo Nocturnus*, e tambem *Homo Sylvestris*, *Orang-Outang*, e *Kakurlacko*. Diz, que esta 2.ª especie de Homens se acha nos confins de Ethyopia, segundo Plinio: e tambem nas Ilhas de Java, Amboino, e Ternate, e no monte Ophir de Malacca, segundo Bontius, e outros Authores. Linnæus Ibi. p. 33.

Faz logo a descripçaõ d'elles nesta fórma: que tem o corpo branco com os pêlos tambem brancos, e retorcidos: que anda levantado em dous pés, e na estatura he ametade menor que os homens ordinarios: que tem os olhos redondos com as pupillas da côr de ouro, e as palpebras cahidas, e tremulas: que olha de esguelha, e tem a vista mais clara de noite que de dia: que as mãos, deixando cahir os braços, lhe chegaõ aos joelhos: que vivem até 25 annos de idade, e que fallaõ por assobios. Finalmente diz, que, havendo de dar credito aos Viajantes, os taes Homens consideraõ, e discorrem: e crem, que este mundo fôra creado para elles, no qual para o futuro haõ de vir a dominar.

Ora este modo de narraçaõ parece-me ter seu ar de fabula. Se aquelles Homens, ou animaes só fallaõ por assobios, sem voz articulada, quem os podia entender? Como po-

poderaõ explicar, que o mundo foi creado para elles? Ou que elles haõ de vir a ser Senhores do mesmo mundo?

Nem basta para acreditar semelhante extravagancia (de que o mesmo Linneo nas notas, que accrescentou, mostra duvidar), que o dicesse Kjoep, ou qualquer Viajante pouco veridico, ou pouco exacto. E muito mais quando as relações, que fallaõ nesta materia, naõ concordaõ entre si: descrevendo varias castas de animaes, ou de Homens de regiões mui distantes, e entre si mui differentes. As propriedades raras, e exoticas de huns, e outros confundio, e ajuntou Linneo na descripçaõ, que nos inculca desta sua 2.ª especie de Homens. Esta para maior clareza reduziremos a trez Classes, ou castas de individuos, em que ellas se observaõ.

Syst. Nat. Tom.I.p.33.

A 1.ª he dos Troglodytas, naçaõ de Homens da mesma especie que nós, ainda que mui barbaros nos costumes. A 2.ª naõ he naçaõ particular; mas sim muitos individuos, que espalhados por diversas nações, ainda de pretos, nascem branquissimos, com os cabellos, e pêlos todos brancos, e retorcidos, e com os olhos da côr de fogo, e tremulos, que vem melhor de noute, que de dia; e por esta razaõ se podem chamar Nocturnos; mas na realidade saõ Homens, e filhos de Homens como nós: sómente com aquellas qualidades phisicas accidentaes, que os enfraquecem; pelo que de ordinario vivem pouco.

A 3.ª he huma casta (ou talvez varias) de animaes, que se encontraõ em diversos Reinos da Asia, e da Africa, e a que os Viajantes comummente chamaõ *Bugios*, e os naturaes da India chamaõ *Orang-Outang*, que quer dizer *Homem do mato*, e tambem *Kakurlacko*; mas na Africa saõ chamados *Pongo*, ou *Jocko*. Todos estes, ainda que differentes entre si na côr, e no tamanho, como tambem em algumas feições do corpo, tem com tudo muita semelhança na figura com o Homem; porém nunca se vio algum, que fallasse, nem desse signaes de raciocinio, ainda sendo domesticado, e creado desde pequeno entre os Homens; pelo

que

que naõ póde haver duvida, que saõ brutos, e naõ verdadeiros Homens, ou da nossa, ou de outra especie; por lhes faltar o caracter essencial, e generico do Homem: *Nosce te ipsum.* Vamos por partes, começando pela primeira.

Dos antigos Trogloditas fallaõ naõ sómente Plinio, mas tambem Strabo, Pomponio Mela, e outros Authores mais modernos, que Herodoto, de quem parece que houvêraõ principalmente esta noticia. Herodoto historiador grave, e Pai da Historia, como lhe chamou *Cicero*, diz no Livro 4.° das suas antiguidades, *que de todas as nações conhecidas os Troglodytas de Ethyopia saõ os mais ligeiros na carreira: que se sustentaõ de serpentes, e lagartos, e outros animaes amphibios: que usaõ de Lingoa particular, que naõ tem semelhança com alguma outra, e que mais se parêce com os guinchos, ou silvos dos morcegos.* Com pouca mudança de termos nos communica a mesma noticia Pomponio Mela: *Troglodytæ nullarum opum domini strident magis, quam loquuntur, specus subeunt, aluntur que Serpentibus.* Strabo na sua Geografia das Nações do Mundo confessa, que elles costumaõ habitar em covas: que d'este costume procede o chamarem-lhes *Troglodytas*: e que saõ descendentes dos Arabios, que habitaõ da outra parte do Mar Roxo: *Quia enim terram subeant multi Troglodytas, quasi antricolas dixere: Hi ex Arabibus sunt, qui ad alteram sinus Arabici partem vergunt ad Ægyptum, et Æthyopiam.*

Herod. in Melpomene.

Pomp. Mela L. I. cap. 8.

Strabo *de Situ orbis* L. I. p. 39.

Plinio citado por Linneo, diz no L. V. Cap. 8.° da sua historia natural: *que os Troglodytas fazem covas, que saõ as casas, em que vivem: que o seu comer he carne de Serpentes: que daõ gritos, sem voz distincta: e que naõ podem communicar-se pela falla.*

Plin. *Hist. Nat.* L. V. cap. 8.

Assim tendo Herodoto affirmado sómente, que tem Lingoa particular, que naõ he semelhante a alguma outra, Plinio accrescentou expressamente, que naõ podem communicar-se pela falla, *adeo Sermonis commercio carent.* Mas parece, que se esqueceo do que tinha já dito, quando no

Liv.

Liv. VI. cap. 29. fallando do lugar *Abulition* fundado pelos servos fugitivos dos Egypcios, diz, que ha allí hum grande emporio dos Troglodytas, e tambem dos Ethyopes: *Maximum hic Troglodytarum emporium, etiam Æthyopum.* Todos sabem, que hum grande emporio he huma grande Cidade negociante, huma grande feira, ou hum grande Lugar de commercio, aonde concorre muita gente para tratar entre si da venda, e compra de diversas fazendas. E póde-se fazer este vasto commercio *maximum emporium* sem se communicarem as pessoas por palavra, ou por escrito, por si mesmo, ou por interprete? De que servia pois este grande emporio aos Troglodytas, se elles naõ se communicavaõ pela falla?

Plin. L. VI. c. 29.

Plin. L. XXXVII. c. 8.º

Mais. No cap. 8.º do Liv. XXXVII, que he o ultimo, refere o mesmo Plinio, que no Mar Roxo, entre as Costas de Abyssinia, e Arabia está situada huma Ilha chamada *Topazon*, aonde se achaõ, e d'ella tiraõ o nome as pedras, que se estimaõ com o nome de Topazios: que estando muitas vezes a tal Ilha encoberta com a nevoa he mui difficil de achar aos navegantes, que a buscaõ, como saõ os Troglodytas, em cujo idioma o nome da Ilha *Topazin*, significa buscar *Topazin enim Troglodytarum lingua significationem habere quaerendi.* Com que temos já os Troglodytas com Lingoa, e vozes articuladas, como os outros Homens, qual he a palavra *Topazin*, que se percebe, e pronuncia mui bem por outras nações.

Muito bem a entendia, e fallava a Rainha Cleopatra do Egypto, naõ obstante, que a sua conversaçaõ era mais de corteza, que de barbara; pois d'ella refere Plutarcho na vida de Marco Antonio, que se communicava com os Troglodytas immediatamente sem interprete. Donde se faz evidente, que os Troglodytas tinhaõ sim hum idioma proprio, mas racional, e capaz de ser ouvido, e attendido nas Côrtes mais polidas do mundo, qual era a Metropole do Egypto.

O viverem aquelles Homens em covas, e serem ligeirissimos na carreira, se vê tambem em outros povos de Afri-

Africa, e de America; mas isto naõ basta para os desterrar da commum especie de Homens. O comerem cobras, e lagartos ainda he menos singular. Muitos Européos na India, e creio, que tambem em outras partes, usaõ na meza com especial gosto de huma especie de lagartos, que allí chamaõ *talagoyas*, e outros com Linneo lhes chamaõ *Iguanas*. Em muitas partes da Asia comem os naturaes a carne do maior lagarto, que ha, e que naõ differe do Crocodilo de Egypto. Para este fim me trouxeraõ huma vez amarrado hum de mediana grandeza, o que eu lhes agradecí, sem aceitar o presente. Huns póvos pretos chamados *Mois*, que habitaõ nas altas serranias, entre Cochinchina, e os Laos, vaõ muitas vezes em ranchos á montaria das serpentes nos dezertos: e a mim me certificáraõ, que achaõ melhor gosto em comer as cobras, do que as gallinhas, que elles criaõ em abundancia.

Abr. des Voyag. T. X. f. 307. e T. XI. f. 287. e T. I. f. 164.

Syst. Nat. T. I. pag. 366.

Além de que os Troglodytas, se he que usavaõ d'este mantimento, que nos mete horror, naõ usavaõ tanto d'elle quanto da caça dos Elefantes. O mesmo Plinio o confessa, declarando a destreza, e valor, com que segurando-se com huma maõ na cauda do Elefante, que perseguiaõ á caça, subiaõ logo por detraz d'elle, e firmando os pés na coxa da perna do mesmo animal, davaõ golpes com huma machadinha, que tinhaõ na maõ direita, e cortavaõ os nervos, ou tendões da outra perna do Elefante; com que, ficando coxo o animal, o matavaõ facilmente, e o comiaõ: *Troglodytæ contermini Æthyopiæ, qui solo hoc venatu (elephantum) aluntur. &c.*

Plin. L. VIII. c. 8.

Eu naõ tenho achado em algum author, que os Troglodytas fossem ametade mais baixos que nós, nem até agora consta com certeza, que haja no mundo naçaõ alguma taõ pequena. Dos Lapões do Norte, e dos Indios Esquimaux da America se affirma, serem comumente de baixa estatura; mas naõ tanto, que naõ excedaõ 3 pés de alto. Tambem naõ tenho lido, que os Troglodytas tivessem os

braços mais compridos, que o comum dos Homens. Bem póde ser, que a natureza por acaso distinguisse alguns d'elles com aquelle excesso, que deo nome a Artaxerxes Longimano Rey da Persia. Além disso naõ percebo como aquelles póvos de Ethyopia fossem brancos; pois tendo-se averiguado, que todos os póvos de Ethyopia saõ de côr mais, ou menos escura, o fazer o Homem Troglodyta branco seria *Æthyopem dealbare*.

L. VI c. 29. nota b. Hom. *Odyss.* L. IV. Os Comentadores de Plinio notaõ, que os Troglodytas, aquem Homero na sua Odysséa chamou *Erembus*, saõ hum povo dos Abexins na Ethyopia alta, que fica proximo ao Mar Vermelho. Nos tempos modernos se chama o paiz dos *Barnágas*, que nos mappas se vé situado em 14 gráos de Latitude Boreal, junto ao Reino de *Tigré*, que he huma Provincia do Imperio Abexim.

No meio do Seculo 16.° por petiçaõ do Emperador de Ethyopia Claudius, feita á Corôa de Portugal, com promessa de se reduzir aquelle Imperio á Igreja Catholica (pois era, e ainda he Scismatico) fôraõ mandados áquellas terras naõ só Missionarios, e Bispos; mas tambem hum soccorro de 400 Soldados Portuguezes, com o seu Capitaõ General D. Chistovaõ da Gama, que allí obráraõ maravilhas de valor em defença da Religiaõ Catholica, e do Monarcha Abexim, que os pedíra. Com tudo achando-se as historias Portuguezas enriquecidas de noticias mui raras d'aquellas terras por meio dos seus naturaes, que lá assistíraõ por dilatados annos, naõ se lê nellas declaraçaõ, ou prova alguma convincente ácerca d'aquelles Homens, que se suppoem de diversa especie, com os quaes, se os houvesse, teriaõ tratado, quando menos os Missionarios, que assistíraõ no Reino de Tigré, confinante com o paiz dos Barnágas, e convertêraõ nelle muitas almas com a protecçaõ, e ajuda do Vice-Rey Abexim, que era mui zeloso Catholico.

Ludolph. *Hist. Æth.* L. I. c. 14 n. 102. Leutolff na erudita historia, que compoz de Ethyopia, julga, que os Troglodytas naõ saõ differentes de huns póvos, que

que nas Cartas dos Missionarios Catholicos do Imperio Abexim saõ chamados *Sankdlas*, e se diz d'elles, que andaõ nús, e comem ratos, e serpentes. O mesmo Author he de parecer, que os negros Hottentotes do Cabo de Boa Esperança procedem da mesma naçaõ. E com tudo he hoje constante, que todos saõ Homens da nossa mesma especie, ainda que a Lingoa, que fallaõ, tem hum tom dessemelhante ao de todas as outras, e elles mesmos tem alguma differença nas feições do corpo; e huma distancia enorme na barbaridade de costumes, com que se criaõ.

Visto que as principaes propriedades do *Homo Troglodytes* de Linneo, naõ se achaõ na propria naçaõ dos Troglodytas, vamos ver se as descubrimos em outra parte. Isigonus de Nicæa, citado por Plinio diz, que os Albanos, póvos da antiga Scythia, e descendentes de Jasoñ, nascem com os cabellos brancos, e os olhos avermelhados, com os quaes vem melhor de noite, que de dia. Estas propriedades attribue Linneo ao seu *Homo Troglodytes*, a que tambem chama *Homo Nocturnus* por ter melhor vista de noute. Mas estes Homens Nocturnos, e Albanos (que ambos estes nomes lhes saõ proprios) naõ fazem por si huma naçaõ, nem ainda huma familia distincta, segundo a experiencia moderna nos tem ensinado: antes sim se encontraõ espalhados por diversas nações, e nellas procedem de Pais, e de familias, que naõ tem as mesmas propriedades. Apud Plin. L. VII. c. 2.

Eu, antes de ir para a India, vi nesta Cidade huma pessoa, que parecia ter 10, ou 11 annos de idade. Passados alguns annos vi outra em Macáo, que poderia ter 15. E ultimamente vi a terceira em Cochinchina de pouco maior idade. Todas estas trez pessoas eraõ de côr alvissima; mas summamente desmaiada, como a cal, ou alvaiade. Tinhaõ os cabellos, e mais pêlos do corpo, totalmente brancos: as pupillas dos olhos, que abriaõ com difficuldade de dia, eraõ vermelhas, e luzentes, com alguma semelhança aos olhos da Coruja; pelo que viaõ com mais facilidade de noute, que

de

de dia, cuja luz os obrigava a pestanejar com frequencia. O mais singular he, que a pessoa, que vî em Macáo, era nascida em Timor de Pais pretos, como saõ todos os naturáes d'aquella Ilha.

Passando despois ha trez annos por Moçambique na Africa, me affirmaraõ alli pessoas de credito, que entre os Cafres d'aquella Costa se achaõ tambem alguns individuos semelhantes a seus Pais na estatura, e outras feições, mas diversos na côr branca da pelle, e pêlos, que tinhaõ retorcidos, o que naõ se observa nos que saõ Filhos de Homens brancos: e todos com as mesmas propriedades de olhos vermelhos, e vista nocturna.

Abr. des Voyag. T. IV. c. 213, e T. XII. c. 438.

Os mesmos, e da mesma sorte differentes do comum dos Homens, tem encontrado os Viajantes na Costa Occidental de Africa, e Reino de Congo: como tambem nas Ilhas de Amboino na Asia, e no isthmo de Panamá na America, aonde os Hespanhoes os chamaõ Albinos. De sorte que estes fenomenos, e desvios das leys geraes da natureza naõ saõ dos mais raros. Com tudo sendo huma mudança, ou variedade, que naõ he transcendente de algum principio constante, mas sim do temperamento accidental, pela diversa combinaçaõ dos humores, naõ se póde dizer, que estes individuos formaõ huma especie de Homens diversa da nossa.

Despois de observarmos os paizes dos Troglodytas, e Albanos, Homens Nocturnos, passemos a dar vista dos *Orang-Outangs*, Homens do matto. Assim saõ elles chamados em algumas partes da India. Do que naõ se deve inferir, que os Indios os tem por verdadeiros Homens; mas sim por verdadeiros brutos, que com figura de Homens habitaõ nos mattos. Hum retrato, e hum cadaver de Homem tambem se dizem vulgarmente Homem pintado, e Homem morto, e com tudo naõ saõ Homens. Este naõ o he, porque naõ tem já a alma racional, principal constitutivo do genero humano: aquelle muito menos, por naõ ter a alma, nem o corpo, mas só-

men-

mente huma ſombra, e ſemelhança de homem. Eſta ſemelhança, e figura exterior, he unicamente a que nos pertende perſuadir, que o *Orang-Outang* he Homem; mas eſta meſma ſemelhança he muito menos propria, e adequada no *Orang-Outang*, que no cadaver, ou na pintura.

Nem me digaõ, que naquelle, além da grande ſemelhança na figura, ſe acha tambem a vida, com que ſe move, ſente, e conhece, como os Homens; pois o modo de vida, e conhecimento, que os Eſcritores mais exactos tem obſervado no *Orang-Outang*, he comum, e naõ ſuperior ao de outros animaes: e com tudo ſe diz d'eſtes, que ſaõ viventes ſenſitivos, e naõ racionaes. Logo ſegue-ſe, que o unico motivo, que nos poderia induzir, e enganar para o ter por Homem á primeira viſta, he ſómente a grande ſemelhança, que tem com a figura humana.

Jacobo Boncio, Medico da Companhia Hollandeza em Batavia na Java, he citado por Linneo como teſtemunha de viſta para prova da ſua nova eſpecie de Homens. Eſte Author, que aſſiſtio muitos annos na India, diz, *que elle víra allí varios Satyros, chamados* Orang-Outangs, *de ambos os sexos, que andavaõ direitos em dous pés; e principalmente hum do sexo feminino, que mostrava ter tanta vergonha á vista de Homens desconhecidos, que cubria a cara com as mãos, chorava, e dava gemidos com taes expressões das paixões humanas, que ſe poderia dizer, que ſó lhe faltava a falla para ſer mulher.* Com tudo elle naõ ſe attreve a affirmar, que o era, antes pelo contrario a chama Satyro, e monſtro. Jac. Bont. Hiſt. Nat. L. V p. 84.

Mirabile monstrum
Humanâ ſpecta facie; tum moribus illi
Assimile in gemitu, tum fletibus ora rigando.

E eſſas meſmas demonſtrações, que Boncio lhe attribue a pejo, e vergonha, com maior razaõ ſe devem attribuir a medo, e eſpanto, como eu tenho obſervado com outros animaes. Além de que, ſe aquella minina Satyra de Boncio

era de natureza taõ vergonhosa, com grande injuria, e muita impropriedade a representa o Author na estampa do seu livro, em figura taõ descomposta, que facilmente causaria pejo á mais barbara naçaõ do mundo.

Buff. T. IV. pag. 279. O sabio Conde de Buffon, que escreveo com muita exactidaõ, e ingenuidade a Historia Natural dos Animaes, diz, que elle vio, e observou muitas vezes em París hum *Orang-Outang* vivo, de dous pés, e meio de altura, o qual nem fallava, nem se dava a entender por assobios, nem fazia cousa alguma de maior habilidade, que hum caõ bem instruido naõ podesse fazer. Qual era logo o seu discurso, a sua falla, e a sua intelligencia racional? Diz mais, que se differença em quasi tudo da descripçaõ, que d'elle nos dá Linneo; pelo que duvída muito da verdade da tal descripçaõ, como tambem da existencia do objecto d'ella o Homem Nocturno: e depois accrescenta, que naõ julga demasiado o exame escrupuloso, e dilatado, que fez de hum Ente, que debaixo da figura de Homem, naõ he toda via mais, que hum Animal.

Dict. of Arts and Sciences. O Diccionario Inglez das Artes, e Sciencias os tem por verdadeiros brutos, e como taes os descreve na palavra *Monkey*, e traz a sua figura na Lamina 182, como tambem a do Satyro conhecido por Plinio, e outros Escritores Romanos, e Gregos, que tambem tem muita semelhança com o Homem.

Hum Capitaõ Inglez, com quem fiz viagem pelo Estreito de Malaca, me contou, que nos montes, que ficaõ para o Sudoeste, trez dias distantes d'aquella Cidade, se achaõ estes viventes, que parecem ser Homens: que naõ só andaõ sempre em dous pés levantados; mas que tem todos os membros proporcionados. Que por serem mui medrosos, e fugirem com extraordinaria ligeireza, nunca se pôde apanhar algum. Accrescentou, que se suspeitava serem descendentes de alguns naturaes da Cidade, que tinhaõ fugido para os montes no anno de 1640 por occa-

siaõ

fiaõ da guerra, em que os Hollandezes se apoderáraõ de Malaca. Porém esta conjectura naõ parece verosimil; por quanto agora se diz, que elles naõ fallaõ lingoa alguma, e fallariaõ sem duvida a Lingoa Malaia propria de seus ascendentes, se fossem d'elles nascidos, e criados com elles naquelles montes. O que parece mais certo he, que elles saõ os mesmos *Orang-Outangs*, que Linneo diz, habitaõ no Monte Ophir de Malaca, e por serem taõ brutos, como quaesquer outros, naõ tem capacidade para discorrer, nem fallar.

O judicioso, e recente Author da Historia de Samatra (na qual Ilha junto ao Rio Passaman, na Costa Occidental, e naõ no continente de Malaca, fica situado o Monte Ophir) escreve, que entre as varias nações, que povoaõ aquella Ilha, se achaõ duas totalmente sylvestres, e retiradas de todo o commercio com as outras, huma chamada *Orang-Cubu*, e outra *Orang-Gugu*, que ambas tem seu idioma proprio, em que fallaõ, e usaõ por comida de tudo o que se cria nos bosques, veados, elefantes, rhinocerontes, javalís, serpentes, e bugios. A segunda casta Orang-Gugu he menos numerosa, mais brutal, e tem o corpo peludo; de sorte, que exceptuando o uso da falla, em pouco mostra differençar-se dos *Orang-Outangs* de Bornéo. Os naturaes da Provincia de *Labun*, na mesma Ilha, indo á caça, tiveraõ occasiaõ de apanhar huma mulher d'estes montanhezes, a qual depois vivendo em povoado se diz, que teve filhos, que nascêraõ tambem peludos como a Mãi; mas na terceira geraçaõ os seus descendentes naõ tinhaõ já pêlos, nem differença alguma dos outros Homens. Esta noticia nos communica M.r Marsden, como havida dos mesmos habitantes de Samatra, de cuja verdade elle naõ quer ser fiador; porém julga, que naõ he mera invençaõ, e sem algum fundamento na realidade do caso, ainda que exagerado nas circunstancias. *It has probably some foundation in truth, but exdggerated in the circumstances.* A mim me parece, que ainda concedendo tudo o referido, aquelles montanhe-

M.r Marsden. *Hist. of Sumatr.* c. 2. pag. 35.

tanhezes de Samatra naõ eraõ *Orang-Outangs* ; porque tinhaõ o uſo ordinario da falla, que ſó podem ter os racionaes: nem tambem eraõ Homens de diverſa eſpecie da noſſa; porque o terem o corpo peludo, e viverem ſelvagens nos bosques, ſó he differença accidental, e naõ eſpecifica.

Eu nos annos, que aſſiſtí em Cochinhina, naõ vi, mas tive comigo alguns tempo hum domeſtico, que tinha viſto no Reino de Champá, pertencente á Cochinchina hum d'eſtes homens do matto, ſemelhante áquelles, que nos Reinos de Congo, e Guiné ſaõ chamados pelos Africanos *Pongo*, e *Baris*. Era todo preto, com poucos pêlos no corpo, da eſtatura ordinaria dos Homens, e com baſtante ſemelhança a elles na proporçaõ dos membros. Andava em dous pés, e moſtrava huma força extraordinaria; pois tendo-lhe amarrado fortemente os braços com cordas, quando o prendêraõ nos montes, com o impeto, que fazia, dando ao mesmo tempo hum ſalto, e hum grito, quebrava facilmente todas as prizoẽs, ſem fazer mal a peſſoa alguma. Naõ fallava, nem dava ſignaes de verdadeiro diſcurſo; pelo que os meſmos naturaes da terra o tinhaõ por bruto, e naõ por Homem.

Eſta caſta de animaes tem ſe propagado muito em varios Reinos da Aſia, e da Africa, principalmente nas terras, que ficaõ de baixo da Zona torrida. Nas terras frias naõ podem abſolutamente viver, e nas temperadas vivem mui pouco: no que moſtraõ ter hum temperamento mui diverſo dos homens, que vivem igualmente em todos os climas; e pelo contrario ſaõ proximos á natureza dos bugios, dos quaes a maior parte das eſpecies ſó podem viver em climas quentes. A razaõ, por que os *Orang-Outangs* ſe naõ vêm com mais frequencia, he porque ainda nos climas quentes, que habitaõ, ſe retiraõ para os montes mais agreſtes, e para os deſertos mais occultos, e menos frequentados dos homens. Alguns, que ſe apanháraõ com laços

fô-

fôraõ conduzidos em navios para Europa; mas os mais d'estes morrêraõ logo na viagem, e hum, ou outro, que chegáraõ a França, Inglaterra, e Hollanda, duráraõ nestas terras mui pouco.

A estatura ordinaria dos *Orang-Outangs* he quasi a mesma que a dos Homens; porém saõ mais encorpados, e alguns agigantados de 6 a 7 pés de altura. Outros muitos saõ ametade menores, como os descreve Linneo, e tambem era d'estes o que vio M.r de Buffon em París. Henrique Grosse na viajem ás Indias Orientaes refere, que o Nababo de Carnate mandára de prezente ao Governador Inglez de Bombay dous d'estes animaes perfeitamente semelhantes aos Homens; mas que só tinhaõ dous pés de alto, e eraõ de côr branca pallida: o que, se assim he, esta relaçaõ naõ se conforma bem com as outras. Quasi todos os outros pela maior parte saõ de côr escura, e tambem alguns ha de côr amarella, como eraõ os que Bosman vio em Guiné. Todos elles naõ tem cauda, nem tem pêlos na cara; mas alguns tem muitos no corpo, principalmente nas costas.

Andaõ commummente em dous pés, e tambem algumas vezes em quatro, segundo outros referem. A cara he chata, e ainda mais o nariz, a bocca mui larga, os olhos encovados, e as orelhas grandes. Os pés saõ tambem chatos, com o dedo pollegar mui curto, e o calcanhar levantado, que naõ póde facilmente chegar ao chaõ, e se parecem mais ás maõs, que aos pés dos Homens, para com elles se segurarem mais facilmente nos ramos das arvores, aonde dormem. Os braços saõ mais compridos, e as coxas das pernas mais curtas, que nos Homens. Estas, e outras feições, e propriedades d'estes animaes se podem vêr com mais clareza nas relações de muitos viajantes, que se achaõ na Historia geral das Viagens, e tambem muitas d'ellas recopiladas na 4.a Parte da Historia Natural de M.r de Buffon.

M.r Tyson, Anatomico Inglez, naõ só vio vivo; mas fez exacta anatomia em *Londres* de hum *Orang-Outang* pe-

queno, que tinha ſómente dous pés de altura, e dous annos de idade. Abrio-o em companhia do celebre Anatomico Cowper, e tendo ambos examinado com a maior attençaõ todos os membros, orgãos, partes internas, e externas d'aquelle corpo exotico acháraõ, que em mais de 30 partes era mais ſemelhante ao corpo dos bugios, que ao dos Homens; porém que em outro maior numero de partes concordava mais com o corpo humano, que com o dos bugios. E do reſultado d'eſtas obſervações deo M.r Tyſon noticia ao publico em hum Livro, que imprimio em Londres no anno de 1693.

Iſto he o que conſta com certeza do exame mais exacto, e das relações mais veridicas, que nos tem dado a conhecer eſtes animaes maravilhozos: creſcendo tanto mais a maravilha, quanto menos vezes ſe offerece occaſiaõ de os vêr. E como as noticias tanto ſe ouvem, ou lem com mais goſto, quanto ſe repreſentaõ mais raras, d'aquí naſceo, que os Authores, e Viajantes accreſcentáraõ, conforme a ſua fantaſia, mais do que viraõ em realidade: do que ſurprendida a ſinceridade do celebre Linneo, eſcreveo o que elle naõ tinha viſto, nem podia vêr; porque o naõ ha.

Do que exiſte, e ſe ſabe com certeza, ſe póde conhecer mui bem, que os *Orang-Outangs*, Homens do matto, e Selvagens, ſaõ na figura do corpo mui parecidos, ainda que naõ em tudo, aos verdadeiros homens; mas realmente naõ ſaõ Homens; porque naõ ſaõ racionaes. Que os Albanos, Homens nocturnos, e os Troglodytas, ſaõ racionaes, e ſaõ Homens; mas naõ de diverſa eſpecie, por naõ terem diverſas propriedades phiſicas, tranſcendentes, que baſtem para fundar huma nova eſpecie.

Depois da que o celebre Linneo na 1.ª Parte do ſeu *Syſtema Naturæ* chamou 2.ª eſpecie de Homens, deo á lúz outra 3.ª eſpecie, que com o nome de *Gibbon*, ou *Golock* ſe acha deſcripta no appendix da *Mantissa* impreſſa em Stockol-
Mant. f. 521. mo no anno de 1771. Elle lhe dá o nome eſpecifico de *Homo*

Lar,

Lar, que parece quer dizer *domestico*, e *familiar*, assim como o eraõ os Deozes Lares, que se diziaõ assistir com os Romanos para lhes guardar as suas casas, e os caminhos publicos: e segundo se refere nos Fastos de Ovidio tiveraõ origem em dous Irmãos gemeos chamados Lares, que nasceraõ da Nympha Lara pela violencia, que lhe fez Mercurio. Ovid. Nas. *Fast.* L. II.

Fitque gravis, geminosque parit, qui compita servant,
Et vigilant nostrâ semper in Urbe, Lares.

Estes, que eraõ falsos Deozes, tinhaõ a sua assistencia na antiga Roma: os Gibbons, e Golocks, que saõ Homens fingidos, habitaõ hoje na Costa de Coromandel, em Malaca, nas Ilhas Molucas, nos confins da China, e nos bosques de Bengalla. Saõ, conforme a descripçaõ de Linneo, de natureza mansos, e preguiçosos, que soffrem mal o frio, e a chuva. Naõ tem cauda. Andaõ com o corpo levantado, de estatura ordinaria dos Homens, e de côr preta, ou escura. A cara, diz, que tem de côr de carne: o lugar dos olhos, nariz, e bocca sem pêlos; mas á roda da cara os cabellos levantados. Os braços saõ mui corpridos, e estendidos até os pés, de sorte, que ficando levantados andaõ em quatro.

O Conde de Buffon na sua Historia Natural dos animaes traz a figura mui propria d'este com o nome de *Grande Gibbon*. Diz, que elle o vio vivo: que naõ chegava a trez pés de altura, e que o caracter principal, que o distingue dos outros bugios, he a prodigiosa grandeza dos braços, que saõ taõ compridos como todo o corpo; que a cara era de côr escura, com bastante semelhança á dos Homens; mas os dentes caninos, que chamamos *prezas*, eraõ maiores, que os humanos: que era de natural doce, e domestico, e que tomava mansamente o que lhe davaõ a comer. Porém naõ notou, que fizesse acçaõ alguma, em que mostrasse ter discurso; e como assim o poem no numero dos bugios. *Hist. Nat.* T. IV. f. 298.

No anno de 1778, que eu estive em Bengalla, ouví di-

dizer, que os Hollandezes tinhaõ allí dous d'eftes animaes na fua feitoria; porém eu naõ tive entaõ a curiofidade de os hir vêr. Logo no mefmo anno, paffando por Malaca de volta para a China, vi outro naquella Cidade com quafi as mefmas propriedades, que referem os fobreditos Authores: e tive affaz de tempo para o examinar exactamente; porque o levamos com nosco no mesmo Navio para Cantaõ. Naõ chegava a trez pés de alto: o corpo era preto, fem cauda, e com pêlos denfos em todo elle, excepto na cara, que os naõ tinha, e era de côr parda efcura com hum circulo de pêlos cinzentos á roda d'ella. Na cabeça naõ tinha propriamente cabellos; mas pêlos enriçados, pouco mais compridos, e da mefma côr preta, como os do corpo. Os pés eraõ menos femelhantes aos dos Homens, que os de outras efpecies de bugios, e tinhaõ as unhas curvas, e agudas.

Os braços eraõ defmarcadamente grandes, e d'elles fe valia com frequencia para andar; mas com efta fingular differença, que pondo as maõs no chaõ naõ ficava, como os outros animaes, com o corpo parallello á terra, nem tambem perpendicular, como os Homens; porque encurvando-fe hum pouco nos joelhos, e na cintura, formava com o corpo, e pernas dous angulos obtuzos á imitaçaõ da letra S. Era manfo, e mui medrozo: naõ fazia os brincos, e ridicularias, que fazem os outros bugios: nem moftrava mais intelligencia, que elles.

Efte he o animal disforme chamado *Gibbon*, que debaixo do efpeciofo nome de *Homo Lar* fe nos quer introduzir por individuo do noffo mefmo genero, formando huma terceira efpecie do genero humano. Chamo-lhe disforme; porque na realidade o he, affim na fórma interna, como na externa. Na externa bafta para o affirmar a enorme defproporçaõ, que tem dos braços com o corpo, a qual deformidade naõ fe vê em algum dos animaes, que chamamos perfeitos, e nelle faz huma apparencia defagradavel, e medo-

donha. Na interna; porque naõ obstante alguma semelhança, que tem exteriormente com o Homem, elle naõ falla, nem discorre, nem ainda mostra aquella industria, e habilidade, de que a natureza tem dotado outras especies de bugios. Pois se d'estes, com serem mais industriosos, falta a razaõ para dizer, que saõ Homens, como se poderá dizer d'aquelles, que o saõ?

Nos annos, que eu assistí na Cidade de *Hùé* Côrte de Cochinchina, havia allí huma Companhia de Comediantes, que todos eraõ bugios d'aquella especie, que mais communmente se chamaõ *macacos*, e costumaõ vir de Angola, e de outras partes de Africa. Estes, tendo-lhes cortado as caudas, e feito vestidos, e mascaras conformes ás pessoas, que haviaõ de representar, e industriados pelo seu mestre nas acções, lugar, tempo, e modo, que haviaõ de observar, começavaõ a Comedia, ou Entremez, logo que se lhes dava signal para sahirem ao theatro. Nelle tocavaõ instrumentos musicos, dançavaõ ao compasso, peleijavaõ com diversas armas, e o que mais he, fingiaõ com maravilhosa imitaçaõ as acções humanas, e o caracter proprio d'aquellas pessoas, de que faziaõ a figura. Do Soberano imitavaõ a gravidade, do Soldado a resoluçaõ, do criado a diligencia, do criminoso o temor, do parasito os obsequios, e com mais propria naturalidade as macaquices do bobo.

Ora quem naõ diria, que aquelles representantes eraõ racionaes? Pois nada menos; porque tantas, e taõ diversas acções, que faziaõ com tanta propriedade, naõ procediaõ de verdadeiro discurso; mas sómente de imitaçaõ, e lembrança do que lhes tinhaõ ensinado: em que esta casta de animaes he mais docil, que outras, como bem notou o eloquente Lacerda: *Simia quamvis ludum docetur, natum ad imitationem animal: sed vitia potius, quam rectè facta hominum imitatur*. Bem he verdade, que nos instrumentos, que tocavaõ, faziaõ elles as mudanças com os dedos; mas a harmonia da musica, como tambem a falla dos papeis, que representa- In *Campo Eloq.* vol. 1.

vaõ, ſahia detraz das cortinas, ſem que fóra ſe percebeſſe: e ainda neſta parte poderiaõ ſer ajudados de papagaios, principalmente de hum, que conta Joaõ Fabri, vio em Roma, o qual respondia com acerto a varias perguntas, que lhe faziaõ, e cantava varias letras por ſolfa. Mas tudo iſto naõ he prova de discurso, nem excede a capacidade material dos animaes.

Apud Hernand. in *theſ. Amer.* fol. 716.

Para fallar, e fazer as couſas, que ſe vêm, e ouvem, principalmente em materias limitadas, naõ he neceſſario o uſo do diſcurſo; mas ſim lembrança, e imitaçaõ do que ſe tem viſto, e ouvido: e diſto ninguem nega, que alguns animaes ſejaõ capazes. O diſcurſo racional ſe moſtra em conhecer, e inferir das couſas, que ſe viraõ, ou ouvíraõ, outras, que naõ fôraõ viſtas, nem ouvidas: e iſto naõ por ſemelhança alguma ſenſivel, que tenhaõ entre ſi; mas ſim pela connexaõ inſenſivel de cauſalidade, ou razaõ comum, que as une, a qual naõ alcança o conhecimento material dos brutos; mas ſim a intelligencia racional dos Homens. Eſta conhece tambem a exiſtencia dos entes incorporeos, inferindo-a dos ſeus effeitos: conhece, e ama o bem moral, e honeſto, de que os ſentidos corporeos dos brutos naõ tem, nem podem ter alguma idéa. Do que ſe ſegue claramente ſer a fórma Humana eſſencialmente diverſa da dos brutos, e naõ ſó no mais, ou no menos: que eſta diverſa eſſencia conſiſte em ſer racional: que por ſer racional he eſpirito: e por ſer eſpirito he immortal.

Naõ devo aquí diſſimular huma difficuldade, que ſe me póde oppôr. D'aquelles animaes, que tem alguma ſemelhança com o Homem, ſe conta, que tem algumas vezes cohabitado com individuos da verdadeira eſpecie humana. He certo, que na Africa tem vivido com elles algumas negras por annos inteiros, ou foſſe por violencia, ou por conſenſo voluntario. E tambem ſe diz (ainda que naõ com a meſma certeza) que d'eſte brutal commercio tem naſcido creaturas humanas: com que ſe pertende moſtrar, que ou os Pais

eraõ

eraõ Homens, como faz Linneo os Gibbons, e *Orang-Outangs*, ou que a fórma humana naõ he diversa essencialmente da de outros animaes; pois póde d'elles proceder.

He mui notavel a este respeito, o que se conta da origem da Familia *Dinh*, que começou a reinar em Tunkim no anno de 968 da Era de Christo. Referem as historias d'aquelle Reino, que havia allí huma mulher viuva, ainda moça, e formosa, mas de boa reputaçaõ, chamada *Nang Dam Nuong*, a qual por ser pobre, hia muitas vezes a hum bosque, que ficava perto da sua casa, a buscar alguns ramos de arvores seccos, com que fazer a comida. Em huma d'estas occasiões vio sahir do interior do bosque hum bugio (assim lhe chama a historia *Khitlúng*) branco, e grande, como hum homem, o qual, naõ lhe podendo ella resistir, a opprimio. Voltou para casa triste, e ainda mostrou maior afflicçaõ, quando depois de algum tempo veio a conhecer em si os effeitos da violencia passada.

Hum seu Tio, com quem vivia, vendo-a desconsolada, e notando tambem alguns signaes dos mesmos effeitos, a persuadio com brandura a declarar-lhe a causa da mudansa, que observava. Com repugnancia, e lagrimas contou ao Tio tudo, o que lhe tinha succedido, e que por isso naõ se attrevêra mais a hir áquelle bosque. Has de hir commigo, replicou o Tio, e naõ temas; que eu te defenderei. Preparou logo as armas, e foi varias vezes com a Sobrinha ao lugar assinalado: até que huma vez, estando em cillada, vio sahir o bugio, e arremeter com impeto para gozar da preza; mas o Tio, que o esperava resoluto, saltou de repente sobre elle, e o matou: ficando certificado (segundo se refere) com o exame do corpo morto, de que naõ fôra Homem, mas bruto o author d'aquelle violento insulto.

Passado o termo dos nove mezes determinado pela natureza sahio á luz hum menino perfeito, que desde os primeiros annos mostrou grande inclinaçaõ, destreza, e valor

no

no exercicio das armas. Tinha fallecido alguns annos antes o Rei de Tunkim, chamado *Haûngô*; e como naõ deixaſſe ſucceſſor ao throno por ſe extinguir nelle a Real Familia, ſe levantáraõ doze pertendentes, e com outros tantos partidos ſe puzeraõ em armas para uſurpar a Corôa; mas o menino, de que fallamos, que já entaõ era Homem, os venceo a todos, e ſogeitados elles, alcanſou por premio do ſeu valor o throno vacante, que occupou com applauſo do povo por doze annos, com o nome de *Dinh Lien.*

Confeſſo, que naõ dòu inteiro credito a eſta hiſtoria; ainda que corre por bem averiguada nas Chronicas dos Reys de Tunkim. Naõ duvido, que naſçaõ eſpecies hybridas do ajuntamento deſordenado de animaes de diverſas eſpecies, como vemos naſcer do burro, e egoa; do carneiro, e cabra; do lobo, e cadella, ou rapoza; do leaõ, e pardo; e de alguns outros, cujas caſtas naõ ſaõ muito diſtantes entre ſi. Tambem ſei, que da comunicaçaõ infame de individùo humano com algum bruto, ſeguem alguns, que póde naſcer creatura racional, e contaõ varios caſos, que dizem ter ſuccedido, com que o pertendem provar.

Com tudo, ou ſendo o Pai a unica cauſa efficiente na producçaõ do feto, como quer Ariſtoteles, ou ſendo o Pai, e Mãi agentes parciaes, como melhor ſentem outros, aſſim Phiſicos, como Anatomicos, ſempre fica a grande difficuldade, que de hum Pai bruto podeſſe naſcer hum Filho racional, capaz de governar hum reino? Sendo iſto contrario á praxe, que ſegue a natureza, em que ſe funda o axioma Filoſofico *Bonum ex integrâ cauſâ*, *malum ex quocumque defectu.* Mas naõ ſe deve d'aquí inferir, que o agente maſculino no noſſo caſo, foſſe mono racional: antes ſim, que ſendo verdadeiro individuo da noſſa meſma eſpecie, ſe procurou encobrir a indecencia (talvez voluntaria) da Mãi d'aquelle Rey com a violencia inevitavel (talvez fingida) do bruto aggreſſor, na qual a ſuperſtiçaõ gentilica acharia myſterio.

Nos

Nos animaes hybridos, ou mixtos, que nascem de Pais de diversas especies, sempre se nota alguma semelhança mixta, e inadequada a respeito de cada hum dos Pais, de que procedem: como se vê no macho, e mula, que em parte saõ semelhantes ao burro, e em parte á egoa; naõ só na fórma exterior do corpo, mas tambem nas inclinações, e propriedades internas: e o mesmo se observa regularmente nas outras castas de animaes hybridos. Pelo contrario no nosso caso o Rey *Dinh Lieu* de Tunkim era Homem perfeito assim na fórma corporal externa, como interna racional: logo naõ era Filho do Pai bruto, que se dizia; mas sim de Homem, que se occultava. Além de que, contando a Historia, que o aggressor lascivo fôra hum bugio branco, seria este (quando fosse verdade) de huma casta, que M.r de Buffon chama *Uanderu*, dos quaes os brancos saõ os maiores, e os mais libidinosos, e atrevidos a respeito de individuos da nossa especie. E assim, ainda que fosse certa a historia, nada provaria a respeito do *Gibbon*, e *Orang-Outang*, que se achavaõ innocentes no caso. T. IV pag. 314.

Pelo que, geralmente fallando, venho a concluir, que de hum tal comercio brutal naõ poderia regularmente sahir á luz algum effeito: que, se em algum caso raro tivesse effeito, seria este monstro irracional, seguindo a natureza do agente parcial de inferior especie *malum ex quocumque defectu*: que finalmente, se se podesse conhecer, que tinha nascido creatura racional, sem que o fossem ambos os Pais (o que he quasi impossivel provar-se) entaõ digo, que seria por huma excepçaõ das Leis geraes da Natureza, unindo o Author d'ella a alma racional (de que elle sempre he a unica causa efficiente) áquella materia informe, e desproporcionada, preparada pelos Pais, hum racional, outro bruto. E ainda assim a figura do feto teria alguma semelhança com o bruto, de que procedia, quando o mesmo Author da natureza naõ tivesse tambem dispensado nesta parte: o que sem gravissimo fundamento naõ se deve presumir.

Mas fosse, como quer que fosse, a origem genealogica d'aquelle Principe raro de Tunkim, ninguem poderia pôr duvida, que elle fosse Homem; naõ tanto pela figura humana, que tinha perfeita, quanto pela Ethica, e Politica acertada do seu governo, que internamente se fundava em hum perfeito discurso, e no exterior se manifestava pelas acções, e pela falla.

Se este constitutivo essencial do Homem se desse igualmente a conhecer no *Homo Lar* do celebre Linneo, nem eu, nem pessoa alguma duvidaria admittillo na sociedade humana, ainda quando na figura corporal fosse mais disforme, do que he. Aonde quer que se veja a fórma racional unida a hum corpo organico, devemos confessar, que aquelle composto he Homem: e que o naõ he, logo que lhe falte o principio do raciocinio. De sorte, que se Deos unisse, como he possivel, a alma racional ao corpo de hum quadrupede, ou de huma ave, ou de hum peixe, seria aquelle composto estranho verdadeiro animal racional, que continha o principio discursivo, ainda quando o naõ mostrasse na falla; mas que poderia mostrar com alguma mudança dos orgãos necessarios para fallar. E se os taes individuos exoticos fossem muitos, e da mesma symetria, poderia entaõ formar-se d'elles huma nova especie de Homens, que actualmente naõ nos consta, que exista.

Pelo contrario, se a hum corpo semelhante ao do Homem, se achasse unida, ou combinada a fórma sensitiva dos brutos, seria o tal composto bruto irracional, e naõ Homem: como actualmente de algum modo se observa em alguns monos, e Satyros dos bosques, e nos Tritões, e Nereidas, ou Sereias dos mares, nos quaes se vê alguma semelhança, mas nenhum tem falla, ou discurso, como o Homem.

Arist. *de anim.* L. I. cap. 3. Aristoteles na excellente obra, que compoz dos animaes, para cujo solido exame concorreo a magnificencia do seu grande discipulo Alexandre, admittindo, que ha Homens

mens sylvestres, assim como ha bois, cavallos, cães, e outros animaes, tem por erro o dizer, que estes saõ de diversa especie, que os domesticos. E na verdade parece, que tem razaõ, quando em huns, e outros se acha a mesma conformidade de membros, sómente com aquella differença accidental, que póde causar a diversidade de vida, e criaçaõ.

Taes eraõ os dous mininos, que no anno de 1661, foraõ descubertos entre huma manada de ursos, nos bosques de *Lithuania*, dos quaes se lembra o celebre Linneo, e se refere no Diccionario Historico. Os caçadores os seguiraõ; mas fugindo hum d'elles com os ursos, o outro, que parecia ter nove annos de idade, foi prezo pelos caçadores. Era mui alvo, e de perfeita fórma humana; ainda que mui feroz, defendendo-se a unhas, e dentes dos Homens, que o tomáraõ. Leváraõ-no ao Rey de Polonia, e sendo alli baptizado, e criado com grande cuidado, nunca fallou, nem se esqueceo de todo da sua antiga ferocidade. Tanto póde a boa, ou má educaçaõ nos primeiros annos! Achaõ-se nos Authores outros casos de individuos da nossa especie, que pela criaçaõ, que tiveraõ na mais tenra idade entre brutos, ficáraõ depois de tal sorte abrutados, que nem fallavaõ, nem davaõ indicios certos de discurso, permanecendo nelles as potencias da alma adormecidas, e em grande parte sem exercicio, assim como as tem o feto no utero, e algum tempo depois que nasce.

Lin. *Syst. Nat.* T. I. Pag. 28.

Porém naquelles, que naõ mostrando discurso, se naõ acha tambem huma total conformidade com a figura humana, devemos persuadir-nos, que saõ brutos, e naõ Homens: e isto he o que se acha nos *Orang-Outangs*, e nos *Gibbons*. O naõ terem cauda, e andarem em dous pés, he o que á primeira vista nos representa estes animaes mais semelhantes a nós com alguma admiraçaõ; mas cessará esta quando advertirmos, que tambem outras especies de bugios, e do genero *Lemur*, e *Vespertilio*, nascem naturalmente sem cauda:

da: e que os ursos, e os animaes chamados em Latim *Hiena*, a que os Cafres chamaõ *Cazumba*, andaõ muitas vezes em dous pés; ainda que mais ordinariamente em quatro.

As hienas saõ animaes mui ferozes, e mui manhosos, que appetecem muito a carne humana. Quando a luz do dia naõ he mui clara, ou de noite ao luar sahem a passear nos caminhos levantadas em dous pés: e como esta postura, e a côr preta, que tem, he a mesma dos Cafres naturaes da terra, enganaõ facilmente algum d'elles, até que chegando mais perto o apanhaõ, e o comem. Tambem para este fim se valem dos gemidos, e choro humano, que
Plin. L. 8. cap. 30. fingem com propriedade. Plinio accrescenta, que as hienas fallaõ algumas palavras, que tem ouvido aos pastores, e chamaõ pelo nome de algum d'elles, que acudindo cahe no seu poder, e perde a vida; mas d'esta notavel circunstancia naõ tenho certeza.

Temos visto como de ambas as novas especies de Homens, que nos inculca o celebre Linneo, nem ha fundamento para dizer, que saõ racionaes, nem adequada semelhança no corpo com a nossa especie. Como logo se ha de dizer que saõ Homens? Na mesma tal qual semelhança naõ concordaõ as relações dos viajantes. Donde se póde inferir, que ou elles differaõ mais do que viraõ (como ordinariamente succede na relaçaõ de cousas maravilhosas), ou que naõ sendo os objectos das relações em si muito semelhantes, naõ podem formar hum todo, ou huma especie muito semelhante ao Homem.

Naõ entraõ nesta conta os Troglodytas, que, como temos visto, sempre fôraõ da nossa mesma especie; ainda que Homens agrestes, e barbaros, assim como eraõ os Tapúias do Brasil, quando fóraõ descubertos pelos Portuguezes. Assim aquelles, como todas as mais nações, que povoaõ o Universo, tiveraõ principio, e descendem todos do mesmo Pai. Isto nos ensina a Fé claramente por bocca do
Act. Ap. cap. 17. v. Apostolo das gentes: *Fecitque ex uno omne genus Hominum in habi-*

habitare super universam faciem terræ. E he muito de notar, que tendo o Santo Apoſtolo propoſto eſta verdade na mais grave aſſembléa de ſabios da Grecia, qual era o Areopago de Athenas, naõ achou contradicçaõ neſte ponto, aſſim como achou no da reſurreiçaõ, que a razaõ natural naõ percebe, nem a experiencia enſina.

Tendo pois todos os Homens procedido do mesmo principio em Adam: ſendo todos illuſtrados com aquella luz celeſte, e eterna do raciocinio, como ſentíraõ Socrates, e Plataõ: tendo participado todos da Mente Divina, como enſina a Eſcola de Pythagoras, na alma racional immortal; ſendo todos incluidos no meſmo genero com a Divindade, como advertio S. Paulo aos Areopagitas *Ipsius et genus sumus*: naõ ſeria abſurdo aſſociar, e confundir a noſſa especie no mesmo genero com os brutos? He poſſivel, oh Homem, exclama o Filoſofo, e Orador Romano, que tendo-te Deos, ou a Natureza noſſa mãi dado huma alma, entre todas as couſas a mais excellente, e a mais Divina, te deixes tu cahir em tal desprezo, e em tal vileza, que naõ conheças a grande differença, que ha entre ti, e os brutos? *Sive Deus, sive Mater rerum omnium Natura dederit animum, quo nihil est præstantius, nihil Divinius: sic te ipse abjicies, et prosternes, ut nihil inter te, et quadrupedem aliquam putes interesse?*

Act. Ap. Ibi. verſ. 28.

M. T. Cicero Parad. 1.

DESCRIPÇAÕ BOTANICA

Das Cúbebas Medicinaes.

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

§ I.

Lida em 13 de Maio de 1784.

A Planta, que produz as *Cúbebas*, naõ foi conhecida pelos Medicos, e Botanicos antigos: nem até agora tiveraõ d'ella verdadeiro conhecimento os modernos. O que se usa na Medicina he o seu fructo, que saõ humas bagasinhas pequenas, redondas, e pretas, mui semelhantes á pimenta, as quaes costumaõ trazer huma cauda tenue, que he o pedunculo do fructo, em razaõ do qual se chama em algumas Farmacopéas *Piper Caudatum*, ainda que o seu nome mais usual he Cúbeba.

§. II.

No Livro XVII. da Geographia de Strabo se faz mençaõ de hum fructo, chamado *Corsium*, semelhante á pimenta, que por esta semelhança se poderia suspeitar, que fossem as Cúbebas, se o mesmo Author naõ declarasse, que este fructo nascia no Egypto, aonde naõ costumaõ nascer as Cúbebas. Plinio no Livr. II. Cap. 7. da Historia Natural diz com mais propriedade, que se acha na India huma droga semelhante aos grãos de pimenta: a qual segundo o parecer de Julio Cesar Escaligero na exercitaçaõ 146, saõ as nossas Cúbebas. E na verdade lhes compete bem a estas a semelhança do fructo, e o lugar do nascimento. Porém assim o nome de *Garyophyllon*, como o singular cheiro, que lhes dá a estimaçaõ, segundo Plinio, saõ mais pro-

prios

prios dos Cravos da India, que das Cúbebas. *Est etiam in India* (diz elle no lugar citado) *piperis grani simile, quod vocatur Garyophyllon, grandius, fragiliusque. Advehitur odoris gratia.* E por isso o douto Salmasio julgou, que Plinio neste lugar fallára do Cravo da India, e naõ das Cúbebas.

§. III.

D'ellas fallou Camelli no volume XXIV das Transacções Filosoficas da Sociedade Real de Londres, e Clutius no Tractado das Plantas Exoticas. Como tambem varios Diccionarios, o da Historia Natural, o Encyclopedico, o Inglez das Artes e Sciencias, e o Francez do Comercio. Neste diz M.r Savary (como tambem dizem outros), que as Cúbebas nascem de huma planta sarmentosa, que quer dizer, huma planta trepadeira, que com os seus ramos se encosta ás outras como a vide, ou como a hera. Porém isto he engano; porque a mim me consta ser huma arvore grossa, e firme, cujos ramos se elevaõ por si mesmos sem dependencia de outra.

§. IV.

Esta droga Medicinal costuma nos nossos tempos ser conduzida da Ilha de Java para a Europa nos Navios da Companhia Hollandeza. E admirome como esta Naçaõ naõ só industriosa no Comercio, mas tambem no adiantamento das Sciencias Naturaes, e principalmente da Botanica, como nos testificaõ as grandes obras de Van-Rheede, Rumphius, Burmman, Marcgrave, e outros, naõ tenha até agora dado inteira noticia ao Orbe Litterario da util planta das Cúbebas, que nasce nos seus dominios Orientaes.

§. V.

Novamente o clarissimo Bergius, digno discipulo do gran-

grande Linneo, falla do conhecimento, e uſo das Cubebas no livro, que doutamente eſcreveo da Materia Medica, e deu á luz em Stockolmo no anno de 1782. Mas como até agora naõ era conhecida a claſſe, ou genero, a que pertence eſte ſimples vegetal, fallou d'elle ſómente o neceſſario para a praxe Médica debaixo do nome, e genero *Piper*, accommodando-ſe niſto á ſua Farmacopéa Nacional Sueca, que tracta d'elle debaixo do nome de *Piper Caudatum*.

§. VI.

Eſta planta naſce naõ ſómente na Java, mas tambem em outras partes da Aſia. Eu a vî muitas vezes em diverſos lugares de Cochinchina, e a tive por alguns annos plantada, e florecente na minha horta. Chama-ſe na lingoa vulgar d'aquella terra *Cay Mang Tang*: e no idiôma, de que lá uſa a Gente de Letras ſe diz: *Tat Truong Nhu*. Tendo eu bem examinado a ſua flor, achei ſer hum novo genero Botanico pertencente á *Enneandria Monogynia*, que no ſyſtema ſexual de Linneo he a 9.ª claſſe, e a mais rara em todo o Reyno Vegetal.

§. VII.

O ſeu Calyx comum, que he de côr branca, e deciduo, conſta de quatro folinhas redondas, iguaes, concavas, e patentes, que dentro em ſi contém cinco floreſinhas, e cada huma d'eſtas naõ tem outro calyx, ou perianthio proprio.

§. VIII.

A Corolla de cada florſinha conſta de ſeis petalos ſemelhantes, mas deſiguaes na grandeza, quaſi redondos, e patentes, premorſos na extremidade do limbo. O Nectario conſta de ſeis glandulas oblongas, e inflexas.

§. IX.

§. IX.

Os Filamentos saõ nove, mui breves, pegados ao receptaculo: trez dos quaes, os mais internos, se levantaõ perpendicularmente; os outros seis tem posiçaõ obliqua, encostados á Corolla: nenhum d'elles tem annexo algum corpusculo, ou appendix. As Anthéras saõ grandes, compressas, e quasi quadradas: cada huma tem quatro Loculos oblongos, dous de cada lado, que se oppoem decupadamente no mesmo plano.

§. X.

O Germen he redondo, superior ao receptaculo. Naõ tem Stylo. O Stigma he simples.

§. XI.

O Pericarpio he huma baga pequena, e globosa, com seu pedunculo proprio, delgado, e compridinho.

§. XII.

A semente he só huma, tambem globosa. Nascem esta flor, e fructo em huma arvore hortense, mas naõ rara, de mediana grandeza, e mui copada. As folhas saõ pequenas, lanceoladas, integerrimas, planas, lizas, sem nervos, alternas, petioladas, de côr verde alegre, e luzente. A flor he branca, e lateral, com pedunculos simples, quatro, ou cinco juntos no mesmo lugar. A baga he mui redonda, vermelha escura, quando madura, pouco maior que a pimenta, e liza, como esta, que só depois de secca fica engilhada, e crespa.

§. XIII.

As Cúbebas saõ mais aromaticas, que a pimenta, com menos ardor, e acrimonia. Como o seu cheiro, e gosto he agradavel, usaõ d'ellas verdes os naturaes da terra para temperar alguns guizados, principalmente de peixe. Depois de maduras, e seccas, se fazem mais desagradaveis, e tambem mais oleosas. Eu tenho usado na Medicina do seu oleo, que he de côr verde escura, pouco mais grosso, que o azeite ordinario, e com hum cheiro penetrante, o qual tirei por expressaõ, quasi a sexta parte do pezo. Naõ tirei o oleo essencial, por me naõ ser necessario, e se tirar com mais trabalho, em menos quantidade. Mas tendo visto como estas bagas saõ muito oleosas, quando recentes, julgo, que tambem por distillaçaõ se poderá haver maior copia d'elle, do que conseguio M.r de Baumé, que de treze libras e meia de Cúbebas houve sómente duas onças, e huma drachma: talvez por terem já alguma corrupçaõ, a que saõ mais sogeitas, que a pimenta, por serem menos solidas.

§. XIV.

A virtude medicinal das Cúbebas he calefaciente, cefalica, e estomachica. Usa-se d'ellas com bom successo na Vertigem, e tambem em alguns affectos paralyticos, que tem a sua origem na cabeça, ou no estomago. Daõ-se em cozimento, ou substancia na dose de meia drachma: e o melhor methodo nas doenças chronicas he tomallas em pilulas.

§. XV.

Saõ tambem de natureza Apoflegmatizantes, que puxaõ, e evacuaõ a flegma brandamente, ou pelo nariz formadas em errhinos, ou pela bocca em masticatorios, e gar-

garis-

garifmos. Nefta fórma aproveitaõ em muitas doenças da cabeça : naõ porque fejaõ purgantes do cerebro, como diziaõ os antigos, por falta de cabal noticia da Anatomia; mas porque eftimulando a membrana pituitaria de Schneider purgaõ, e fazem fahir das fuas glandulas a materia pituitofa, que o fangue arterial allí tinha depofitado, antes de fubir ao cerebro.

§. XVI.

D'efte modo podem tambem aproveitar para o exercicio mais prompto da Memoria, que alguns dizem fe fegue do frequente ufo das Cúbebas. Mas quanto á virtude alexiteria contra os venenos, que outros lhes attribuem, naõ tenho até agora achado fundamento para o affirmar.

CON-

CONSIDERAÇAÕ PHISICA, E BOTANICA

Da planta Aerides, que nasce, e se alimenta no Ar.

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

. . . . . Quod noſtri Cœlum memorant, Græci perbibent æthera:
Quidquid eſt hoc, is omnia format, animat, auget, alit, ſerit,
Sepelit, recipitque in ſe omnia, omniumque idem eſt pater.

Ex Pacuvio in *Chryſe.*

Lida em 4 de Julho de 1785.

TRago hoje a noticia de huma planta verdadeiramente rara, e exotica; naõ tanto por ter a ſua origem nas Regiões remotas da China, e Cochinchina, quanto porque ſe cria, florece, e vive fóra do elemento natural dos Vegetaes, que he a terra. No elemento do fogo imagináraõ os antigos, que podia viver a Salamandra, e tambem huma caſta de inſectos em fórma de moscas, chamados *Pyraustas*, dos quaes refere Plinio, que naſciaõ nas fornalhas, em que ſe fundia o bronze na Ilha de Chypre. E ſe iſto ſe verificaſſe naquelles viventes ſenſitivos, naõ haveria difficuldade para o admittir tambem nos vegetativos; mas a verdade he, conforme a experiencia tem moſtrado, que a Salamandra ſó vive por breve tempo nas brazas, em quanto despede de ſi hum humor viſcoſo, com que apaga o fogo; mas ſe aſſoprando fomentamos a chamma, ſe reduz brevemente a cinzas como qualquer outro vivente. E no que toca ás moscas Pyraustas, todos conhecem já ſer huma fabula ſem fundamento algum em boa razaõ.

Plin. *Hiſt. Nat.* L. II. cap. 36.

O elemento da agoa he mais proprio, e ainda neceſſario para conſervar a vida, ou vegetal, ou animal. O celebre Chymico Van-Helmont (ſegundo elle mesmo refere) plantou hum pequeno ſalgueiro em hum vaſo de terra, e ten-

Helmont. L. *Mixt. Elem. figment.* n. 20.

tendo cuidado em o regar sómente com agoa pura por muito tempo, cresceo o salgueiro tanto, que arrancando-o da terra pezou 169 libras, conservando a terra a mesma quantidade, e pezo, que tinha quando o plantáraõ. Donde quer mostrar Van-Helmont, que toda a nutriçaõ, e grande augmento d'aquella planta foi tirado da agoa, e naõ da terra.

Mas seja qual for o sentir dos Filosofos nesta materia, o que nos mostraõ os sentidos, e o de que ninguem póde duvidar, he que todos os corpos viventes, ou sejaõ sensitivos, ou vegetaes, se compoem de partes humas fluidas, e outras solidas. Pelo que, assim a terra, como a agoa, ou puras, ou mixtas, e combinadas, lhes saõ ambas necessarias para a sua producçaõ, nutriçaõ, e conservaçaõ; porém com esta notavel differença, que huns só podem viver na terra, e naõ na agoa, e d'estes he o maior numero, que quotidianamente estamos vendo: outros só se podem conservar na agoa, como saõ entre os sensitivos os peixes, e entre os vegetaes algumas plantas marinhas, como o *Sargaço*. Finalmente ha outra terceira Classe amphibia, e indifferente, que participa da natureza de ambas, e póde natural, e comodamente viver assim na agoa, como na terra. D'estes entre os animaes he o *Hyppotamo*, o *Crocodilo*, e tambem algumas especies de serpentes. Das plantas, além de outras, he o *Convolvulus Reptans* de Linneo, a que Rumphio chama *Olus Vagum*, o qual he comida mui usual na India, e semelhante aos nossos espinafres; porém com esta rara propriedade, que ou plantado na terra, ou lançado em alguma lagoa, e nadando com as raizes sobre a agoa, cresce, florece, e se multiplica com a mesma facilidade. Rumph. *Amb.* L.IX. c. 41. tab. 155.

Do que se naõ deve inferir, que alguns d'estes vegetaes vivem, e se alimentaõ sómente das partes solidas da terra, e outros sómente das liquidas da agoa; pois os terrestres, ainda nas terras mais áridas, recebem o liquor do orvalho, que os refresca, e sustenta: e os aquaticos recebem

Solus animalium nec cibo, nec potu alitur, nec alio, quam aeris alimento.

Porém os modernos mais exactos nas suas observações, sem negarem a possibilidade, negaõ o facto. Na Academia Real das Sciencias de Pariz se examinou com diligencia, e se achou, que o Cameleaõ come alguns insectos, como saõ as moscas, as quaes apanha com a lingoa, que he mui subtíl, e ligeira, do comprimento de ametade de todo o seu corpo, com a qual despedida como huma seta caça a mosca, e a engolle inteira. Isto se confirmou com mais evidencia abrindo o Cameleaõ, em cujo estomago, e intestinos se acháraõ as moscas, e tambem nas fezes finaes d'ellas, com que se mostrou claramente, que o Cameleaõ naõ vive sómente com o ar; mas de nenhum modo se concluio, que elle naõ possa viver, e viva muito tempo só com elle.

Plin. L. VIII. c. 36. Dos ursos do Norte deixou escrito Plinio, e outros, que no tempo do inverno se recolhem nas suas covas, aonde passaõ alguns mezes sem tomar alimento algum: e assim diz tambem dos ratos Ponticos, e o observou o excellente Medico, e Poeta Ausonio na sua Ephemeris:

D. Mag. Auson. *Ephemeris* p. 38.

Dormiunt glires hyemem perennem,
Sed cibo parcunt.

O mesmo refere Linneo das Marmotas dos Alpes, que passavaõ o inverno em profundo sono, e por conseguinte sem comer. O douto Haller nos Commentarios, que escreveo sobre a *œconomia animalis* do seu grande mestre Boerhaave diz, que os ursos, e algumas especies de *Mustella*, e *Vulpes* se recolhem a dormir no principio do inverno, e continuaõ sem despertar até á entrada da primavera: e ainda ha quem affirme, que despois d'esta rigorosa, e prolongada abstinencia sahem das suas covas mais fortes, e mais gordos.

Hall. *prælect. in Boerh.* n. 55.

Pois se os ursos, sendo animaes taõ corpolentos, e taõ vorazes, podem passar muitos mezes sem comer, porque o naõ faraõ mais facilmente os Cameleões, sendo taõ tenues, e que

e que rara vez se observa, que comaõ? E se huns, e outros naõ comem, como se sustentaõ, e crescem sem alimento? He absolutamente certo, que nenhum vivente póde naturalmente viver sem se nutrir. A vida nos animaes, conforme a definiçaõ do engenhoso Medico Escocez Pitcarne, consiste no movimento intrinseco, a que chamamos *circulaçaõ do sangue pelas veias, e arterias*: e nas plantas em hum movimento do succo nutricio pelos subtís canaes, que nellas formou a natureza, com analogia ao movimento do sangue nos animaes, segundo observou o perspicaz Malpighi. Ora com este continuo movimento, que naõ póde cessar, sem cessar a vida, se exhala continuamente pela superficie dos corpos huma grande quantidade de materia em effluvios pelos vasos exhalantes, que segundo a anatomia de *Ruischio* procedem sómente das extremidades das arterias.

Pitcarne *Elem. Med.* defin. 1.

O celebrado Sanctorio, a quem pela utilissima obra, que nos deixou da perspiraçaõ insensivel, fundada em observaçőes staticas, deo *Boerhaave* lugar junto a Hippocrates, e mui superior a todos os Commentadores de Galéno, diz, que a materia da perspiraçaõ, que em hum dia se exhala em vapores do corpo humano, chega á quantidade de 5 libras, na supposiçaõ que o sustento d'aquelle dia em comida, e bebida tenha pezado 8 libras: vindo a ser por este computo muito maior a evacuaçaõ, que a natureza faz pelos poros, do que todas as outras juntas. E assim fica sendo impossivel, que ainda faltando estas nos animaes, que dormem continuamente sem comer, nem beber por alguns mezes, possaõ estes viver, se naõ receberem outra casta de alimento; pois cada dia perdem muita substancia pela transpiraçaõ, sem adquirirem alguma pelo pasto. Donde se vem a conhecer, que a substancia nutritiva, com que se refazem, da que quotidianamente exhalaõ, e perdem, naõ póde vir de outra parte senaõ do ar, o qual recebem pela bocca, e pelo nariz na inspiraçaõ, e pelos infinitos poros, ou boccas das veias absorbentes, que se achaõ em todo o am-

Sanct. *Aph.* 4. apud Gofter *de Perspir. insensib.*

bito do corpo. D'allí ſe introduz nas veias maiores com o ſangue, que purificado, e ſubtilizado nas glandulas, e nos boſes paſſa ao coraçaõ, do qual por meio das arterias ſe reparte, e communica para alimento, e vida de todo o corpo.

Eſte he o modo, e o caminho, pelo qual ſe communicaõ ordinariamente a peſte, e enfermidades contagioſas, como bem conheceo, e enſinou o douto Medico Hollandez Gorter: *materiam pestilentialem aeri mixtam misceri sanguini constat.* E eſte he tambem o meio, por onde com hum ar limpo, e ſaudavel ſe reſtauraõ as forças de alguns doentes, a quem de outra ſorte naõ póde aproveitar a Medicina.

Gorter *de Perſp. inſenſ.* c. 13. n. 19.

Nos tempos mais antigos antes da vinda de Chriſto, já era conhecida eſta verdade; pois o ſabio, e prudente velho Hippocrates enſinou aos da ſua eſcola, que toda a ſuperficie do corpo humano tranſpira, iſto he, ſegundo a expoſiçaõ de Haller, que em todos os membros, e em todas as partes do corpo, internas, e externas, ſe achaõ vaſos exhalantes, e inhalantes. Pelos exhalantes perde o animal em effluvios a ſubſtancia, que tinha adquirido: e pelos inhalantes a reſtaura, attrahindo a ſi as partes aptas para a nutriçaõ, que ſe achaõ eſpalhadas no ar.

Hall. *prælect.* n. 87.

Eſte admiravel mechaniſmo da natureza, que he certo ſe acha nos animaes, he tambem indubitavel, que o ha nas plantas: e ainda neſtas o ſuppoem Boerhaave, ou mais neceſſario, ou mais conhecido, quando d'ellas faz parallello para os animaes, dizendo, que aſſim como as plantas attrahem a ſi o nutrimento liquido do ar pelos canaesinhos abſorbentes, da meſma ſorte os animaes: *ut plantæ bibulis superficiei fistulis ex aere hauriunt applicatos humores, ita et animalia.* E pouco mais acima tinha dito, que *supposto a raiz da planta seja o orgaõ mais ordinario, por que ellas costumaõ receber o alimento, tambem o recebem pela superficie de todo o corpo, conseguindo a nutriçaõ por meio das boccas attrahentes, que estaõ dispostas em ordem mui densa por toda a superficie,*

Boerh. *El. Chym.* T. I. pag. 32.

Ibi pag. 28. *de radice veg.*

com

com as quaes chupaõ o humor do pabulo, e o vaõ introduzindo pelos canaesinhos, que o distribuem a todo o corpo da planta. No que fundado o mesmo Author affirma, *que com razaõ se podem comparar estes vasos, ou canaesinhos dos vegetaes ás veias lacteas, mesentericas, e absorbentes dos animaes.*

Eu considerando este modo admiravel da nutriçaõ das plantas, e ouvindo dizer, que huma mui vulgar da India, a que Linneo chama *Cotyledon Laciniata*, se conservava no ar arrancada da terra, quiz certificar-me com a experiencia. Pendurei-a por hum fio no ar livre de hum alpendre, tendo primeiro examinado o seu pezo. Continuou por muitos dias na mesma fórma, e frescura, e ainda brotando algumas folhas novas; porém depois foi diminuindo no pezo, que eu observava com frequencia, de sorte, que passados alguns mezes naõ pezava já ametade, ainda que na apparencia se mostrava verde; pelo que vim a concluir, que a *Cotyledon Laciniata* naõ se nutria adequadamente do ar, e que aquella vida, que parecia conservar, era huma vida attenuada com huma atrophia, e marasmo, em que por fim faltando-lhe o alimento externo necessario se conservava violenta, consumindo-se a si mesma: assim como aquelle, de quem falla o Poeta, que obrigado de huma fome desesperada se alimentava de seus proprios membros: *Minuendo corpus alebat.*

Lin. *Syst. plant.* G. 628. sp. 6.

He mui differente a vida, e mui propria a vegetaçaõ da planta *Aerides*, que agora vou descrever, a qual pendurada por hum fio no ar livre, vai sempre crescendo assim na extençaõ, como no pezo.

O Calix he huma pequena spatha, ovada, monoflora, e presistente.

A Corolla saõ cinco petalos, ovados, planos, expansos, e quasi iguaes.

O Nectario consta de duas folhas horizontaes: d'estas a inferior he oblonga, carnosa, hum pouco concava em fórma de barquinha: a superior cobre, e fecha a inferior,

e de

e de hum lado ſe levanta, encurvando-ſe para cima em fórma de tubo ſubulado: o outro lado ſe dilata horizontalmente cortado em trez lacinias, duas das quaes ſaõ obtuſas, e verticalmente parallellas; e a terceira, que fica no meio, he de figura conica.

Os Stamines ſaõ dous filamentos, breves, e elaſticos, pegados á extremidade interna da folha inferior do nectario. As Antheras ſaõ em fórma de lentilha, ſimples, e cobertas.

O Piſtillo conſta de hum Germine trigono, tenue, e curvo, que ſuſtenta a flor. Naõ tem Stylo. O Stigma he huma pequena concavidade, junta á baſe dos Stamines.

O Pericarpio aborta.

A Raiz he compoſta de bulbos lineares, ſimples, compridos, e enlaçados. O Caule he redondo, groſſo, ſimpliciſſimo, igual, inflexo, e comprido de hum pé, ou mais. As folhas ſaõ grandes, lizas, craſſas, reflexas, compridas de oito pollegadas, e largas de huma, com os lados parallelos, e a extremidade obtuſa, e emarginada: com os petiolos curtos, e vaginantes. A flor he pallida, maior que hum jaſmim, de viſta agradavel, e cheiro mui ſuave. Naſce em ramos ſimples, lateraes, e reclinados, quaſi do meſmo comprimento, que as folhas.

Eſta planta he de origem agreſte, que nos bosques coſtuma naſcer paraſitica, pegada aos ramos das arvores; pois já ſe vê, que ſendo pezada de huma, e mais libras, era impoſſivel ficar ſuſpenſa, no ar, ſem ſe ſegurar de algum modo. Trazida dos bosques, ſe pendura por huma cordinha no ar livre, ou ſe mete em hum ceſtinho de qualquer materia, porém tecido com aberturas por todas as partes, e ſuſpenſo da meſma ſorte por hum cordel. Neſta poſtura, ſem ſe lhe lançar terra, agoa, ou alguma outra couſa, vai continuamente creſcendo, ainda que lentamente, e floroce no Outono. Alli meſmo ſe multiplica, gerando cada anno novos filhos, com raizes novas, e novas folhas, que ſeparando-ſe da planta mãi, e ſuſpenſos na meſma fórma,

ma, vaõ todos vegetando, florecendo, e multiplicando-se por largos annos, sem receberem outro alimento, que do ar.

Eu tendo achado nas especies, e systema das plantas de Linneo huma planta, a que elle chama *Flos Aeris*, e he a segunda especie do *Epidendro*, de que he Author Kempfer, e diz, que nasce na Java, com o caule escandente, poucos ramos, as folhas lanceoladas, e os petalos da corolla lineares em figura de aranha, suspeitei, em razaõ de lhe chamar *Flor do ar*, se seria a nossa *Aerides*, que na lingoa de Cochinchina se chama *Phaong Lon*, que quer dizer *flor do ar*; mas adverti logo, que he totalmente diversa, como se póde ver combinando o habito de ambas as plantas, de que se fórma a differença especifica: e tambem a fórma da mesma flor, que na nossa em nada se parece com a aranha, nem nos petalos, nem no nectario: e muito mais, que este na nossa naõ he turbinado, caracter essencial do Epidendro de Linneo.

Na nossa planta *Aerides*, naõ sei, que até agora se tenha achado virtude alguma; mas nem por isso se póde dizer, que he inutil o seu descobrimento, e exame. Por elle se vê claramente, que hum vivente corporeo póde conservar-se por largos annos sem tomar outro alimento, que o dos effluvios do ar, que o cercaõ. Pois naõ será util este exemplo para salvar a vida de hum homem, que apertado de huma esquinencia, ou outro semelhante accidente, naõ póde engollir mantimento algum? Em tal caso, porque naõ pereça o enfermo desfallecido, póde-se-lhe acodir naõ só com clysteres nutritivos, cujos vapores entrem nas veias lacteas, ou com os cheiros de guizados substanciaes, mas tambem com fatias de paõ ensopadas em bons caldos temperados com vinho, e noz muscada, que applicadas exteriormente de ambas as partes na regiaõ do estomago, introduzaõ nelle as partes mais subtís do alimento por meio dos vasos inhalantes.

E para que alguem naõ julgue ser isto huma mera es-

 pecu-

peculaçaõ, póde consultar as obras do Doutor Haller, Phisico Mór da Rainha de Gram-Bretanha, e digno discipulo do grande Boerhaave, o qual nas Prelecções sobre a economia do animal affirma, ter-se já mostrado em Inglaterra, que hum homem por meio de fomentações applicadas exteriormente, póde receber tanto alimento, quanto lhe baste para sustentar a vida: *In Britania demonstratum est hominem de solâ materia extrinsecus per fomenta applicatâ tantum sibi sumere, ut vitam utcunque sustinere possit.*

Haller Prælect. n. 1021.

ME-

MEMORIA

Em que se dá noticia de diversas especies de abelhas, que daõ mel, proprias do Brasil, e desconhecidas na Europa.

POR VICENTE COELHO DE SEABRA.

A Familia dos Insectos, que hum grande numero de homens tem contemplado como insignificante, inutil, e mesmo superflua, he aquella, que sendo observada pelos olhos de Swammerdam, Maraldi, Reaumur, Linneo, Bomare, &c. he summamente necessaria, e util: e me faz dizer com Plinio: *In. his tam parvis, atque tam nullis quæ ratio! Quanta vis! Quam inextricabilis perfectio!* Para prova disto basta lançarmos os olhos sobre as abelhas, e examinarmos, como estes grandes observadores, as suas funcções, o seu governo, a sua industria, a arte dos seus trabalhos, e a utilidade em fim, que nos resulta do seu mel, e cera. Eu me naõ demorarei em narrar cada huma d'estas cousas, bem descriptas pelos Authores acima referidos, e tractadas profundamente por Bomare nos seus Diccionarios de Historia Natural. O meu objecto he sómente dar noticia de algumas especies de abelhas melliferas, proprias do Brasil, principalmente da Capitanía de Minas geraes, que naõ fôraõ ainda descriptas pelos Naturalistas da Europa.

Linneo no seu *Systema Naturæ*, mete as abelhas na ordem *Hymenoptera*: e no genero *Apis*, sómente faz mençaõ da especie *Apis mellifera pubescens, thorace subgriseo, abdomine fusco, pedibus posticis glabris, utraque margine ciliatis.* Esta he justamente a abelha, que se cultiva em Portugal, e quasi toda a Europa. Mas além d'esta ha ainda na mesma Europa outras muitas abelhas melliferas, que Boma-

mare refere no seu Diccionario de Historia Natural, como saõ abelhas *bourdons*, abelhas solitarias, abelha fura-páos, abelhas *maçonnes*, abelhas mineiras, e outras, as quaes todas comprehende debaixo do nome de Abelhas *Villageoises*.

A maior parte d'estas abelhas, por naõ dizer todas, saõ desconhecidas no Brasil. A mesma abelha vulgar *Apis mellifera* de Linneo, naõ he allí vista. Ha porém naquelle Paiz muitas outras differentes especies de abelhas, que daõ mel, e a maior parte tambem daõ cera, ainda que differente entre si, e differente da cera da abelha vulgar da Europa. Sendo o Brasil taõ fertil d'estes uteis insectos, os seus habitantes naõ cuidaõ na sua cultura. As colmeias saõ allí desconhecidas: e quando a necessidade os obriga, servem-se das colmeias, que as mesmas abelhas fazem dispersamente, aonde a natureza lhes offerece lugar commodo. A cera he muito abundante em algumas; porém antes querem comprar por hum preço carissimo a que da Europa, e da Africa lhes vai, do que cultivar a que a natureza taõ liberalmente lhes dá. Tanto póde o ocio! E tal he a desgraça do hum Paiz abundante, onde a industria he desconhecida! O mel de algumas he superior ao mel Portuguez. A estructura das casas, e dos favos de mel he diversa, nas diversas abelhas. Eu vou appresentar na Memoria, que hoje offereço á Academia huma taboa Synodica d'estas abelhas; onde do modo possivel darei huma idéa das suas differentes especies, e da utilidade, que se póde tirar de cada huma. Para maior clareza faço quatro divisões d'estas abelhas. Na primeira comprehendo aquellas, que saõ desarmadas, isto he, que naõ mordem, e saõ destituidas de aculeo, e humor caustico no anus: aquí entraõ seis especies *Urusû*, *Mumbuca*, *Mandasaia*, *Jatai*, *Mendorí*, *Bate-Chapeo*. Na segunda divisaõ entraõ aquellas, que naõ mordem, nem tem aculeo, mas lançaõ pelo anus, segundo parece, hum humor caustico, o qual sendo lançado sobre qualquer parte do nosso corpo, serve de hum estimulante mais, ou menos activo: com elle se defen-

defendem. Aquí entraõ trez efpecies *Caga-fogo*, *Jandaíra*, e *Tubíba*. Na terceira divifaõ entraõ aquellas, que naõ mordem, mas offendem á maneira das vefpas com hum, ou mais aculeos envenenados, que tem junto ao anus. Comprehende duas efpecies *Marimbondo vulgar*, e *Marimbondo Inchú*. Na quarta em fim comprehendemos aquellas, que fómente mordem: tal he a *Arapúa*. Eu me firvo dos feus nomes mais vulgares.

Abelhas melliferas proprias do Brafil.

Divifaõ.

1.ª *Desarmadas*: *destituidas de aculeo, e humor caustico, e naõ mordem.*

Efpecies	
I. *Urusú*: abelha grande: côr avermelhada: thorax, e cabeça manchados com eftrias negras.	*Urusú pé de páo*: faz fua cafa dentro dos páos, e ordinariamente junto á raiz: a cafa he grande: os favos quafi cylindricos, ou melhor, em fórma de hum folido eliptico: grandes: mais compridos, que huma pollegada, e quafi de huma pollegada de largura: unidos como em racemo. Cera aloirada: em muita quantidade. Mel branco aloirado: em quantidade vinte libras, ou quartilhos. *Urusú do chaõ*: a fua cafa he fubterranea, e em tudo o mais femelhante á antecedente. Quando temem alguma coufa, huma d'ellas occupa a porta da cafa, e de forte a tapa com a cabeça, que he difficil dar com a mefma porta.

II. *Mumbúca*. Negra: do tamanho da *Urusú*. Faz a ſua caſa grande, ordinariamente dentro dos ramos das arvores. Os ſeus favos ſaõ grandes, e unidos. Cera negra, e muita. Mel aloirado: muito doce: em quantidade até quarenta, e tantos quartilhos. Criaõ huma eſpecie de reſina, que os Braſileiros chamaõ *cerol de Mumbúca*: e uſaõ d'elle como reſolvente, madurante, e abſtergente.

III. *Mandasaia*. Avermelhada: mais pequena, que as antecedentes. Faz as ſuas caſas ordinariamente nos troncos das arvores. Favos encadeados, e menores, do que os da *Urusú*. Cera negro-aloirada. Mel em menor qantidade, do que o das antecedentes, e loiro.

IV. *Jataí*. Corpo muito pequeno: aloirado: as tibias muito compridas: faz a ſua caſa em páos, e a ſua porta ſahe para fóra em fórma de trombeta de cera, que de noite fechaõ com cera.

- *Jataí verdadeira*. Fazem as caſas nos troncos ſeccos. Favos orbiculados, encadeados, e dò tamanho de bago de uva. Cera loira. Mel branco: muito doce: em quantidade até cinco libras, ou quartilhos.
- *Jataí mosquito*, ou *Moça branca* Muito pequena: alvarenta. Faz a ſua caſa nos páos ſeccos. Favos arredondados: pequenos: encadeados. Cera esbranquiçada. Mel muito branco, e doce: em quantidade até huma libra.
- *Jataí amarella*. Tem maior corpo, do que as outras *Jataís*: loira: tem as extremidades das azas eſbranquiçadas. Em quanto á caſa, favos, cera, e mel he muito ſemelhante á *Jataí* verdadeira.

V. *Mendorím*. Maior, do que a *Jataí*. Côr ouracea, avermelhada. Faz as ſuas caſas nas partes mais altas das arvores,

res, e formaõ na porta huma muito comprida trombeta de cera, que naõ tapaõ como a *Jataí*. Favos cylindricos, de comprimento de meia pollegada, e até cinco linhas de largura: unidos. Cera vermelho-amarellada. Mel loiro: até quatro quartilhos.

VI. *Bate-Chapéo*. Do tamanho da antecedente. Côr fuſco-avermelhada. Faz a ſua caſa no alto das arvores. Favos compridos. Cera aloirada. Mel alvo: alguma couſa azedo: em quantidade até ſeis quartilhos.

2.ª *Abelhas ſem aculeo*; *mas que lançaõ pelo anus* (ſegundo parece) *hum humor caustico*, *e naõ mordem*.

Eſpecies

I. *Caga-fogo*. Negra. Corpo delgado. Tibias peludas, e compridas. Faz as ſuas caſas nos troncos ſeccos das arvores ordinariamente. Favos grandes. Cera quaſi negra. Mel eſpeſſo: eſbranquiçado: até huma libra em quantidade.

II *Jandaíra*. Abelha negro-avermelhada: dotada de hum humor mais cauſtico: no mais ſemelhante á antecedente.

III *Tubíba*. Menor, do que as duas precedentes: em quanto ao mais muito ſemelhante á Caga-fogo.

3.ª *Abelhas com aculeo venenoso no anus*, *que offendem á maneira das veſpas*: *naõ mordem*: *naõ tem cera*.

I. *Marimbondo vulgar*. Negro. Mais pequeno, que o ſeguinte: comprido. Caſa redonda formada ás vezes ao redor de hum ramo de qualquer arvore; ás vezes porém ſómente apegada, ou ao ramo, ou a outra qualquer parte por huma ſubſtancia propria como coriacea: he patente, e coberta de huma como materia coriacea: internamente he dividida, como por laminas horizontaes, cuja ſuperficie inferior he liza, e a ſupperior toda cheia de cellulas cylindricas, cheias de hum clariſſimo mel, e ſummamente doce. Naõ tem cera. Eſtas laminas horizontaes ás vezes ſaõ convexo-concavas, com a convexidade

xidade para cima, e a concavidade para baixo, e saõ mais, ou menos multiplicadas. O mel he muito pouco.

II. *Marimbondo Inchú.* { amarello / rajado / preto. } Maior, do que o vulgar. Naõ tem cera. O mel he semelhante ao do *Marimbondo vulgar*. As suas casas saõ unidas ás arvores: muito raras vezes a outras cousas. A materia, de que saõ feitas, nos he desconhecida; porém he como coriacea. A figura he varia, ou quasi cylindrica: tapada por ambas as bases, e sómente com huma pequena porta ao lado, ou globosa, ou eliptica, maior, ou menor. Toda a casa he patente pela sua superficie externa; mas por dentro tem a mesma estructura, que a da especie antecedente. D'esta especie já ha noticia em algumas partes da Europa; por se ter mandado para cá algumas casas.

4.ª *Abelhas que mordem.*

I. *Arapuá.* Grande. Negra. Cheia de pêlo pelas pernas, e abdomen. Faz a sua casa, ou nos buracos das paredes, ou nos ramos delgados das arvores, abraçando os mesmos ramos: he cercada por fóra com huma grossa crusta, ou capa formada de esterco, pedaços de páo misturados, e unidos com terra. A figura he quasi orbicular. Favos de figura oval: negros. Mel grosso: avermelhado: e doce com alguma cousa de azedo. Cera resinosa: negra: e muito impura.

De todas estas ultimas especies se tira o mel sem perigo, fazendo-se junto á casa fumo: principalmente fumo de tabaco, pelo qual se affugentaõ. Além d'estas especies ha outras, de que, se eu lá estivesse, poderia dar noticia: por hora contentar-me-hei com isto.

OBSER-

OBSERVAÇÕES METEOROLOGICAS

Feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1785.

POR D. JOAQUIM DA ASSUMPÇAÕ VELHO.

AS presentes Observações foraõ feitas com os mesmos Instrumentos, e do mesmo modo, que as do anno precedente.

JANEIRO DE 1785.

Dias do mez	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	26 11 7	26 10 4	26 9 5	52	54	53	0,4	1,6	5,2
2	26 9 6	26 11 2	27 0 2	49	52	51	2,1	1,4	0,9
3	27 1 3	27 2 6	27 3 0	51	55	52	1,3	1,1	0
4	27 3 0	27 3 0	27 2 3	54	55	54	0,8	0,2	0,1
5	27 1 6	27 1 5	26 10 5	53	56	54	0	0	6
6	26 10 7	26 11 0	27 1 6	52	53	52	4,5	2,6	1,8
7	27 3 4	27 4 5	27 8 0	50	50	50	0	0	0
8	27 9 0	27 9 5	27 9 0	48	53	49	0	0	0
9	27 8 4	27 8 0	27 6 0	49	53	49	0	0	0
10	27 5 9	27 5 5	27 5 0	47	52	48	0	0	0
11	27 4 5	27 4 0	27 3 0	44	47	46	0	0,2	0,8
12	27 3 0	27 3 2	27 3 0	45	50	49	0	0	0
13	27 2 9	27 3 0	27 2 5	48	53	52	0	0,1	0
14	27 0 0	27 11 2	27 0 0	50	54	48	7,8	2,8	5,4
15	27 2 5	27 6 0	27 6 7	49	53	49	0	0,1	0
16	27 7 0	27 7 0	27 6 5	47	53	51	0	0	0,2
17	27 6 0	27 6 0	27 5 6	51	54	50	0	5	2,3
18	27 5 0	27 4 9	27 4 8	49	51	49	2,1	1	0
19	27 5 0	27 4 6	27 3 1	46	51	46	0,6	0,4	1,1
20	27 2 0	27 1 9	27 3 5	48	53	46	0,4	4,8	0,7
21	27 5 0	27 6 5	27 6 2	43	51	47	0	0	0
22	27 7 5	27 7 8	27 8 0	44	51	48	0	0	0
23	27 8 5	27 8 3	27 8 8	44	52	49	0	0	0
24	27 8 9	27 8 4	27 7 5	46	51	47	0	0	0
25	27 6 5	27 5 9	27 4 5	42	51	47	0	0	0
26	27 4 6	27 5 0	27 6 9	46	50	49	0	0	0
27	27 7 6	27 8 8	27 9 0	47	54	48	0	0	0
28	27 10 0	27 9 5	27 9 4	46	54	48	0	0	0
29	27 9 0	27 8 0	27 7 2	44	52	47	0	0	0
30	27 7 0	27 6 5	27 6 0	45	52	47	0	0	0
31	27 6 5	27 7 9	27 10 0	48	52	48	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.
Maior elevação	27 10 0	Maior calor	56	P. L. D.
Menor elevação	26 9 5	Menor calor	42	
Elevação media	27 5 0	Calor medio	50	8 9 3

JANEIRO.

Ventos e estado do Ceo.

Dias do mez	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. m. rij. de temp. Ceo c.
2	O. m. rij. de temp. Ceo c. t.	O. m. rij. de temp. torv.	O. m. rij. de temp. torv.
3	O. rij. nuv. enter.	O. rij. e N. E. Ceo cl.	O. rij. nuv. rar.
4	S. m. rij. de temp. hum.	S. m. rij. do temp. hum.	S. m. rij. de temp. hum.
5	S. rij. de temp. hum.	S. de temp. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.
6	S. E. rij. Ceo cub. nuv. car.	S. E. rij. Ceo c. nuv. car.	E. Ceo cub. nuv. car.
7	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl.
8	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
10	E. br. nev. alt.	E. br. nev. alt.	S. E. Ceo cub.
11	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
12	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
13	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
14	S. O. m. rij. de t. Ceo cub.	S. O. m. rij. de t. dep. O. C. c.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
15	N. O. alg. nuv. solt.	N. alg. nuv. solt.	N. Ceo cl. e lind.
16	S. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
17	S. E. e N. O. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car. hum.	S. Ceo cub. nuv. car.
18	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	O Ceo cub.
19	O. Ceo cub.	O. Ceo cub. nuv. car.	O Ceo cub. nuv. car.
20	S. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo ennevoado.
21	E. alg. nuv. solt.	E. alg. nuv. solt.	E. Ceo cl. e lind.
22	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
23	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
25	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. br. Ceo cub.
26	S. br. dep. E. alg. nuv.	E. alg. nuv.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
27	N. E. br. Ceo c. nev. alt.	N. E. nuv. solt.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
30	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
31	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. E. m. seco Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
9	13	0	3	5	1

FE-

FEVEREIRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan	Tarde	Noite	THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 10 2	27 9 9	27 8 6	40	46	43	0	0	0
2	27 8 0	27 7 9	27 7 5	45	49	48	0	0	1,8
3	27 8 0	27 6 5	27 8 0	44	49	47	0	0,6	2,2
4	27 8 2	27 6 5	27 7 0	41	47	45	0,4	0	1
5	27 8 0	27 8 5	27 8 8	48	50	49	0	0	1,7
6	27 9 0	27 9 0	27 9 1	48	53	51	0,3	0,4	0,2
7	27 8 9	27 8 6	27 8 5	49	52	48	0	0	0,5
8	27 8 2	27 9 0	27 9 0	49	53	48	0	0	0
9	27 9 7	27 9 5	27 9 3	45	55	52	0	0	0
10	27 9 5	27 9 0	27 8 2	45	55	52	0	0	0
11	27 8 0	27 7 9	27 7 0	50	57	50	0	0	0
12	27 6 5	27 6 1	27 5 6	47	54	49	0	0	0
13	27 5 1	27 5 0	27 4 9	46	53	48	0	0	0
14	27 5 0	27 4 5	27 3 8	43	45	45	0	3,2	0,4
15	27 3 2	27 3 0	27 2 6	42	44	47	1,8	2,5	1,1
16	27 2 4	27 2 3	27 0 0	44	50	48	0,3	0,9	2
17	26 11 0	26 10 2	26 11 3	45	50	46	3,2	0	0,7
18	26 11 4	27 0 0	27 0 5	44	49	46	0,5	0	1,6
19	27 2 3	27 1 5	27 3 6	45	47	44	1,9	0	0,5
20	27 2 3	27 2 5	27 2 5	41	47	45	0	0	0,2
21	27 2 5	27 2 6	27 2 8	41	46	44	0,1	0,2	3,9
22	27 4 0	27 5 3	27 6 1	42	49	46	0	0	0
23	27 6 2	27 6 2	27 5 0	45	51	46	0,1	0,2	0
24	27 5 2	27 5 9	27 6 6	45	50	45	0,8	0,3	0
25	27 6 9	27 7 5	27 7 0	47	55	50	0	0	0
26	27 7 0	27 6 5	27 6 0	49	55	50	0	0,2	0
27	27 5 8	27 5 0	27 3 0	52	56	52	0,1	0,1	3,1
28	27 2 6	27 2 2	27 2 0	51	54	48	6,6	0	1

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
				P.	L.	D.
Maior elevação	27 10 2	Maior calor	- - 56			
Menor elevação	26 10 2	Menor calor	- 40			
Elevação media	27 5 5	Calor medio	- 45	4	8	5

MAR-

FEVEREIRO.

Ventos e estado do do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. sec. Ceo cl. e lind.	S. E. sec. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. alg. nuv. enter.
3	N. Ceo cub.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
4	N. O. Ceo cub.	N. O. nuv. enter. e car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
5	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.
6	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
7	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
8	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
9	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
10	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. muito br. Ceo cl. e lind.
11	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. m. br. Ceo cl. e lind.	N. muito br. Ceo cl.
12	Vario m. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	Vario Ceo cl. dep. cub.	N. O. e S. ao mesm. temp.	N. O. Ceo cub.
14	Muito vario Ceo cub.	Muito vario Ceo cub.	S. E. Ceo cub nuv. car.
15	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
16	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
17	N. E. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. E. Ceo cub. nuv. car.
18	N. E. Ceo cub. nuv. car.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt. e car.
19	O. dep. N. O. n. ent. e car.	N. O. nuv. enter. e car.	N. O. nuv. enter. e car.
20	S. E. br. Ceo cub.	S. E. br. Ceo c. dep. O. br.	O. br. nev. alt. dep. N. O. nuv. car.
21	N. O. n. s. e car. chuv. dep.	N. O. n. s. e car. chuv. dep.	N. O. nuv. solt. e car.
22	N. O. nuv. solt. e car.	N. O. n. s. dep. N. Ceo cl.	N. muito br. Ceo cub.
23	N. e S. e ao m. t. N. b. S. alt.	N. junt. a ter. e S. mais alt.	S. E. br. Ceo cub.
24	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.
25	S. E. junt. a ter. e N. O. alt.	N. alt. e S. E. junt. a ter.	S. nev. alt.
26	S. E. nev. alt. humidade.	S. nuv. car. nev. e humid.	S. O. br. nev. esp. e hum.
27	S. O. nev. esp. gr. hum.	S. O. Ceo cub. n. car. hum.	S. O. Ceo c. nuv. car. hum.
28	S. O. Ceo cub. n. car. hum.	O. Ceo c. dep. N. O. n. ent.	N. O. nuv. solt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
5	17	2	3	0	0

MARÇO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 2 9	27 3 0	27 4 8	45	49	44	1	0	0
2	27 5 0	27 5 0	27 4 5	35	42	41	0	0	0
3	27 4 0	27 3 6	27 1 2	42	51	50	0	0	1,8
4	27 0 4	27 0 8	27 3 0	44	50	48	4,4	0	0
5	27 4 1	27 4 6	27 5 0	44	52	50	0	0	0
6	27 4 2	27 3 2	27 1 0	47	55	52	0	0	8,4
7	27 0 9	27 1 0	27 1 5	51	55	54	0, 2	0, 4	0, 9
8	27 2 1	27 2 4	27 2 8	52	54	52	0, 5	0, 6	0, 8
9	27 2 0	27 1 0	27 3 0	49	55	54	2	0, 8	4, 4
10	27 4 0	27 4 6	27 4 0	51	54	53	0	0	0
11	27 3 6	27 3 0	27 1 0	52	57	56	0	0	0
12	27 0 5	27 0 0	26 0 6	52	58	55	0	0	0
13	26 11 0	27 0 0	27 0 2	50	55	52	0	0	0
14	27 0 4	27 1 0	27 1 5	49	56	52	0	0	0
15	27 2 0	27 2 9	27 2 4	49	55	51	0	0	0
16	27 1 0	27 0 8	27 2 0	48	56	52	0	3, 2	5
17	27 2 0	27 2 5	27 4 0	49	54	50	0, 7	1	0
18	27 5 0	27 5 9	27 5 2	50	56	52	0	0, 8	0, 6
19	27 4 6	27 4 9	27 5 1	47	57	53	0, 2	0, 1	0
20	27 5 2	27 5 4	27 5 2	49	59	53	0	0	0, 4
21	27 5 0	27 4 8	27 4 0	50	56	50	0, 3	0, 6	0
22	27 4 0	27 4 0	27 4 5	46	56	50	0	0, 2	0
23	27 4 8	27 4 6	27 5 0	48	57	52	0	0	0
24	27 4 8	27 4 6	27 3 9	49	58	52	0	0	2
25	27 4 8	27 5 0	27 5 1	48	52	49	0	0	0
26	27 5 6	27 6 2	27 7 1	44	54	48	0	0	0
27	27 7 0	27 6 6	27 5 8	44	53	51	0	0	0
28	27 5 0	27 3 2	27 1 0	48	54	50	0	1, 2	1, 5
29	27 2 0	27 2 8	27 3 0	49	56	51	1, 8	0	1, 5
30	27 2 3	27 1 5	27 2 5	52	53	52	0, 5	1, 4	4, 9
31	27 2 6	27 2 8	27 3 2	51	56	52	0, 8	2, 3	0, 3

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 7 1	Maior calor - -	58	Total da chuva		
Menor elevaçaõ	26 10 6	Menor calor -	35	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 3 0	Calor medio -	51	4	9	5

ABRIL

MARÇO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan	Tarde	Noite
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. nuv. ſolt. dep. N. E.
2	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. dep. N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
3	N. dep. N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
4	S. E. rij. Ceo c. nuv. car.	E. e S. E. dep. N. E. Ceo c.	N. O. br. Ceo cl.
5	N. O. m. br. C. cl. dep. cub.	N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.
6	S. E. Ceo cub.	O. rij. dep. S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car. hum.
7	S. O. rij. Ceo c. gr. hum.	O. rij. Ceo cub. humid.	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.
8	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.	S. O. rij. Ceo cub. hum.	S. O. br. Ceo cub. hum.
9	S. rij. Ceo cub. humid.	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.	S. O. Ceo cub. hum.
10	S. O. Ceo cub. humid.	S. O. Ceo cub. humid,	S. O. br. Ceo cub. hum.
11	S. muito rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
12	E. rij. junt. a ter. e S. alt.	S. rij. Ceo cub.	S. Ceo cub.
13	S. O. Ceo cub.	S. O. nuv. enter.	E. br. Ceo cl.
14	E. br. Ceo cl. dep. S. E.	S. e dep. S. O. nuv. enter.	S. O. nuv. enter.
15	S. O. br. nuv. enter.	O. br. nuv. enter.	S. E. br. Ceo cl. e lind.
16	S. E. rij. nev. alt.	S. E. m. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.
17	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.
18	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.	S. E. nev. alt.
19	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. br. alg. nuv. ſolt.
20	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. ao meſm. t.	S. E. Ceo cub.
21	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. dep. N. E. Ceo cl.
22	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. nuv. car.	N. br. Ceo cl. e lind.
23	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. n. car. dep. C. cl.	N. Ceo cl. e lind.
24	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. nuv. car.	S. E. Ceo cub.
25	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. Ceo cub.	N. br. Ceo cl. e lind.
26	E. br. dep. N. alg. nev. ſolt.	N. O. e S. E. alg. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	*	N. O. e S. E. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
28	S. E. Ceo cub.	S. O. gr. fur. e panc. de chu. p.	S. O. m. rij. Ceo c. nuv. car.
29	N. O. rij. nuv. car.	N. O. rij. nuv. car.	O. dep. S. O. m. r. C. c. n. car.
30	S. O. m. rij. Ceo cub. n. car.	O. e dep. N. O. nuv. car.	S. e N. O. rel. e torv. ao long. dep. S. O. rij.
31	O. m. rij. Ceo cub. n. car.	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
1	19	0	5	2	1

ABRIL

ABRIL DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 4 0	27 3 6	26 11 0	52	56	53	0	0	8,6
2	27 0 0	27 1 1	27 3 5	52	56	52	2,2	0,6	1
3	27 4 0	27 5 3	27 7 3	43	49	47	0	0	0
4	27 7 3	27 7 1	27 6 2	37	49	46	0	0	0
5	27 5 9	27 6 0	27 5 5	39	54	50	0	0	0
6	27 5 3	27 5 1	27 6 0	47	56	53	1	0,6	0,2
7	27 6 0	27 6 5	27 7 0	51	56	53	0,4	0,6	0,2
8	27 7 1	27 7 5	27 7 3	51	55	52	0,1	0	0
9	27 7 8	27 7 4	27 8 0	51	55	49	0	0	0
10	27 8 2	27 8 1	27 8 9	47	60	56	0	0	0
11	27 8 5	27 8 8	27 8 0	53	64	55	0	0	0
12	27 8 1	27 8 5	27 7 0	52	66	61	0	0	0
13	27 6 4	27 6 5	27 6 0	58	64	56	0	0	0
14	27 6 2	27 6 1	27 6 2	54	66	57	0	0	0
15	27 6 5	27 6 4	27 6 6	56	70	65	0	0	0
16	27 7 0	27 6 0	27 4 8	57	67	61	0	0,2	2,2
17	27 4 6	27 5 0	27 5 2	56	67	61	0	0	0
18	27 4 8	27 5 0	27 5 6	53	59	53	0,1	1,8	0,9
19	27 6 2	27 7 0	27 6 6	51	58	54	0	0	0
20	27 6 4	27 6 0	27 5 9	52	61	57	0	0,9	0
21	27 6 0	27 6 1	27 7 2	53	58	54	0	0	0
22	27 7 5	27 7 4	27 6 7	52	57	53	0	0	0
23	27 6 5	27 6 0	27 5 5	55	68	57	0	0	0
24	27 5 9	27 5 0	27 4 9	57	69	62	0	0	0
25	27 6 0	27 7 1	27 7 0	60	70	62	0	0	0
26	27 7 3	27 6 7	27 5 8	56	63	60	0	0	0
27	27 5 6	27 5 8	27 5 5	56	65	57	0	0	0
28	27 5 6	27 5 5	27 5 4	56	69	60	0	0	0
29	27 5 6	27 5 8	27 6 4	56	68	60	0	0	0
30	27 6 5	27 6 3	27 5 5	49	64	59	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
Maior elevaçaõ -	27 8 9	Maior calor - -	70	P.	L.	D.
Menor elevaçaõ	26 11 0	Menor calor -	37	1	9	6
Elevaçaõ media	27 6 0	Calor medio -	56			

ABRIL

ABRIL.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Tarde.
1	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. dep. S.	S. e O. nuv.car. gr. temp.
2	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij.C. cl.dep. N.O. rij. Ceo cl.
3	N. nuv. solt. e enter.	N.nuv.solt.dep.N.E.C.cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
5	E. Ceo cl. e lind.	E.junt. a ter.e S. alt.n.alt.	E.junt.a t.e S.O.alt.n.solt.
6	S.E.junt.a t.eS.O.alt.n.car.	S. nuv. car. gr. humid.	S. nuv.car.dep.O.br.C.cl.
7	O. dep. S. O. nuv. car.	S. O. nuv. car. nev. esp.	O. dep. N. O. Ceo cub.
8	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
9	N. alg. nuv. solt.	N. Ceo cl. e lind.	N.br.dep.N.E.C.cl.e lind.
10	E.e O.juntam.C.cl.e lind.	E.junt. a ter. e O.alt.Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
11	E. junt. a ter. e O. alt.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
12	E. junt. a ter. e S. O. alt. nev. alt. e rar.	E. junt. a ter. e S. O. alt. nev. alt. e rar.	E. muito br. Ceo cl.
13	E. junt. a ter. e S.alt. C.c.	E. e N. O. Ceo cub.	E.junt.a ter.eN.alt.dep.S.
14	N. e S. ao m. temp.	N. alt. e S. junt. a ter.	N. muito br.C. cl. e lind.
15	E.junt. a ter. e S.alt.C.cl.	E. muito br. Ceo cl.	E. e S. Ceo cl.
16	E.C.cl.dep.S.E.m.rij.C.c.	S. E. muito rij. Ceo cub.	S.E. Ceo cub. relamp.
17	S. E. dep. S. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
18	S. alt. e N. junt. a ter.	S. e N. nuv. car.	N. junt. a ter. e S. alt.
19	N. junt.a ter. e S.alt.C.c.	N.junt. a ter. e S.alt.C. c.	N. E. nev. alt. dep. C. cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	S.E.e N.O.torv.dep.N.E.	N. E. alg. nev. alt.
21	N. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.
22	N. E. nev. alt.	N.O.junt.a ter.e N.E.alt.	E. Ceo cl. e lind.
23	E. br. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
25	E. br. Ceo cl. e lind.	E. dep. S.E. alg.nuv.solt.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
26	O.junt.a ter.e E.alt. C. cl.	O. junt.a ter.e E.alt.C.cl.	N.O. Ceo cub. nev. alt.
27	N.O.C.c.d.N.e N.E.C.cl.	N. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. Ceo cl. e lind.	N. br. Ceo cl. e lind.	N. br. Ceo cl. e lind.
29	N.E.dep.E.Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	6	1	1	1	2

MAIO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan			Tarde			Noite			THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P.	L.	D.	P.	L.	D.	P.	L.	D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27	5	4	27	5	0	27	5	4	57	63	56	0	0	0
2	27	5	6	27	5	4	27	4	9	54	66	60	0	0	0
3	27	4	8	27	4	5	27	4	4	59	70	66	0	1,4	2,1
4	27	4	0	27	3	4	27	3	9	56	68	60	0	0	4,6
5	27	4	0	27	3	9	27	4	0	57	59	56	2,2	0,9	0
6	27	3	8	27	3	4	27	3	5	54	63	59	0	0	2,6
7	27	3	9	27	3	6	27	4	1	56	64	57	0,7	0,4	0
8	27	4	0	27	4	1	27	5	1	56	63	57	0	0,6	0
9	27	5	4	27	5	3	27	5	4	55	61	56	0,8	0,4	1,2
10	27	5	6	27	5	9	27	6	1	55	58	56	0	0	2,1
11	27	6	3	27	6	5	27	6	6	54	59	55	2,1	0	0
12	27	6	6	27	6	3	26	7	0	53	59	55	0	0	0
13	26	7	2	27	7	4	27	7	5	54	70	63	0	0	0
14	27	7	6	27	7	5	27	6	9	56	68	60	0	0	0
15	27	6	2	27	6	0	27	6	3	54	66	61	0	0	0
16	27	6	6	27	6	8	27	6	4	57	68	61	0	0	6
17	27	6	7	27	6	8	27	7	0	58	65	57	0	0	0
18	27	7	1	27	7	0	27	7	0	54	64	59	0	0	0
19	27	7	0	27	6	9	27	6	6	55	64	56	0	0	0
20	27	6	0	27	5	8	27	5	7	55	63	57	0	0	0
21	27	5	7	27	5	7	27	5	6	56	66	58	0	0	0
22	27	5	8	27	5	7	27	6	0	58	65	58	0,2	0,1	0
23	27	7	0	27	7	4	27	8	0	58	66	59	0,8	0	0
24	27	8	1	27	8	0	27	7	8	56	66	59	0	0	0
25	27	7	9	27	7	8	27	7	6	56	69	60	0	0	0
26	27	7	5	27	7	7	27	7	7	68	79	69	0	0	0
27	27	7	6	27	7	5	27	7	8	68	73	62	0	0	0
28	27	7	7	27	7	7	27	7	5	59	63	57	0	0	0
29	27	7	6	27	7	7	27	8	0	57	61	56	0	0	0
30	27	8	3	27	8	2	27	8	3	54	61	55	0	0	0
31	27	8	2	27	8	1	27	8	5	52	59	55	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.				
Maior elevação	27	8	3	Maior calor - -	79	Total da chuva	
Menor elevação	27	3	4	Menor calor -	53	P. L. D.	
Elevação media	27	6	3	Calor medio -	61	2 5 2	

MAIO

MAIO.

Ventos e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. junt. a ter. e S. E. alt.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	E. junt. a ter. e S. O. alt.	S. E. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl.
3	S. E. alg. nuv. solt.	S. e N. O. nuv. car. torv.	S. nuv. car.
4	S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car.
5	S. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. br. alg. nuv. solt.
6	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. nuv. car.
7	S. E. Ceo cub. nuv. car.	N. E. e S.E. torv. ao long.	S. E. Ceo cub.
8	N. O. junt. a ter. e S.E. alt.	N. O. e S.E. nuv. car. torv.	N. E. br. Ceo cl.
9	N. E. C. cl. N. O. C. cub.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
10	N. O Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
11	N. O. rij. C cub. nuv. car.	N. O. rij. nuv. car.	N. rij. nuv. solt. e enter.
12	N. rij. nuv. solt. e enter.	N. rij. nuv. solt. e enter.	E. nuv. solt.
13	E. nuv. solt.	E. nuv. solt.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl.
15	E. Ceo cl. e lind.	E. alg. nuv. solt.	S. E. Ceo cub.
16	S. E. Ceo cub.	S. E. e O. dep. N. O. n. solt.	N. O. Ceo cl. e lind.
17	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. O. dep. E. br. C. cl. e lind.
18	E. br. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. dep. alg. nuv. solt.	N. nev. alt.
19	N. nev. alt. dep. E. br. C. cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. C. cl. e lind. dep. N. O. nev. alt.
20	O. alg. nuv. solt.	O. rij. alg. nuv. solt.	S. O. nuv. car.
21	S. O. nuv. solt. e car.	S. O. nuv. solt. e car.	S. O. dep. S. Ceo cub.
22	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
23	S. O. Ceo cub.	S. O. dep. O Ceo cub.	N. nev. alt.
24	N. E. nev. alt.	N. E. nev. alt.	N. E. nev. alt.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. C. cl. e lind. torv. ao long.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. C. cl. dep. N. O. n. esp.	N. O. nev. esp.
28	N. O. rij. nev. alt.	N. O. rij. nev. alt.	N. O. rij. nev. alt.
29	N. O. rij. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. rij. nev. alt.
30	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.
31	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
8	10	1	0	0	4

JU-

JUNHO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	BAROMETRO. Tarde P. L. D.	BAROMETRO. Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	THERMOMETRO. T. Grad. de Farenhei.	THERMOMETRO. N. Grad. de Farenhei.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
1	27 8 4	27 8 1	27 7 8	51	65	57	0	0	0
2	27 7 9	27 7 8	27 7 2	54	64	56	0	0	0
3	27 7 0	27 7 9	27 7 0	55	65	59	0	0,1	2,3
4	27 7 5	27 7 8	27 8 0	59	66	60	0	0	0
5	27 8 4	27 8 5	27 8 3	58	68	60	0	0	0
6	27 8 3	27 8 0	27 7 9	58	68	61	0	0	0
7	27 8 1	27 8 5	27 8 9	59	68	63	0	0	0
8	27 8 8	27 8 4	27 8 6	60	67	60	0	0	0
9	27 8 7	27 8 4	27 8 6	56	74	66	0	0	0
10	27 9 0	27 8 3	27 8 3	67	82	68	0	0	0
11	27 8 1	27 8 2	27 8 2	66	84	69	0	0	0
12	27 8 0	27 7 8	27 7 5	69	82	70	0	0	0
13	27 7 0	27 6 8	27 5 9	69	82	71	0	0	0
14	27 5 9	27 6 0	27 6 0	71	81	70	0	0	0
15	27 6 0	27 6 5	27 6 7	65	76	65	0	0	0
16	27 6 8	27 6 9	27 7 3	64	74	65	0	0	0
17	27 7 9	27 8 3	27 8 0	63	76	65	0	0	0
18	27 8 0	27 7 9	27 7 8	61	72	64	0	0	0
19	27 7 6	27 7 6	27 7 9	65	70	65	0	0	0
20	27 8 1	27 7 8	27 7 2	63	70	64	0	0	0
21	27 6 8	27 6 1	27 6 6	64	72	65	0	0	0
22	27 6 5	27 6 9	27 7 0	64	73	66	0	0	0
23	27 7 1	27 6 8	27 6 7	62	73	66	0	0	0
24	27 7 0	27 6 8	27 6 7	64	73	68	0	0	0
25	27 6 9	27 6 6	27 6 8	63	72	67	0	0	0
26	27 6 5	27 6 4	27 6 7	62	71	66	4,8	0	0
27	27 7 0	27 6 9	27 7 1	62	72	67	1,6	0	0
28	27 7 4	27 7 3	27 7 6	63	73	67	0	0	0
29	27 7 8	27 7 6	27 7 4	64	72	66	0	0	0
30	27 7 3	27 6 9	27 7 1	64	73	65	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.
Maior elevaçaõ	27 9 0	Maior calor	84	P. L. D.
Menor elevaçaõ	27 5 9	Menor calor	51	0 8 8
Elevaçaõ media	27 7 4	Calor medio	62	

JU-

JUNHO.

Ventos e estado do do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	O. Ceo cl.	O. Ceo cl.	O. dep. S. O. Ceo cl.
3	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
4	S. O dep. O. Ceo cub.	O. dep. N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. nev. alt.
6	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt.
7	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt.
8	N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. dep. N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	O. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	E. dep. S. E. Ceo cub.	O. br. Ceo cl. e lind.	O. muito br. Ceo cl. dep. S. nuv. solt.
15	S. Ceo cub.	O. br. Ceo cl. e lind.	N. O. dep. S. Ceo cub.
16	S. alg. nuv.	N. O. alg. nuv. solt.	N. O. Ceo. cl. e lind.
17	N. O. alg. nuv. solt.	N. O. alg. nuv. solt.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. alg. nuv. solt.	N. nuv. solt.	N. nuv. solt.
20	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.
21	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	Vario: Ceo cub.	Vario: Ceo cub.	N. Ceo cl. e lind.
23	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
24	O. Ceo cl.	O. alg. nuv.	O. nuv. solt.
25	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.
26	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.
27	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.
28	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	N. nuv. solt.
29	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	N. O. nuv. solt.
30	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. Ceo cub.	N. E. nuv. solt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	2	0	0	0	0

JULHO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan	BAROMETRO. Tarde	BAROMETRO. Noite	THERMOMETRO. M.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M.	PLUVIMETRO. T.	PLUVIMETRO. N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 6	27 7 8	27 7 7	64	72	65	0	0	0
2	27 7 5	27 7 9	27 7 8	66	73	64	0	0	0
3	27 7 7	27 7 6	27 7 4	64	78	66	0	0	0
4	27 7 3	27 7 1	27 7 4	67	79	70	0	0	0
5	27 7 5	27 7 2	27 6 7	65	72	65	0	0	0
6	27 6 8	27 6 6	27 6 5	60	73	64	0	0	0
7	27 6 6	27 6 5	27 6 6	60	76	66	0	0	0
8	27 6 8	27 7 0	27 7 7	60	87	74	0	0	0
9	27 7 8	27 7 6	27 7 5	70	85	75	0	0	0
10	27 7 4	27 7 2	27 7 0	75	83	73	0	0	0
11	27 6 8	27 6 7	27 6 4	72	78	71	0	0	0
12	27 6 2	27 6 0	27 6 0	66	75	67	0	0	0
13	27 6 2	27 6 4	27 6 5	65	70	65	0	0	0
14	27 6 4	27 6 5	27 6 8	62	70	65	0	0	0,8
15	27 7 0	27 7 3	27 7 8	61	70	66	0	0	0
16	27 8 0	27 7 7	27 7 9	61	74	63	0	0	0
17	27 7 8	27 7 7	27 7 6	66	83	70	0	0	0
18	27 7 6	27 7 5	27 7 0	63	73	64	0	0	0
19	27 6 9	27 6 7	27 6 7	62	70	65	0	0	0
20	27 6 8	27 6 5	27 6 7	64	69	64	0	0	0
21	27 7 0	27 7 2	27 8 3	60	70	65	0	0	0
22	27 8 4	27 8 5	27 9 0	60	70	64	0	0	0
23	27 8 7	27 8 5	27 8 1	60	73	65	0	0	0
24	27 7 6	27 7 0	27 6 4	63	81	75	0	0	0
25	27 6 4	27 6 2	27 5 9	72	83	68	0	0	0
26	27 6 8	27 7 0	27 7 5	62	71	66	0	0	0
27	27 7 8	27 8 0	27 8 4	64	71	64	0	0	0
28	27 8 3	27 8 3	27 8 2	59	71	62	0	0	0
29	27 8 3	27 8 0	27 7 7	59	75	63	0	0	0
30	27 7 5	27 7 3	27 7 0	62	73	65	0	0	0
31	27 6 7	27 6 6	27 6 5	63	74	67	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 9 0	Maior calor	83	Total da chuva.		
Menor elevaçaõ	27 5 9	Menor calor	59	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 7 3	Calor medio	45	0	0	0,8

JU-

JULHO.

Ventos e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan	Tarde	Noite
1	N. alg. nuv. folt.	N. nuv. folt.	N. Ceo cl.
2	N. nuv. folt.	N. nuv. folt.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
6	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. E. dep. E. C. cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
9	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
10	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
11	O. Ceo cl.	O. Ceo cl.	O. br. Ceo cl. e lind.
12	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.
13	O. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
14	O. rij. Ceo cub.	N. O. nuv. folt.	N. O. nuv. folt.
15	O. br. nuv. folt.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
16	N. Ceo. cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
17	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind. dep. N. muito rij.	N. rij. Ceo cl. e lind.
19	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt. Ceo cub.
20	N. nuv. folt. e enter.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
21	N. nuv. folt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.
25	N. Ceo cub.	N. e S. O. Ceo cub.	N. Ceo cub.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cub.
30	N. Ceo cl.	N. nuv. enterromp.	N. Ceo enev.
31	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
23	0	0	0	0	0

AGOS-

AGOSTO DE 1785.

	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
Dias do mez.	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 6 4	27 6 2	27 5 6	64	73	66	0	0	0
2	27 5 0	27 4 7	27 4 5	63	70	65	0	0	2,6
3	27 5 4	27 5 7	27 6 2	63	68	63	2,8	0,8	2,6
4	27 7 1	27 7 1	27 7 3	60	70	65	0	3	0
5	27 7 1	27 6 9	27 7 0	61	72	65	0	0	0
6	27 7 1	27 7 0	27 6 0	62	71	66	0	0	0
7	27 5 7	27 5 4	27 5 2	60	70	65	0	0	0
8	27 6 3	27 6 4	27 6 7	59	69	66	0	0	0
9	27 7 2	27 7 0	27 6 3	60	72	64	0	0	0
10	27 6 4	27 6 2	27 6 2	59	69	65	0	0	0
11	27 6 4	27 6 3	27 6 6	58	73	64	0	0	0
12	27 7 2	27 7 3	27 7 7	59	72	63	0	0	0
13	26 7 8	27 7 6	27 7 5	60	73	65	0	0	0
14	27 7 0	27 6 8	27 6 2	60	69	63	0	0	0
15	27 6 0	27 5 8	27 6 0	60	72	66	0	0	0
16	27 5 7	27 5 9	27 5 9	61	70	64	0	0	0
17	27 6 0	27 6 7	27 7 2	62	66	63	0	0	0
18	27 7 3	27 7 4	27 7 6	60	67	63	0	0	0
19	27 6 8	27 6 7	27 6 7	61	67	64	0	0	0
20	27 6 0	27 6 6	27 6 2	63	66	62	0	0	0
21	27 5 9	27 6 0	27 5 8	63	70	65	0	0	0
22	27 6 6	27 7 2	27 7 2	60	74	65	0	0	0
23	27 7 6	27 7 9	27 7 4	61	74	69	0	0	0
24	27 7 4	27 6 8	27 7 0	63	72	67	0	0	0
25	27 7 1	27 7 2	27 7 4	63	72	68	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 6	63	70	65	0	0	0
27	27 7 8	27 7 7	27 7 8	59	71	64	0	0	0
28	27 8 4	27 8 2	27 8 3	61	74	69	0	0	0
29	27 7 7	27 7 4	27 6 8	66	75	68	0	0	0
30	27 7 1	27 6 8	27 6 4	65	73	67	0	0	0
31	27 7 0	27 7 2	27 7 3	46	72	64	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 8 4	Maior calor - -	75	Total da chuva		
Menor elevaçaõ	27 4 5	Menor calor -	58	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 6 6	Calor medio -	65	0	11	8

MAIO

AGOSTO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl.	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.
2	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.	O. Ceo cub. torv.
3	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. nuv. ſolt.
4	N. O. nuv. ſolt.	N. O. nuv. ſolt.	O. br. nuv. ſolt.
5	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.
6	N. nuv. ſolt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
7	N. rij. alg. nuv.	N. rij. Ceo cub.	N. Ceo cub.
8	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
10	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
11	N. nev. eſp. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind. no f. nev. alt.	N. E. nev. alt.
12	N. nev. alt. dep. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. C cl. e lind. dep. nev. alt.
14	N. E. nev. alt. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. nev. alt. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
16	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt. dep. Ceo cl.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
19	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
23	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. nev. alt.
24	N. O. nev. alt.	N. O. alg. nuv. ſolt.	N. O. nev. alt. Ceo cub.
25	N. O. Ceo cub. nev. alt.	N. O. nuv. inter.	N. nev. alt.
26	N. O. Ceo cub.	N. E. nuv. inter.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
29	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. nev. alt.
30	O. Ceo cl.	O. e N. O. nuv. ſolt.	N. O. Ceo cub.
31	N. E. nev. eſp. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
21	2	0	0	0	0

SETEMBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.			BAROMETRO. Tarde P. L. D.			BAROMETRO. Noite P. L. D.			THERMOMETRO. M.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
	P.	L.	D.	P.	L.	D.	P.	L.	D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27	7	2	27	7	1	27	7	3	63	72	66	0	0	0
2	27	7	3	27	7	2	27	8	0	65	74	70	0	0	0
3	27	7	9	27	7	6	27	7	0	64	71	64	0	0	0
4	27	6	8	27	6	7	27	6	0	59	70	64	0	0	0
5	27	5	7	27	5	6	27	5	9	66	72	66	0	0	0
6	27	6	0	27	6	3	27	6	8	65	72	64	2	4	6
7	27	7	2	27	7	8	27	7	8	64	68	65	3,9	0	0
8	27	7	9	27	7	6	27	7	0	60	67	64	0	0	0
9	27	6	3	27	6	1	27	5	6	59	69	66	0	0	0
10	27	6	4	27	7	5	27	7	9	66	68	65	4,4	0	0
11	27	9	0	27	9	3	27	8	6	62	69	61	0	0	0
12	27	8	4	27	8	0	27	7	8	58	68	64	0	0	0
13	27	7	4	27	7	2	27	7	0	64	70	65	0	0	0
14	27	7	2	27	7	2	27	7	4	61	70	65	0	0	0
15	27	7	5	27	7	8	27	7	7	61	68	66	0	0	0
16	27	7	5	27	7	5	27	7	1	62	67	65	0	0	0
17	27	7	3	27	7	8	27	8	0	58	69	63	0	0	0
18	27	8	4	27	8	6	27	8	5	63	70	64	0	0	0
19	27	8	6	27	8	6	27	8	2	64	72	67	0	0	0
20	27	7	7	27	6	8	27	7	0	63	72	66	0	0	1,7
21	27	6	7	27	6	6	27	7	2	63	71	66	0	0	0
22	27	6	6	27	5	9	27	4	5	63	67	64	0,5	0	0
23	27	4	3	27	3	8	27	2	2	65	66	64	15,8	0	3
24	27	2	0	27	1	9	27	4	4	65	67	64	1,4	2,3	0
25	27	5	5	27	6	0	27	6	8	64	70	65	0	0	0
26	27	7	1	27	7	2	27	8	0	66	71	66	0	0	0,6
27	27	8	3	27	8	3	27	8	4	67	72	68	0	0	0
28	27	8	4	27	8	5	27	8	0	66	76	68	0	0	0
29	27	7	5	27	7	7	27	7	5	66	79	70	0	0	0
30	27	7	4	27	6	7	27	6	3	70	80	71	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 9 3	Maior calor	80	Total da chuva.		
Menor elevaçaõ	27 1 9	Menor calor	58	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 7 0	Calor medio	66	3	9	1

SE-

SETEMBRO.

Ventos e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. nev. esp. dep. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.
2	N. O. nev. alt. dep. C. cl.	N. O. e O. nuv. solt.	N. O. C. cl. dep. nev. esp.
3	N. nev. esp. e hum.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
4	N. Ceo cub. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O. nev. alt. dep. S. O. Ceo cub.
5	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. rij. dep. S. Ceo cub.
6	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
7	S. Ceo cub.	O. nuv. solt. dep. N. C. cl.	N. Ceo cl.
8	N. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
9	N. C. cl. dep. S. O. rij. C. cub.	S. O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
10	S. O. dep. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. dep. N. Ceo cl.
11	N. E. dep. O. nuv. solt.	N. E. nuv. solt.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. dep. O. C. cl. e lind.	N. E. dep. N. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.
14	N. Ceo cl.	N. dep. N. O. nuv. solt.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. nuv. solt.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. nev. esp. dep. C. cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. dep. O. nev. alt.	S. O. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. C. cl. dep. O. C. cub.	S. O. Ceo cub.	N. br. Ceo cl. e lind.
22	N. O. nev. esp. dep. S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. Ceo cub.
23	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
24	S. Ceo cub.	S. rij. de temp. Ceo cub.	S. Ceo cub.
25	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. Ceo cub.
26	S. e S. E. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nev. esp.
27	S. Ceo cub. nev. esp.	S. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl. e lind.
28	E. Ceo cl. e lind.	O. muito br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. junt. a ter. e N. O. alt.	O. Ceo cl.	O. br. Ceo cub.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	6	1	0	0	0

OCTU-

OUTUBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 6 4	27 6 4	27 6 5	68	74	67	0	0	0
2	27 7 0	27 7 0	27 7 3	65	70	66	0	0	0
3	27 7 5	27 7 3	27 7 4	64	69	55	0	0	0
4	27 7 6	27 7 4	27 7 5	61	67	57	0	0	0
5	27 7 8	27 7 6	27 7 9	59	66	61	0	0	0
6	27 7 9	27 7 8	27 9 2	58	67	64	0	0	0
7	27 9 0	27 8 7	27 8 0	59	67	62	0	0	0
8	27 7 9	27 7 6	27 7 5	62	68	63	0	0	0
9	27 7 5	27 7 4	27 7 6	62	77	64	0	0	0
10	27 7 6	27 7 4	27 7 5	58	67	61	0	0	0
11	27 7 5	27 7 4	27 7 6	59	70	64	0	0	0
12	27 8 0	27 8 2	27 9 2	62	69	66	0	0	0
13	27 9 3	27 9 3	27 9 2	62	71	67	0	0	0
14	27 9 7	27 9 0	27 8 2	65	75	67	0	0	0
15	27 8 0	27 7 5	27 6 7	65	75	70	0	0	0
16	27 6 4	27 6 3	27 6 4	64	76	71	0	0	0
17	27 6 5	27 6 0	27 6 4	65	73	71	0	0	4,3
18	27 6 9	27 6 8	27 6 3	62	67	64	0	0	0
19	27 6 6	27 6 7	27 6 8	60	68	65	0	0	0
20	27 6 9	27 6 7	27 6 2	64	68	64	0	0	0
21	27 6 8	27 6 9	27 7 2	56	67	64	0	0	0
22	27 7 8	27 7 8	27 7 7	55	64	60	0	0	0
23	27 7 4	27 6 6	27 4 1	56	65	60	0	0	0
24	27 4 4	27 4 1	27 4 6	60	65	61	5	0	0
25	27 5 0	27 4 8	27 4 7	62	68	66	0	0	10,5
26	27 4 8	27 4 8	27 6 3	62	67	60	0	0	0
27	27 6 6	27 7 1	27 8 3	57	60	56	0	0	0
28	27 8 4	27 8 4	27 8 5	48	58	56	0	0	0
29	27 8 7	27 8 7	27 8 8	50	58	55	0	0	0
30	27 8 6	27 8 5	27 8 6	51	63	60	0	0	0
31	27 8 0	27 7 1	27 6 7	53	63	54	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevaçaõ	27 9 7	Maior calor	77	Total da chuva.
Menor elevaçaõ	27 4 1	Menor calor	50	P. L. D.
Elevaçaõ media	27 7 3	Calor medio	63	1 7 8

OUTU-

OUTUBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
2	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. ceo cl.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cub. nuv. ſolt.	N. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. alg. nuv. ſolt.	N. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. Ceo cub. nev. alt.	N. alg. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	O. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
14	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
15	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl. e lind.
16	S. E. e E. Ceo cl. e lind.	S. E. e S. rij. C. cl e lin.	S. Ceo cl.
17	E. rij. Ceo cub.	E. Ceo cub.	S. e N. O. C. cub. torv. rij.
18	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. Ceo cub.
19	N. E. Ceo cub. nev. alt.	N. nuv. enter.	N. C. cl. e lind. dep. nev. eſp
20	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl. alg. nuv. ſolt.	N. Ceo cl. e lind.
21	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. dep. N. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. O. dep. S. E. rij. C. cub.
24	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
25	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. e S. rij. Ceo cub. torv. long.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
26	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. dep. N. E.	N. Ceo cub.
27	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
16	2	1	0	1	2

NOVEMBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan			Tarde			Noite			THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P.	L.	D.	P.	L.	D.	P.	L.	D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27	6	5	27	6	4	27	6	3	55	63	60	0	0	0
2	27	6	5	27	7	8	27	8	4	59	62	60	0	0	0
3	27	9	1	27	8	7	27	8	0	55	62	58	0	0	0
4	27	8	4	27	7	7	27	7	0	54	66	63	0	0	0
5	27	7	6	27	5	5	27	6	4	59	64	60	0	0	2
6	27	7	9	27	8	4	27	9	2	57	62	60	0	0	0
7	27	9	5	27	9	1	27	9	0	48	60	55	0	0	0
8	27	9	1	27	9	1	27	8	7	50	60	57	0	0	0
9	27	8	5	27	8	0	27	7	8	50	60	56	0	0	0
10	27	7	7	27	7	2	27	7	7	48	56	50	0	0	0
11	27	7	9	27	7	5	27	7	4	43	53	49	0	0	0
12	27	7	4	27	7	0	27	6	6	44	54	50	0	0	0
13	27	6	2	27	5	9	27	5	7	45	56	51	0	0	0
14	27	5	6	27	5	2	27	7	3	48	58	52	0	0	0
15	27	5	5	27	5	2	27	5	9	48	59	55	0	0	0
16	27	6	3	27	6	5	27	7	3	54	60	54	0	0	0
17	27	6	6	27	6	3	27	6	0	57	64	55	0	0	1,5
18	27	5	0	27	4	4	27	3	8	58	63	60	2	0	2
19	27	4	0	27	5	2	27	6	5	58	64	52	1,5	1,5	0
20	27	6	9	27	7	1	27	6	9	52	56	54	0	0	0
21	27	7	2	27	8	0	27	8	1	43	50	47	0	0	0
22	27	8	5	27	8	3	27	8	6	43	50	48	0	0	0
23	27	8	7	27	8	4	27	8	7	42	49	47	0	0	0
24	27	7	7	27	7	4	27	7	5	44	51	47	0	0	0
25	27	7	8	27	7	9	27	8	4	48	53	51	0	0	0
26	27	8	7	27	8	1	27	4	8	48	54	52	0	0	1,2
27	27	5	0	27	5	4	27	6	4	53	55	50	0,2	0,2	0,8
28	27	6	8	27	7	6	27	8	3	51	58	53	0	0	2,2
29	27	8	4	27	8	0	27	7	3	56	59	58	0	0	0
30	27	6	4	27	6	8	27	8	0	56	58	57	0,5	2,3	1,4

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.					
Maior elevaçaõ -	27	9	5	Maior calor - -	64	Total da chuva.		
						P.	L.	D.
Menor elevaçaõ	27	3	8	Menor calor -	42			
Elevaçaõ media	27	7	3	Calor medio -	54	1	7	3

NO-

NOVEMBRO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.
2	S. O. Ceo cub.	N. alg. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	S. O. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub. dep. N.
6	N. rij. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. E. Ceo. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. Ceo cl. e lind	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. E. nev. alt.
16	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
17	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
18	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
19	S. O. Ceo cub.	O. Ceo cub. dep. N. O.	N. O. nuv. ſolt.
20	N. nuv. ſolt.	N. nuv. ſolt.	N. E. nuv.
21	N. E. rij. alg. nuv. ſolt.	N. E. rij. alg. nuv. ſolt.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. Ceo cub.	N. nuv. ſolt.	N. Ceo cl.
26	N. Ceo cl.	N. O. dep. O. nuv. ſolt.	O. dep. S. O. Ceo cub.
27	S. O. dep. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
28	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
29	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
30	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. nuv. ſolt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
26	5	0	0	0	0

DE-

DEZEMBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan	Tarde	Noite	THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 8 9	27 8 6	27 9 4	50	53	51	0	0	0
2	27 9 3	27 9 2	27 8 5	48	56	54	0	0	2,2
3	27 8 3	27 7 8	27 7 6	56	60	57	1,4	0,8	4,3
4	27 8 9	27 9 6	27 9 8	54	55	53	0	0	0
5	27 9 1	27 8 7	27 6 0	50	55	54	0	0	0,3
6	27 5 6	27 5 9	27 9 0	54	55	51	4,3	0,2	3
7	27 9 7	27 8 8	27 8 3	47	54	53	0,2	0	2,7
8	27 8 4	27 8 8	27 7 4	53	56	54	0,3	0	5
9	27 7 1	27 6 4	27 4 8	53	54	53	0	0,1	2,3
10	27 4 3	27 4 1	27 2 4	49	53	51	0	0	1,9
11	27 0 8	27 1 9	27 2 1	54	53	50	0	4,1	1,5
12	27 2 7	27 3 5	27 5 4	49	53	52	0,2	0	1,5
13	27 6 8	27 7 3	27 8 3	48	53	49	0	0	0
14	27 8 5	27 8 3	27 8 4	48	54	52	0	0	0
15	27 8 1	27 7 8	27 6 6	49	54	51	0	0	0
16	27 5 8	27 5 3	27 6 1	52	56	53	0	0,5	5
17	27 6 8	27 7 5	27 7 8	50	53	49	0	0	0
18	27 7 5	27 7 4	27 7 0	44	52	48	0	0	0
19	27 6 7	27 6 2	27 6 1	43	53	51	0	0	0
20	27 5 9	27 5 9	27 4 8	48	55	52	0	0	0
21	27 4 0	27 3 4	27 2 7	50	58	54	0	0,2	1,2
22	27 1 6	27 0 7	26 11 1	52	54	52	0	1,2	4,4
23	26 11 7	26 11 8	27 0 6	53	54	52	0,3	0	1,3
24	26 11 0	27 0 2	27 2 2	50	54	52	0	0	1,1
25	27 1 3	27 0 9	27 0 4	49	56	53	0	0	4,6
26	27 2 0	27 2 1	26 9 6	50	54	50	0	0	11,4
27	26 9 4	26 10 3	27 1 0	50	52	50	0	3,2	0,5
28	27 1 8	27 2 7	27 1 3	49	50	49	2,4	1,9	0
29	27 0 5	27 0 2	27 0 0	46	50	46	0	0	6
30	27 0 0	26 11 6	26 10 7	48	53	50	0	0	0
31	27 0 0	27 1 4	27 2 9	52	53	50	0,2	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.				
Maior elevaçaõ	27 9 7	Maior calor - -	60	Total da chuva	
Menor elevaçaõ	26 9 4	Menor calor -	43	P. L. D.	
Elevaçaõ media	27 3 3	Calor medio -	51	6 9 4	

DE-

DEZEMBRO.

Ventos e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
2	N. E. Ceo cl.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
3	S. O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub.
4	N. alg. nuv. solt.	N. alg. nuv. solt.	N. E. br. Ceo cl.
5	N. Ceo cub.	N. dep. O. e S. O.C. cub.	S. O. rij. Ceo cub.
6	S. O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub.	O. rij. dep. N.
7	N. e N. E. Ceo cub.	N. dep. O. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cub.
8	N. O. br. Ceo cub,	N. O. br. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cub.
9	O Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
10	N. nev. alt. dep. N. O.	O. Ceo cub.	O. rij. dep. S. O. C. cub.
11	S. O. muito rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. Ceo cub. dep. O.	O. rij. dep. S. O. nuv. enter.
12	O. e S. O. rij. Ceo cub.	O. muito rij. nuv. solt.	O. rij. nuv. solt..
13	O. rij. nuv. solt.	O. br. Ceo cl.	E. br. e baixo e O. br. alt.
14	E. br. Ceo cl.	E. e O. br. Ceo cl.	O. br. Ceo. cl.
15	E. br. Ceo cl. e lind.	O. br. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. S. O. Ceo cub.
16	S. O. br. Ceo cub.	O. br. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
17	N. nuv. solt.	N. E. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
18	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
19	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. C. cub. nev. esp. hum.
21	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	E. C. cub. nev. esp. hum.
22	S. E. C. cub. nev. esp. hum.	S. E. C. cub. nev. esp. hum.	S. E. C. cub. nev. esp. hum.
23	S. E. dep. O. Ceo cub. nev. esp. hum.	S. O. Ceo cub. nev. esp. hum.	O. Ceo cub. nev. esp.
24	O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
25	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. e N. O. torv. e temp.
26	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. C. cub.
27	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. rij. Ceo cub.	S. dep. N. O. C. cub.
28	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. dep. O. Ceo cub.
29	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	S. O. Ceo cub.
30	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. muito rij. de temp. Ceo cub.
31	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. rij. Ceo cub.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
7	20	4	2	3	1

Rezultado de todo o Anno

BAROMETRO.				THEMOMETRO		PLUVIMETRO.		
	P.	L.	D.			Total da chuva		
Maior elevaçaõ	27	10	2	Maior calor - - -	84	P.	L	D
Menor elvaeçaõ	26	9	6	Menor calor - -	35	38	2	1
Elevaçaõ media	27	4	4	Calor medio - -	58			

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
145	95	10	14	12	11

ESte anno foi geralmente fertil, e abundante: a producçaõ, e colheita dos grãos foi muito boa, principalmente a dos milhos: com tudo as fementeiras temporans do trigo, e as ferodias da fevada produziraõ mais, e melhor: houve baftante vinho, e muito azeite: as frutas do fedo foraõ em abundancia, as do tarde naõ vingaraõ taõ bem: a producçaõ do gado foi abundante, e a fua creaçaõ feliz.

Efte anno foi doentio mais que o paffado: além das moleftias ordinarias das eftações grafaraõ na Primavera humas diarreias epidemicas: principiavaõ com ameaços de vertigens, vomitos, meteorifmo do ventre, &c. a duraçaõ d'efta moleftia naõ paffava ordinariamente de finco dias, e cedia facilmente ao ufo dos abforventes, e diluentes, e ás fangrias, quando eraõ mais inflamatorias. No veraõ foi muito geral huma Ophtalmia: efta moleftia cedia bem ao ufo dos vitriolados, e agoa fria. No fim do veraõ, e por todo o Outono reináraõ com exceffo as febres intermitentes; mas cediaõ bem ao ufo dos emeticos, purgantes, fangrias, e quina: nos ultimos mezes d'efte anno tem havido baftantes bexigas.

AN-

ANNO DE 1785.

A Freguezia de Santo André d'esta Villa de Mafra, no destricto de pouco mais de huma legoa, consta de 648 fogos, nestes houve este anno o seguinte.

Pessoas de Communhaõ - - - - -	2$)122
Menores - - - - - - - - - -	$)182
Total - -	2$)304
Nascêraõ	
Meninos - - - - - - - - - - - -	49
Meninas - - - - - - - - - - - -	40
Total - -	89
Morrêraõ	
Homens - - - - - - - - - - - -	23
Mulheres - - - - - - - - - - - -	16
Meninos - - - - - - - - - - - -	12
Meninas - - - - - - - - - - - -	11
Total - -	62
Cazamentos em todo o anno - - -	28

OBSER-

OBSERVAÇÕES METEOROLOGICAS

Feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1786.

POR D. JOAQUIM DA ASSUMPÇAÕ VELHO.

A'S prefentes Obfervações foraõ feitas com os mefmos Inftrumentos, e do mefmo modo, que as do anno precedente.

JANEIRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan	BAROMETRO. Tarde	BAROMETRO. Noite	THERMOMETRO. M.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M.	PLUVIMETRO. T.	PLUVIMETRO. N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 3 8	27 2 7	26 10 3	47	50	49	0	0	5,5
2	26 7 8	26 6 5	27 0 4	44	50	47	15,9	7,3	1,9
3	27 4 2	27 7 8	27 9 1	45	44	42	0	0	0
4	27 8 9	27 8 7	27 7 4	36	44	42	0	0	0
5	27 6 7	27 6 6	27 6 3	40	53	52	0	0	0
6	27 6 3	27 6 0	27 7 3	56	58	53	2,3	3	1,5
7	27 8 1	27 8 8	27 7 8	55	58	56	0,2	0,1	1,4
8	27 6 6	27 5 4	27 6 7	56	58	57	1,3	0	6,7
9	27 6 4	27 6 1	27 2 3	50	55	54	0	0	2,8
10	27 1 2	27 0 5	27 0 0	54	56	52	0	1	1,6
11	27 0 0	27 1 6	27 2 5	49	52	50	0,2		
12	27 3 4	27 5 3	27 5 7	46	54	47	1,6	0,4	1,7
13	27 4 9	27 4 7	27 4 6	47	52	50	1,3	0	2,4
14	27 4 2	27 3 7	27 3 0	54	55	54	0,5	1,8	3
15	27 3 5	27 5 2	27 7 0	54	56	53	0,5	0	0
16	27 7 0	27 6 7	27 1 0	49	52	50	0,8	0	2
17	27 4 0	27 4 4	27 4 4	53	52	50	0,6	0,4	1,4
18	27 3 3	27 1 9	27 0 0	48	52	48	1,6	0	3
19	27 2 1	27 4 5	27 7 0	50	53	50	0,5	0	0
20	27 7 4	27 7 8	27 9 0	45	51	49	0	0	0
21	27 9 5	27 9 7	27 10 8	49	55	53	0	0	0
22	27 11 3	27 10 7	27 11 2	40	56	53	0	0	0
23	27 10 6	27 10 0	27 8 1	49	55	53	0	0	0
24	27 7 3	27 6 5	27 7 4	50	55	53	0	0,6	1,2
25	27 8 0	27 8 3	27 9 0	47	51	49	0	0	0
26	27 9 3	27 9 6	27 10 5	46	56	53	0	0	0
27	27 11 4	27 11 1	27 11 1	47	56	54	0	0	0
28	27 11 7	27 11 0	27 10 8	50	56	53	0	0	0
29	27 10 3	27 10 2	27 10 1	49	58	54	0	0	0
30	27 10 5	27 10 1	27 10 4	49	58	55	0	0	0
31	27 11 1	27 10 9	27 11 1	47	56	50	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevação	27 11 7	Maior calor - -	58	Total da chuva.
Menor elevação	26 6 5	Menor calor -	36	P. L. D.
Elevação media	27 3 2	Calor medio -	51	6 6 0

JANEIRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. E. muito rij. de temp. Ceo cub.
2	S. E. muito rij. de temp. trov.	S. E. rij. Ceo cub. hum.	S. E. dep. N. O. muito rij. de temp.
3	N. O. muito rij. de temp.	N. E. rij. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. dep. E. C. cl. e lind.
5	E. C. cl. dep. S. E. C. cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. dep. S. nev. eſp. hum.
6	S. O. rij. nev. eſp. grand. hum.	S. O. muito rij. nev. eſp. grand. hum.	S. O. muito rij. nev. eſp. grande hum.
7	S. O. br. nev. eſp. grand. hum.	S. O. br. nev. eſp. grand. hum.	S. O. br. nev. eſp. grande hum.
8	S. O. br. nev. eſp. grand. hum.	S. O. rij. nev. eſp. grand. hum.	S. O. rij. dep. N. O.
9	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. dep. S. O. rij. nev. eſp.
10	S. O. rij. Ceo cub. hum.	S. O. rij. N. O. trov. e min.	S. O. rij. C. cub. trov. ao log.
11	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. e O. Ceo cub.
12	O. Ceo cub.	N. O. Nuv. enter.	N. nuv. enter.
13	S. E. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
14	S. O. muito rij. de temp. hum.	S. O. muito rij. de temp.	S. O. muito rij. de temp. hum.
15	S. O. rij. C. cub. grand. hum.	S. O. rij. C. cub. grand. hum.	N. O. Ceo cl. ſecco
16	O. br. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.	O. br. dep. S. O. muito rij. grand. temp.
17	O. rij. Ceo cub.	O. dep. N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.
18	O. br. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.	N. O. e dep. S. O. Ceo cub.
19	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
20	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. junt. a ter. e S. O. alt.
21	E. Ceo cl.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
22	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
23	O. muito br. Ceo cl.	O. muito br. Ceo cl.	S. O. br. Ceo cub.
24	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. C. cub. N. E. C. cl.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
26	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
27	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. E. br. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. N. O. br. C. cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
29	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. dep. N. O. br. C. cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
30	E. br. Ceo cl. e lind.	O. dep. N. O. da tr. N. E.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	E. Ceo cl. e lind.	E. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de grand. humid.	de vent. temp.	de trov.
4	14	15	3	6	5

FE-

FEVEREIRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 11 4	27 10 7	27 8 7	46	53	50	0	0	0
2	27 8 2	27 8 2	27 8 1	49	51	46	0	0	0
3	27 7 3	27 7 3	27 8 7	43	50	46	0	0,2	0
4	27 9 3	27 9 4	27 11 4	39	48	47	0	0	0
5	27 11 9	27 11 5	27 11 3	41	50	48	0	0	0
6	27 11 5	27 11 3	27 11 4	46	53	49	0	0	0
7	27 11 2	27 10 7	27 10 3	46	52	48	0	0	0
8	27 10 3	27 10 3	27 10 3	47	53	49	0	0	0
9	27 10 5	27 10 2	27 9 5	48	54	50	0	0	0
10	27 11 2	27 9 6	27 9 3	49	56	50	0	0	0
11	27 9 8	27 9 2	27 9 2	47	56	52	0	0	0
12	27 9 4	27 9 3	27 8 8	50	58	53	0	0	0
13	27 9 1	27 8 8	27 8 4	52	64	60	0	0	0
14	27 8 2	27 7 8	27 7 7	53	64	60	0	0	0
15	27 7 4	27 7 2	27 7 8	52	58	53	0	0	0
16	27 8 3	27 7 8	27 6 4	49	59	56	0	0	0
17	27 6 8	27 6 6	27 7 6	55	60	53	0	0	0
18	27 7 8	27 7 3	27 8 9	53	58	55	0	0	0
19	27 8 8	27 8 7	27 8 9	53	58	57	0	0	0
20	27 9 0	27 8 8	27 7 0	54	59	57	0	0	0
21	27 7 2	27 6 1	27 2 4	53	58	56	1,2	1,8	12,4
22	27 1 0	27 0 7	27 2 9	52	50	47	2	3,9	3,9
23	27 3 7	27 3 5	27 4 3	48	54	50	0,6	0,2	12,4
24	27 5 0	27 4 8	27 5 0	49	54	50	0	0	0
25	27 4 1	27 0 6	26 8 6	47	53	52	0	0	5,3
26	26 9 7	26 10 1	26 11 0	47	52	50	5	0,2	0
27	26 11 6	26 11 9	27 0 9	47	53	49	0,8	0,4	1,0
28	27 1 0	27 0 9	27 0 4	47	52	50	0,5	0,5	11,0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
Maior elevaçaõ	27 11 9	Maior calor - -	64°	P.	L.	D.
Menor elevaçaõ	26 8 6	Menor calor -	39	5	3	3
Elevaçaõ media	27 3 5	Calor medio -	52			

FE-

FEVEREIRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. nev. alt.	N. N. E. nev. alt.	N. E. rij. nev. alt.
2	N. E. rij. nev alt.	N. rij. nev. alt.	N. E. rij. nev. alt.
3	N. E. rij. nev. alt.	Var. ent. N.E. e N. O.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. Ceo. cl. e lind.	N. nev. alt.
7	N. nev. alt.	N. e O. nev. alt.	N. e N. E. nev. eſp.
8	N. e N. E. nev. eſp. dep. Ceo cl.	N. e N. E. Ceo cl.	N. e N. E. Ceo cl.
9	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt. Ceo. cub.
10	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt. dep. N. eſp.
11	N. nev. eſp.dep.N.E.C.cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
12	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
13	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo. cl. e lind.	E. rij. C eo cl. e lind.
14	E. rij. Ceo cl. e lind.	E. rij. Ceo emp.	E. e S.E .muito.rij.C.emp.
15	E. e S. E. rij. Ceo emp.	E. e S. E. rij. Ceo emp.	E. e S. E. rij. Ceo emp.
16	E. nev. alt.	E. nev. alt.	E. e S. E. nev. alt.
17	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.
18	S. e S. O. nuv.car.	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.
19	E. e S. E. nuv. ſolt.	S. e S. O. nuv. car.	S. br. nev. eſp.
20	O. nuv. ſolt.	N. O. nuv. ſolt.	O. e N. O. nuv. car.
21	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.	S. e S. O. nuv. car.
22	N. O. nuv. car.	N. e N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.
23	N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.
24	O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	E. Ceo cl.
25	S. E. Ceo. cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. e S. O. nuv. car.
26	S. O. rij. nuv. car.	S. O. nuv. car.	S. E. br. Ceo cl. e lind.
27	S. e S. E. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	N. O. e S.E.trov.e chuv. de ped.
28	S. O. Ceo cnb.	S.O.e O. C. cub. nuv. car.	N. O. e S. E.trov. e pedr.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	7	2	0	0	2

MAR-

MARÇO DE 1786.

Dias do mez	BAROMETRO. Manhan			BAROMETRO. Tarde			BAROMETRO. Noite			THERMOMETRO. M.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M.	PLUVIMETRO. T.	PLUVIMETRO. N.
	P.	L.	D.	P.	L.	D.	P.	L.	D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27	0	4	27	0	1	27	0	0	45	50	48	3	0	2,8
2	27	0	8	27	1	1	26	11	4	46	52	49	0	0	4,2
3	27	0	4	27	1	6	27	3	9	47	52	49	1,3	0	0
4	27	4	1	27	2	9	27	0	7	48	55	53	0	2	2
5	26	11	0	26	9	2	26	11	1	55	56	53	5,7	1,3	1,5
6	26	11	8	27	1	7	27	4	7	52	53	52	0,4	0	0
7	27	4	8	27	4	3	27	2	1	49	55	52	0	2,2	3,1
8	27	3	6	27	4	0	27	2	9	48	56	52	0,5	0	3,7
9	27	2	5	27	2	0	27	1	4	55	58	54	0	0	2,3
10	27	2	5	27	3	8	27	4	8	50	59	56	0	0	0
11	27	5	2	27	5	6	27	6	6	48	58	54	0	0	0
12	27	6	7	27	6	6	27	6	2	53	59	56	0	0	0
13	27	6	0	27	5	9	27	5	0	53	58	55	0	0,7	0,8
14	27	5	5	27	5	3	27	4	0	55	57	56	0	0	3,6
15	27	4	5	27	4	6	27	3	4	54	58	56	0	0	0,9
16	27	3	0	27	2	8	27	2	6	56	58	57	0,6	0,9	6,7
17	27	1	4	27	2	8	27	3	8	56	58	55	1,2	0,2	0,9
18	27	4	9	27	4	9	27	2	6	49	53	49	0	0	3,5
19	27	2	0	27	4	0	27	5	1	45	52	48	0	0	6
20	27	6	0	27	6	6	27	7	4	50	55	54	1	0	3
21	27	7	7	27	7	5	27	7	9	52	56	53	0,2	0,2	0,8
22	27	7	6	27	6	5	27	5	6	51	56	53	0	0	0
23	27	5	5	27	6	2	27	7	3	52	53	52	1,2	2,4	0
24	27	7	8	27	8	6	27	8	7	49	55	52	0	0	0
25	27	8	9	27	8	4	27	7	6	50	57	53	0	0	0
26	27	7	0	27	6	6	27	6	5	50	58	54	0	0	0
27	27	6	7	27	6	6	27	6	7	50	58	54	0	0	0
28	27	7	0	27	6	7	27	6	0	49	58	52	0	0	0
29	27	5	4	27	4	8	27	3	2	46	56	51	0	0	0
30	27	2	8	27	2	6	27	1	0	44	50	48	0	3,6	4,8
31	27	2	0	27	3	3	27	4	0	50	55	50	0,4	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.			Total da chuva		
						P.	L.	D.
Maior elevaçaõ	27	8	9	Maior calor - -	59°	6	7	6
Menor elevaçaõ	26	9	2	Menor calor -	44			
Elevaçaõ media	27	4	2	Calor medio -	53			

MARÇO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. e S. E. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.
2	S. E. nuv. enter.	S. O. nuv. enter.	E. e S. O. nuv. enter.
3	S. O. Ceo cub. nuv. car.	O. br. nuv. enter.	O. br. Ceo cl.
4	O. br. Ceo cl. dep. S. E. cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. dep. S. muito rij. C. cub.
5	S. O. muito rij. de temp. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. Ceo cub. hum.	S. e O. muito rij. de temp. trov.
6	S. O. rij. de temp. C. cub.	O. rij. de temp. Ceo cub.	O. Ceo cub.
7	O. Ceo cub.	O. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
8	S. E. br. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.	S. e S. O. br. Ceo cub.
9	S. O. br. Ceo cub. nev. eſp. hum.	S. O. e S. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.
10	N. E. nev. eſp.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. e E. nuv. enter.	N. E. e E. Ceo cl.	S. E. nev. alt.
12	S. E. e S. C. cub nev. alt.	O. Ceo cub. nev. alt.	O. nev. alt.
13	S. O. nev. alt.	S. O. nev. eſp. hum.	S. O. Ceo cub. hum.
14	S. O. nev. alt. hum.	S. O. nev. alt. hum.	S. O. dep. O. Ceo cub.
15	S. O. Ceo cub. dep. O.	S. O. e O. Ceo cub.	S. O. nev. eſp. hum.
16	S. O. Ceo cub. hum.	S. O. Ceo cub. hum.	S. O. muito rij. de temp. hum.
17	S. O. rij. de temp. hum.	S. O. rij. Ceo cub. hum.	O. rij. nuv. enter.
18	O. rij. nuv. enter.	O. nuv. enter.	S. O. e N. O. C. cub. trov.
19	S. O. rij. Ceo cub. trov.	S. O. e N. O. trov. e raios na Ig. $2\frac{1}{4}$	S. O e O. Ceo Cub.
20	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
21	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
22	O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
23	S. O. e O. Ceo cub.	O. nuv. enter.	O. nuv. enter.
24	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O e N. Ceo. cl.
25	N. dep. O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	O. muito br. Ceo cl.
26	O. br. nuv. enter.	O. br. nuv. enter.	O. br. dep. N. nuv. enter.
27	N. nuv. enter.	N. nuv. enter.	N. nev. alt.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cub.
30	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
31	N Ceo cub.	N. e O. Ceo cub.	E. Ceo cub.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
5	17	1	5	2	3

ABRIL

ABRIL DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	BAROMETRO. Tarde P. L. D.	BAROMETRO. Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
1	27 4 0	27 3 6	27 1 3	49	54	50	0,6	0	3,8
2	27 0 0	26 11 3	26 10 2	50	53	52	1,7	4,5	3,4
3	26 8 4	26 7 5	26 7 0	49	54	49	1,8	9,9	0,7
4	26 7 2	26 11 0	27 1 5	50	53	52	4,8	0,9	2,2
5	27 3 3	27 3 9	27 5 6	52	56	54	1,3	0	0,8
6	27 6 1	27 6 4	27 6 9	50	54	52	0,2	0	0
7	27 7 0	27 6 4	27 5 6	50	55	54	0	0	4,9
8	27 5 4	27 5 1	27 5 1	55	56	54	1,9	0,4	3
9	27 5 7	27 5 6	27 6 0	51	55	52	0	0	0
10	27 5 9	27 4 5	27 3 3	51	56	54	0	0	1,8
11	27 3 7	27 5 6	27 6 8	52	57	54	1,7	0	0
12	27 7 2	27 7 8	27 8 2	50	58	50	0	0	0
13	27 8 6	27 8 8	27 8 6	49	62	55	0	0	0
14	27 8 3	27 7 8	27 7 6	52	62	58	0	0	0
15	27 7 3	27 7 0	27 6 3	52	61	57	0	0	0
16	27 6 2	27 6 1	27 5 4	52	67	61	0	0	0
17	27 5 0	27 4 5	27 3 2	60	71	64	0	0	0
18	27 7 2	27 1 2	27 0 1	60	72	65	0	0	0
19	27 0 8	27 1 5	27 2 4	59	66	58	0	0	0
20	27 3 6	27 4 9	27 6 0	53	58	54	0	0	0
21	27 6 0	27 6 4	27 6 6	51	58	53	0	0	0
22	27 6 9	27 7 0	27 7 2	52	60	54	0	0	0
23	27 7 4	27 7 2	27 6 3	52	61	55	0	0	0
24	27 5 5	27 4 5	27 4 6	55	64	60	0	0	0
25	27 3 5	27 4 4	27 5 3	56	59	56	2,3	4,2	0
26	27 5 7	27 5 7	27 5 3	53	62	57	0	0,8	0,3
27	27 5 0	27 4 3	27 1 8	56	60	54	0,5	0,5	0,4
28	27 0 4	26 11 3	26 11 2	56	60	55	2	0,8	3,2
29	26 11 6	26 11 1	26 10 7	53	58	52	0,6	0,7	6,8
30	26 11 1	27 1 0	27 2 3	52	60	55	0	1,2	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ -	27 8 8	Maior calor - - 72°	Total da chuva.			
Menor elevaçaõ	26 7 0	Menor calor - 49	P.	L.	D.	
Elevaçaõ media	27 4 5	Calor medio - 55	6	2	6	

ABRIL.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. E. Ceo cub.	S. Ceo cub.	E. e S. O. trov. long.
2	E. dep. S. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. rij. trov. muito ao long.
3	S. rij. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. dep. S. O.	S. O. dep. S. muito rij. de temp.
4	S. O. muito rij. de temp.	S. O. dep. O. muito rij.	N. O. rij. Ceo cub.
5	N. O. rij. Ceo cub.	N. O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.
6	O. rij. nuv. ſolt. e car.	O. rij. nuv. ſolt. e car.	O. br. nuv. ſolt. e car.
7	O. nuv. car.	S. O. Ceo cub.	S. O. nev. eſp. hum.
8	S. O. dep. O. nev. eſp. hum.	O. nev. eſp. hum.	O. Ceo cub.
9	O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
10	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
11	O. Ceo cub.	O. Ceo cub. dep. N.	N. nuv. ſolt.
12	N. nuv. ſolt.	N. nuv. ſolt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
14	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
15	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e liud.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
17	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. e S. Ceo cub.
19	N. E. e S. Ceo cub.	S. S. O. e O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
20	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. e N. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	N. E. Ceo. cl. e lind.
22	N. E. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. dep. S. E. Ceo cub.	O. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.
25	S. E. dep. O. C. cub. e car.	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cl.
26	N. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. e S. Ceo cub.
27	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
28	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car. trov.	S. Ceo cub. nuv. car.
29	S. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
30	E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
8	14	2	2	2	3

MAI-

MAIO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 3 7	27 3 9	27 4 1	54	57	54	0	0	0
2	27 5 6	27 6 2	27 6 8	51	58	53	0	0	0
3	27 6 6	27 6 5	27 6 5	50	56	54	0	0	0
4	27 6 6	27 6 8	27 7 2	50	61	53	0	0	0
5	27 7 3	27 7 2	27 6 6	50	58	55	0	0	0
6	27 5 9	27 5 3	27 4 8	54	58	55	0	2,7	3,3
7	27 4 8	27 4 7	27 2 5	54	63	59	0	0,2	3
8	27 2 2	27 1 9	27 0 9	54	60	57	2,9	4,4	13,5
9	27 1 8	27 3 8	27 4 7	55	58	56	4,1	0	0,2
10	27 5 7	27 5 9	27 4 8	54	60	57	0	0	0
11	27 3 6	27 3 0	27 5 7	55	60	52	0	4,8	0,5
12	27 6 8	27 8 6	27 8 9	51	58	54	0,5	0	0
13	27 9 3	27 8 0	27 7 4	51	62	58	0	0	0
14	27 7 6	27 7 7	27 7 7	57	69	62	0	0	0
15	27 7 9	27 7 7	27 7 4	56	68	59	0	0	0
16	27 7 5	27 7 4	27 7 3	56	64	58	0	0	0
17	27 7 3	27 7 2	27 6 6	54	62	56	0	0	0
18	27 6 5	27 6 4	27 6 4	56	60	56	0	0	0
19	27 6 4	27 6 8	27 7 0	53	61	55	0	0	0
20	27 7 6	27 7 4	27 7 5	52	64	58	0	0	0
21	27 7 8	27 7 6	27 8 0	56	69	61	0	0	0
22	27 7 3	27 7 9	27 7 4	62	70	64	0	0	0
23	27 7 4	27 7 0	27 7 0	64	74	67	0	0	0
24	27 6 9	27 6 4	27 6 4	63	73	66	0	0	0,3
25	27 6 4	27 6 3	27 6 2	62	68	60	0	6,7	0
26	27 6 5	27 6 6	27 6 8	59	70	66	0	0	0
27	27 6 8	27 6 9	27 7 4	60	73	69	0	0	0
28	27 7 5	27 7 0	27 6 8	67	77	60	0	0	0
29	27 7 5	27 7 1	27 6 8	67	78	67	0	2,3	0
30	27 7 5	27 7 2	27 7 0	66	76	68	0	0	0
31	27 7 2	27 7 0	27 6 8	67	77	70	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.				
Maior elevaçaõ	27 9 3	Maior calor - - 78°	Total da chuva.		
Menor elevaçaõ	27 0 9	Menor calor - 50	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 6 4	Calor medio - 60	4	1	4

MAIO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.
2	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. O e O. nev. alt.	N. O. e O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
5	N. O. nev. alt.	O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.
6	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nev. eſp.	S. O. Ceo cub. nev. eſp.
7	N. dep. O. Ceo cub.	O. nev. alt.	O. Ceo cub.
8	O. dep. S. O. rij. de temp. hum.	S. O. rij. nev. eſp. hum.	S. O. nuv. car. hum.
9	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub. trov. ao long.
10	S. O. muito rij. nuv. ſolt.	S. O. muito rij. nuv. ſolt.	S. O. dep. S. nuv. enter.
11	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. e S. O. muito rij. de temp.	S. O. Ceo cub.
12	S. O. rij. Ceo cub.	O. nuv. enter.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
13	N. E. br. Ceo emp.	N. E. br. Ceo emp.	N. E. e S. O. br. Ceo emp.
14	N. E. junt. a ter. e S. O. alt.	N. E. junt. a ter. e S. O. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. nev. eſp.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.
17	N. E. dep. N. nev. eſp.	muito var. nev. eſp.	Var. ent. N. E. N. e N. O.
18	N. rij. Ceo cub.	N. rij. Ceo cub.	N. rij. Ceo cl.
19	N. rij. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
22	E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	E. dep. O. Ceo cl.	E. e N. O. trov. tod. a tar.	E. br. trov. até ás 10 hor.
25	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. e N. trov. Ceo cub	N. O. Ceo cub.
26	N. e N. E. Ceo cub.	N. e N. E. C. cub. ar. de trov.	N. e N. E. Ceo cub.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. ar. de trov.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. dep. trov.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humid.	de temp.	de trov.
13	8	2	1	2	4

JUNHO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 6 8	27 6 7	27 7 0	64	76	68	0	0	0
2	27 7 2	27 7 1	27 7 4	64	75	69	0	0	0
3	27 7 6	27 7 3	27 7 4	66	76	67	0	0	0
4	27 7 5	27 7 2	27 7 2	62	74	64	0	0	0
5	27 7 1	27 7 0	27 7 2	59	73	66	0	0	0
6	27 6 8	27 6 6	27 6 5	67	76	70	0	0	0,4
7	27 6 6	27 6 5	27 6 3	68	72	66	0	1,3	0
8	27 6 0	27 5 8	27 5 4	64	70	65	0	0	0
9	27 5 2	27 5 1	27 4 6	62	69	62	0	0	0
10	27 4 4	27 3 7	27 2 7	60	68	63	0	0	2,5
11	27 3 7	27 4 9	27 5 7	62	64	60	2,2	0	0
12	27 5 6	27 5 4	27 5 5	59	66	62	0	0,5	1,1
13	27 5 7	27 5 5	27 5 6	58	66	61	0	0,4	0,7
14	27 5 7	27 5 3	27 4 5	59	65	60	2,7	0	2,9
15	27 4 7	27 4 7	27 4 8	57	64	60	4,3	0,6	3,7
16	27 5 0	27 5 4	27 4 2	57	66	60	0	0	5,8
17	27 4 2	27 4 3	27 4 4	59	67	61	0,6	0	0
18	27 5 1	27 5 1	27 5 3	60	65	60	0	0	0
19	27 6 2	27 5 7	27 6 2	59	66	59	0	0	6,5
20	27 6 8	27 7 3	27 7 2	57	66	62	0,5	0	1,5
21	27 7 9	27 8 0	27 7 5	58	67	62	0,6	0	0
22	27 7 4	27 7 6	27 8 5	58	66	63	1,9	0	0
23	27 8 6	27 8 4	27 8 9	60	69	65	0	0	0
24	27 9 3	27 8 7	27 8 7	58	72	64	0	0	0
25	27 8 3	27 8 4	27 7 4	64	78	64	0	0	0
26	27 7 1	27 7 8	27 7 3	66	77	66	0	0	0
27	27 8 2	27 8 0	27 8 1	62	70	64	0	0	0
28	27 8 0	27 7 6	27 7 5	60	70	64	0	0	0
29	27 7 9	27 7 7	27 7 4	60	76	69	0	0	0
30	27 7 6	27 7 3	27 7 4	63	75	66	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
Maior elevaçaõ	27 9 3	Maior calor	78°	P.	L.	D.
Menor elevaçaõ	27 2 7	Menor calor	57	3	4	7
Elevaçaõ media	27 6 5	Calor medio	65			

JU-

JUNHO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N.E.e N. O. C. cl. e lind.	N.O.dep.N.E.C.cl.e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. E. dep. O. C. cl e lind.	N. O. e N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. trov. fort. e prox.	N. E. trov. fort. e prox.
7	N. E. trov. ao long.	N. E. e S.O.trov.ao long.	N. E. Ceo cl.
8	N. e N. O. Ceo cl.	O. e N. O. nev. alt.	N. O. dep. N. nev. alt.
9	N. O. nev. alt.	N. O. e O. nev. alt.	N. O. nev. alt.
10	N. O. Ceo cub. nev alt.	S. O. nev. alt. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.
11	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. e O. Ceo cub.	S. O. e O. nuv. enter.
12	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. e S. rij. nuv. car.	S. O. e S. rij. Ceo cub.
13	S. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.
14	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
15	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
16	S. O. Ceo cub.	S. O. nuv. enter.	S. O.e S.Ceo cub.nuv.car.
17	S. e S. O. Ceo cub.	S. O. e O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
18	S. O. e O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	O. e S. O. nuv. enter.
19	S. O. nuv. enter.	O. Ceo cl.	S. O. e O. nuv. car.
20	S. O. nuv. car.	O. br. Ceo cl.	S. O. nuv. car.
21	S. O. nuv. car.	O. nuv. enter.	O. br. Ceo cl.
22	S. O. nuv. car.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
23	N. e N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
24	N. e N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
25	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
26	N. e N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.
27	N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.	N. Ceo cl.
28	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E.br.nev.eſp.dep.C.cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
16	10	1	0	0	2

JU-

JULHO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 7 5	27 7 4	27 7 6	62	71	66	0	0	0
2	27 8 0	27 7 9	27 7 4	62	68	66	0	0	0
3	27 7 5	27 7 1	27 7 0	62	74	70	0	0	0
4	27 7 0	27 6 8	27 6 9	74	82	72	0	0	0
5	27 7 5	27 7 5	27 7 7	74	84	76	0	0	0
6	27 7 9	27 7 8	27 8 0	72	79	71	0	0	0
7	27 8 5	27 8 4	27 7 7	66	72	66	0	0	0
8	27 7 8	27 7 3	27 6 2	64	70	62	0	0	0
9	27 6 0	27 5 6	27 5 8	62	67	64	0	0	0
10	27 6 0	27 6 2	27 7 9	62	79	62	0	0	0
11	27 7 9	27 7 9	27 8 2	59	68	63	0	0	0
12	27 8 2	27 8 1	27 8 1	59	71	65	0	0	0
13	27 8 1	27 8 0	27 7 6	62	82	75	0	0	0
14	27 7 1	27 6 8	27 6 7	72	83	73	0	0	0
15	27 6 6	27 6 4	27 6 2	73	83	73	0	0	0
16	27 6 0	27 6 2	27 7 4	74	89	78	0	0	0
17	27 7 6	27 7 7	27 7 9	75	84	74	0	0	0
18	27 8 0	27 8 1	27 7 7	67	73	68	0	0	0
19	27 7 5	27 7 0	27 6 5	65	71	66	0	0	0
20	27 6 2	27 6 0	27 5 8	63	72	68	0	0	0
21	27 5 7	27 5 8	27 6 5	64	74	70	0	0	0
22	27 6 7	27 6 6	27 6 5	64	73	68	0	0	0
23	27 6 4	27 6 3	27 6 5	63	71	66	0	0,8	0
24	27 6 7	27 6 6	27 6 5	64	70	66	0	0	0
25	27 7 0	27 7 0	27 7 5	64	72	67	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 6	64	74	66	0	0	0
27	27 7 3	27 7 0	27 6 5	64	72	67	0	0	0
28	27 6 9	27 6 8	27 6 7	63	71	67	0	0	0
29	27 6 8	27 7 5	27 7 1	59	72	63	0	0	0
30	27 6 7	27 6 5	27 6 1	58	73	66	0	0	0
31	27 6 6	27 9 9	27 6 4	80	78	70	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.				
Maior elevaçaõ	27 8 5	Maior calor - -	83	Total da chuva.	
Menor elevaçaõ	27 5 6	Menor calor -	59	P. L. D.	
Elevaçaõ media	27 7 0	Calor medio -	45	0 0 8	

JULHO.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. nev. alt.
3	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e O. muito br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	O. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. nev. alt.
7	N. e N. E. nev. alt.	N. e N. E. nev. alt.	N. e O. nev. alt.
8	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. Ceo cl. e lind.
9	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	N. O. nev. alt.
10	N. O. nev. alt.	N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
17	E. e S. E. Ceo cl.	O. muito br. Ceo cl.	O. br. Ceo cl.
18	O. br. Ceo cl.	O. N. E. br. Ceo cub.	N. E. e N. Ceo cub.
19	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
20	N. e N. O. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
21	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
22	S. O. br. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.	S. O. br. relamp. e trov. ao long.
23	S. O. e N. E. Ceo cub.	N. E. e S. O. trov. ao long.	N. O. Ceo cub.
24	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
25	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
26	N. e N. E. Ceo. cl. e lind.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub. nev. esp.
27	N. Ceo cub. nev. esp.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub.
28	N. Ceo cl.	N. O. alg. nuv.	N. br. Ceo cub.
29	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
30	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
31	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
19	1	1	0	0	2

AGOS-

AGOSTO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	BAROMETRO. Tarde P. L. D.	BAROMETRO. Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
1	27 6 7	27 6 7	27 6 8	58	79	70	0	0	0
2	27 6 9	27 7 2	27 6 6	63	76	65	0	0	0
3	27 6 3	27 6 1	27 6 4	61	70	64	0	0	0
4	27 5 8	27 5 3	27 5 7	61	69	63	0	0	0
5	27 6 7	27 7 1	27 6 8	64	70	66	0	0	0
6	27 7 8	27 7 5	27 7 5	62	68	64	0	0	0
7	27 7 0	27 7 1	27 7 5	60	68	65	0	0	0
8	27 7 4	27 7 2	27 7 3	60	69	64	0	0	0
9	27 7 3	27 6 7	27 6 6	62	70	65	0	0	0
10	27 6 4	27 6 3	27 6 3	63	70	66	0	0	0
11	27 6 9	27 7 0	27 6 8	64	70	66	0	0	0
12	27 7 0	27 7 5	27 7 2	62	71	66	0	0	0
13	27 7 2	27 7 5	27 7 3	62	72	67	0	0	0
14	27 7 2	27 6 8	27 6 8	64	73	68	0	0	0
15	27 6 5	27 6 6	27 6 7	60	69	66	0	0	0
16	27 6 3	27 6 5	27 6 3	59	68	64	0	0	0
17	27 6 6	27 7 1	27 6 4	57	72	64	0	0	0
18	27 6 2	27 6 5	27 6 9	68	80	70	0	0	0
19	27 7 0	27 6 8	27 6 3	60	68	64	0	0	0
20	27 6 2	27 6 0	27 6 8	61	69	64	0	0	0
21	27 6 7	27 6 8	27 6 8	61	66	61	0	0	0
22	27 6 9	27 6 9	27 7 7	59	66	63	0	0	0
23	27 8 1	27 8 2	27 8 3	56	69	62	0	0	0
24	27 8 4	27 8 2	27 8 0	57	70	61	0	0	0
25	27 8 0	27 7 9	27 7 9	64	79	70	0	0	0
26	27 7 7	27 7 5	27 7 6	67	80	70	0	0	0
27	27 7 2	27 7 0	27 7 5	68	80	73	0	0	0
28	27 7 8	27 7 6	27 7 7	60	70	64	0	0	0
29	27 7 4	27 7 9	27 8 0	60	65	62	0	0	0
30	27 8 3	27 8 0	27 7 8	61	78	72	0	0	0
31	27 7 8	27 7 3	27 7 2	73	82	73	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 8 4	Maior calor - -	80°	Total da chuva		
Menor elevaçaõ	27 5 3	Menor calor -	57	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 7 1	Calor medio -	66	0	0	0

AGOS-

AGOSTO.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
3	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.
4	N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl e lind.
7	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
11	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
12	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
13	N. nev. alt.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.	N. O. nev. alt.
14	N. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
15	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
16	N. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl.	N. Ceo cl.
17	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
18	N. E. e E. br. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
20	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
21	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. rij. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
26	E. br. Ceo cl. e lind.	E. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. nev. alt.
28	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.	N. Ceo cub. nev alt.
29	N. Ceo cub. nev. alt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. e E. Ceo emp.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	21	4	1	3	1

SE-

SETEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 7 1	27 7 0	27 7 6	68	76	72	0	0	0
2	27 7 8	27 8 0	27 8 1	63	68	62	0	0	0
3	27 8 4	27 8 4	27 7 8	60	66	63	0	0	0
4	27 7 5	27 7 7	27 7 7	63	67	61	0	0	0
5	27 7 6	27 7 5	27 7 4	56	66	61	0	0	0
6	27 7 4	27 7 2	27 7 0	63	72	64	0	0	0
7	27 7 2	27 7 0	27 7 4	58	68	62	0	0	0
8	27 7 5	27 7 5	27 7 6	59	67	60	0	0	0
9	27 7 7	27 7 6	27 7 7	58	69	65	0	0	0
10	27 7 8	27 7 6	27 7 9	60	75	66	0	0	0
11	27 7 6	27 7 8	27 8 2	60	70	63	0	0	0
12	27 8 3	27 8 0	27 7 8	60	66	64	0	0	0
13	27 7 6	27 7 4	27 7 7	60	68	60	0	0	1, 1
14	27 7 6	27 7 2	27 4 7	58	67	63	3, 4	0	0
15	27 5 0	27 6 0	27 7 2	64	64	59	0	0	0
16	27 7 6	27 7 8	27 8 6	54	62	58	0	0	0
17	27 8 7	27 8 6	27 8 9	56	72	67	0	0	0
18	27 8 3	27 8 3	27 7 8	64	80	73	0	0	0
19	27 7 8	27 7 4	27 6 5	74	82	76	3, 8	0	0
20	27 6 4	27 6 2	27 6 1	71	77	69	0	0	0
21	27 6 2	27 6 2	27 6 1	66	72	67	0	0	0
22	27 6 2	27 6 2	27 6 5	62	69	64	0	0	0
23	27 6 4	27 6 1	27 6 1	60	71	65	0	0	0
24	27 6 3	27 6 2	27 6 2	64	72	66	0	0	0
25	27 6 3	27 6 4	27 7 7	62	71	64	0	0	0
26	27 7 6	27 7 7	27 8 0	57	70	61	0	0	0
27	27 8 0	27 7 6	27 7 2	55	70	62	0	0	0
28	27 7 6	27 8 2	27 8 1	58	68	62	0	0	0
29	27 8 2	27 7 4	27 7 8	59	64	60	0	0	0
30	27 7 4	27 7 7	27 7 8	60	66	62	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.
Maior elevaçaõ	27 8 9	Maior calor	77	P. L. D.
Menor elevaçaõ	27 4 7	Menor calor	54	0 8 3
Elevaçaõ media	27 6 0	Calor medio	65	

SETEMBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	E. rij. Ceo cl.	E. e S.E. muito rij. C.cub.	S. E. e N.O. trov. ao long.
2	N. e N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.
3	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cub. nev. eſp.
4	N. nev. eſp. e hum.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. nev. eſp. dep. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. dep. nev. alt.	N. E. nev. eſp.
8	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. e N. E. rij. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt. dep. nev. eſp.
10	N. E. nev. eſp.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt.
11	N. e N. E. nev. eſp.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt.
12	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
13	N. e N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. Ceo cl.	N. nev. alt.
14	N. E. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. dep. S. O. Ceo cub.
15	S. O. dep. N. O. e N. C. cub.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	E. rij. Ceo cub.
19	E. rij. C. cub. trov. ao long.	N. E. Ceo cl.	E. br. Ceo emp.
20	E. Ceo cl.	S. nev. alt.	S. Ceo cub.
21	S. Ceo cub.	O. dep. S. O. e N. C. cub.	S. E. Ceo cub.
22	S. e S. E. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
23	N. Ceo cub. nev. eſp.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. nev. eſp.
29	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
30	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humid.	de temp.	de trov.
25	3	4	1	0	1

OUTU-

OUTUBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
				Grad. de Farenhei.					
1	27 7 6	27 7 1	27 7 0	58	66	62	0	0	0
2	27 6 1	27 6 0	27 6 0	63	72	67	0	0	0
3	27 5 7	27 5 6	27 5 6	67	68	66	0	0	0
4	27 6 5	27 6 4	27 7 2	62	64	61	0	0	0
5	27 7 4	27 7 3	27 7 0	58	62	58	0	0	0
6	27 7 3	27 7 2	27 6 6	55	64	59	0	0	0
7	27 5 9	27 5 3	27 4 6	62	64	63	0,2	2	9
8	27 3 6	27 3 0	27 3 0	62	63	56	4	1	0
9	27 3 8	27 4 2	27 5 5	55	61	58	0,2	0	0
10	27 5 4	27 5 4	27 7 3	56	63	60	0	0	1,6
11	27 7 3	27 7 3	27 8 4	58	63	60	0	0	0
12	27 8 4	27 8 4	27 8 2	56	61	57	0	0	0
13	27 7 9	27 7 6	27 7 8	52	63	58	0	0	0
14	27 7 8	27 7 5	27 7 3	57	68	64	0	0	0
15	27 7 3	27 7 0	27 6 5	61	70	64	0	0	0
16	27 6 9	27 6 8	27 6 8	62	68	64	0	0	0
17	27 7 0	27 6 8	27 7 0	58	64	60	0	0	0
18	27 7 1	27 6 8	27 6 2	58	63	59	0	0	0
19	27 6 0	27 5 6	27 4 3	55	64	60	0	0	0
20	27 3 8	27 3 3	27 2 8	58	62	60	0	0	0
21	27 2 6	27 2 3	27 2 2	58	61	60	0	5	13,6
22	27 2 2	27 4 0	27 6 0	59	63	61	0	13	2,8
23	27 7 0	27 7 2	27 6 8	58	64	60	3,4	4	0
24	27 6 8	27 6 6	27 6 6	59	67	63	0	0	0
25	27 6 9	27 6 8	27 7 4	60	67	64	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 1	58	65	63	0	0	0
27	27 6 9	27 6 8	27 7 0	60	66	64	0	0	3,3
28	27 7 7	27 7 6	27 7 7	59	63	61	0	0	0
29	27 7 8	27 7 7	27 7 1	57	62	60	0	0	0
30	27 7 2	27 7 0	27 6 6	58	58	56	2,1	1	0
31	27 6 4	27 6 0	27 7 4	56	58	67	0	2	4,2

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 8 4	Maior calor - - 72°	Total da chuva.		
Menor elevaçaõ	27 2 2	Menor calor - 52	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 6 5	Calor medio - 64	6	0	4

OUTU-

OUTUBRO.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
3	N. Ceo cub. nev. esp.	O. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
4	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cl. e lind.	O. Ceo cl.	O. dep. S. O. Ceo cub.
7	S. O. Ceo cub.	S.O. rij. C. cub. nev. esp. hum.	S. O. de temp. Ceo cub.
8	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
9	S. O. e O. nuv. enter.	S.O. e O. nuv. enter. trov. ao long.	S. O. Ceo cl.
10	S. O. nuv. solt.	S. O. nuv. solt.	S. O. nuv. enter.
11	S. O. e O. Ceo cl.	S. O. e O. Ceo cl.	O. dep. N. O. C. cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E Ceo cl. e lind.
14	E. Ceo cl.	S. E. e S. Ceo ennev.	S. E. Ceo cub.
15	E. e N. E. nev. alt	N. E. nev. alt.	N. E. Ceo empoado
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.
17	N. Ceo cub. nev. alt.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
19	N. Ceo cl.	S. Ceo cub.	S. e S. E. Ceo cub.
20	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E. muito rij. Ceo cub.	S.E. muito rij. trov. ao long.
21	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E. e S. muito rij. C. cub.	S. E. rij. Ceo cub.
22	S. E. e S. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. e O. br. Ceo cl.
23	S. O. br. Ceo cub.	O. e N. Ceo cub.	N. e N. E. Ceo cl.
24	E. e S. br. Ceo cub.	E. e S. Ceo cub.	E. Ceo cub.
25	E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cub. nev. alt.	N. E. e E. Ceo cl.
26	N. E. e E. Ceo cl.	E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cl.
27	E. Ceo cub.	S. E. e S. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cl.
28	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
29	O. Ceo cub.	O. S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
30	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
31	O. e S. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
13	10	1	0	2	1

NO-

NOVEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 7 3	27 7 0	27 4 7	58	63	60	0	8, 4	8, 6
2	27 4 7	27 4 4	27 2 0	57	58	58	0, 3	0	6, 7
3	27 2 7	27 3 7	27 5 6	51	58	56	0	0	0
4	27 6 2	27 6 8	27 6 8	44	52	49	0	0	0
5	27 6 6	27 6 2	27 5 4	49	54	52	0	0	0
6	27 5 3	27 4 9	27 5 6	48	54	51	0	0	0
7	27 5 9	27 6 1	27 6 3	48	55	52	0	0	0
8	27 6 3	27 6 2	27 6 1	49	55	51	0	0	0
9	27 6 2	27 6 0	27 3 5	48	55	52	0	0	0
10	27 3 4	27 4 0	27 4 8	51	53	51	0, 3	0, 2	2, 5
11	27 5 0	27 5 8	27 5 7	49	55	53	0	0	0
12	27 4 5	27 4 0	27 3 5	51	55	52	0	1, 5	0, 5
13	27 3 5	27 3 2	27 3 0	47	54	51	0	0	0
14	27 2 3	27 1 8	27 2 7	50	54	53	0	16, 5	1
15	27 0 8	26 11 8	27 1 0	52	55	54	0, 4	2	1, 1
16	27 1 9	26 11 7	26 10 7	53	57	56	0, 3	0, 9	4, 1
17	27 1 9	27 2 7	27 4 7	52	57	56	0, 2	1	1, 4
18	27 5 0	27 4 9	27 2 9	56	59	58	0, 2	0, 2	2, 8
19	27 4 8	27 6 2	27 7 5	58	60	58	0, 7	0	0
20	27 8 4	27 8 3	27 8 3	58	61	58	0	0	0
21	27 8 1	27 7 6	27 5 7	54	60	58	0	0	0
22	27 5 1	27 4 7	27 5 7	51	58	54	4, 2	0	0
23	27 5 3	27 5 0	27 2 8	53	59	58	0	0	9, 9
24	27 3 0	27 4 0	27 5 9	54	52	51	3, 6	0, 8	0
25	27 5 8	27 5 0	27 4 3	52	56	54	0	1	2, 4
26	27 4 8	27 4 9	27 5 4	56	57	56	0	0	4, 6
27	27 6 8	27 7 8	27 9 4	55	56	52	0	0	0
28	27 10 4	27 10 2	27 9 0	50	56	53	1, 6	0	0
29	27 9 0	27 8 8	27 8 7	51	54	53	0	1, 8	0, 2
30	27 8 4	27 8 3	27 8 4	54	56	52	0	1. 1	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevaçaõ	27 10 4	Maior calor	63	Total da chuva.
Menor elevaçaõ	26 10 7	Menor calor	44	P. L. D.
Elevaçaõ media	27 5 4	Calor medio	54	7 9 0

NOVEMBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
2	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
3	E. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt.	N. e N. E. Ceo cl.
6	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E., Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. dep. S. E. Ceo cub.
10	S. E. Ceo cub.	E. e S. E. Ceo cub.	S. E. e E. Ceo cub.
11	E. Ceo cub.	N. E. e N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
12	N. d p. S. Ceo cub.	S. e E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
13	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
14	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	N. Ceo cub.
15	S. O. Ceo cub.	S. O. muito rij. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
16	O. rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. dep. O. br. Ceo cub.
17	O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
18	S. O. Ceo cub.	S. O. C. cub. nev. eſp. hum.	S. O. rij. nev. eſp. hum.
19	S. O. e O. Ceo cub. hum.	O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cl.
20	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cl.
21	O. Ceo cl.	S. br. dep. E. Ceo cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
22	E. dep. S. Ceo cub.	S. dep. S. O. Ceo cub.	S. br. Ceo cub.
23	S. br. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
24	S. e O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cl.
25	O. Ceo cub.	O. e S O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
26	S. O. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
27	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. br. Ceo cl.	N. e N. E. br. Ceo cl.	N. dep. S. O. br. Geo cl
29	S. O. br. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	S. e S. O. br. Ceo cl.
30	S. e S. O. br. nev. eſp.	S. e S. O. C. cub. nev. eſp.	S. e S. O. br. nev. eſp.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	18	2	2	0	0

DE-

DEZEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan	Tarde	Noite	THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 8 5	27 8 3	27 8 4	54	56	54	0	0	0,8
2	27 8 6	27 8 5	27 8 0	57	59	56	0,2	0	0,5
3	27 7 9	27 7 4	27 7 0	55	57	53	0	0	3,1
4	27 5 8	27 4 7	27 6 4	56	59	54	0,8	3,7	1,9
5	27 6 2	27 5 0	27 1 1	52	57	54	0	0	9,5
6	27 0 1	27 0 2	27 2 3	52	57	53	2,5	0,6	0
7	27 3 8	27 4 8	27 6 3	50	56	52	0	1,3	0
8	27 6 9	27 6 5	27 7 1	50	55	53	0	0	4,8
9	27 7 9	27 8 4	27 9 5	52	56	52	0	0	0
10	27 9 0	27 8 0	27 5 0	49	55	53	0	0	9,6
11	27 6 5	27 7 5	27 9 0	48	53	49	1,3	0	0
12	27 9 6	27 10 0	27 11 2	49	56	54	0	0	1,6
13	27 11 8	27 11 4	27 11 1	52	57	54	0	0	0,7
14	27 10 9	27 10 8	27 10 5	54	56	54	0,6	0,3	0,9
15	27 10 0	27 9 8	27 9 5	53	56	53	0	0	0
16	27 10 0	27 9 1	27 8 0	48	52	49	0	0	0
17	27 7 1	27 6 2	27 4 9	50	53	52	0	0,5	1,6
18	27 3 9	27 3 2	27 2 5	54	58	57	0,6	0,8	9,7
19	27 2 4	27 2 8	27 3 7	50	53	50	0,2	0,2	0,5
20	27 3 9	27 4 0	27 4 5	45	48	45	0	0,9	2,6
21	27 4 7	27 4 9	27 3 5	40	46	44	0	0,3	0
22	27 1 9	26 11 0	26 7 4	41	43	41	0	0,5	1,9
23	27 6 6	27 7 6	27 0 0	48	49	47	2,8	3	0,5
24	27 1 9	27 3 2	27 2 4	44	48	45	0	0	0
25	27 0 4	27 0 0	27 1 8	43	47	46	0	0	4
26	27 2 3	27 2 4	27 6 5	44	46	44	0	0	0
27	27 7 4	27 7 6	27 8 8	46	50	49	0	0	0
28	27 9 5	27 9 4	27 9 3	48	52	48	0	0	0
29	27 10 0	27 9 5	27 9 2	46	52	48	0	0	0
30	27 9 3	27 9 7	27 9 8	44	51	50	0	0	0
31	27 9 8	27 10 0	27 9 9	44	53	50	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.				
Maior elevaçaõ	27 11 8	Maior calor - -	59°	Total da chuva	
Menor elevaçaõ	26 7 4	Menor calor -	40	P. L. D.	
Elevaçaõ media	27 6 4	Calor medio -	51	6 3 3	

DE-

DEZEMBRO.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.	O. br. Ceo cub. nev. esp.
2	O. br. nev. esp.	O. br. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
3	S. O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. E. br.
4	N. E. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
5	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. O. rij. depN.O.C. cub.
6	S.O.e N.O.rij.trov.de pas.	N. O. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
7	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.
8	N. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
9	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cl.
10	N. O. dep. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S.e S.O.muito rij.de temp.
11	N. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cl.	N. O. e N. Ceo cl.
12	N. O. br. Ceo cl. e lind.	O. Ceo cub. nev. esp.	N.O.dep. N. C. cl. e lind.
13	N. br. Ceo cl. dep. enev.	N. O. e N. Ceo enev.	N. br. nev. esp.
14	N. br. nev. alt.	N. e N. O. nev. alt.	N. br. nev. esp..
15	N. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	N. Ceo cub.
16	N. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
17	O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
18	O. S. O. nev. esp. hum.	O. e S. O. nev. esp. hum.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
19	O. e N. O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
20	N. e O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.
21	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. dep. N. E. Ceo emp.
22	O. E. rij. Ceo cub.	N. E. rij. Ceo cub.	N. E. e S. E. muito rij. de temp.
23	N. E. e S. E. muito rij. de temp.	N. E. rij. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
24	N. E. Ceo cub.	N. e N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
25	N. E. e E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
26	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
27	N. e N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	21	4	1	3	1

Re-

Resultado de todo o Anno

BAROMETRO.				THERMOMETRO.		PLUVIMETRO.		
	P.	L.	D.			Total da chuva		
Maior elevação	27	11	9	Maior calor	89	P.	L.	D.
Menor elevação	26	6	5	Menor calor	36	54	5	2
Elevação media	27	5	5	Calor medio	58			

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
164	125	23	18	16	23

A Esterilidade d'este anno foi muito geral: toda a natureza foi escassa nas suas producções: só em fructos de espinho foi abundante. O paõ, vinho, e azeite faltou inteiramente, e no gado houve grande mortandade.

Este anno foi muito doentío: as febres intermitentes, e esquinencias reinárão com mais ou menos força por todo o Veraõ e Outono: a molestia da esquinencia pareceu epidemica: nas crianças e pessoas de menos idade vinha acompanhada frequentemente de febre escarlatina: as Pessoas, que fôraõ soccorridas a tempo com sangrias, diluentes, e na declinaçaõ com catharticos, escapáraõ felizmente: nos Casaes e Aldeias, aonde estes soccoros naõ fôraõ promptos, nem administrados a tempo, morrêraõ muitas pessoas.

ANNO DE 1786.

A Freguezia de Santo André d'esta Villa de Mafra, no districto de pouco mais de huma legoa em quadro, consta de 653 fogos, nestes houve este anno

Pessoas de Communhaõ - - - -	2ⱷ277
Menores - - - - - - - - - -	148
Total - -	2ⱷ425
Baptizáraõ-se - - - - - - - - - -	88
Morrêraõ	
Homens - - - - - - - - - - - -	31
Mulheres - - - - - - - - - - -	25
Meninos - - - - - - - - - - -	20
Meninas - - - - - - - - - - -	10
Total - -	86
Casamentos em todo o anno - - -	22

ME-

MEMORIA

Sobre os instrumentos de Reflexaõ.

Por José Maria Dantas Pereira.

L'esprit va toujours de proche en proche.
La Landé.

NInguem duvída, que os instrumentós de reflexaõ saõ os mais proprios para as observações maritimas: he tambem claro, que a maior exacçaõ d'estas depende da maior precisaõ, e simplicidade dos instrumentos, com os quaes se praticaõ: taes fôraõ os motivos, que me determináraõ a reflectir sobre os que até ao presente se tem inventado. Lida em 18 de Abril de 1792.

Vî, que entre os de Hadley, Smith, Fouchy, Mayer, e o do celebre Newton, seu primeiro inventor, merecia ser preferido o circular de Mayer; especialmente depois que aperfeiçoado pelo Cavalheiro de Bordá ficou tanto, e taõ evidentemente superior aos outros do mesmo genero: assim analysei-o com particularidade; e d'esta analyse resultou o novo instrumento, que pásso a descrever com aquella confiança, que em pontos taes póde subministrar a theoria combinada com a prática pessoal dos referidos instrumentos.

Descripçaõ do novo Circular.

He hum circulo de metal OXVR (Fig. I.) dividido em 720°: o seu corpo construido por hum modo semelhante ao do Cavalheiro de Bordá, e elle em si dirigido ao mesmo fim de observar as distancias da Lua aos outros Astros nas determinações das Longitudes.

No centro tem hum espelho NI, parte estanhado, e parte transparente, que se faz girar por meio de huma alidade

dade AB, na qual anda fixo pela direcçaõ da linha de fé CA perpendicularmente ao plano OXVR.

A alidade CO gira tambem ároda do centro C: nella deve estar montado o oculo da mesma sorte que o Cavalheiro de Bordá engenhosa e perfeitamente o ensinou a collocar no seu circular, com a differença de fazer passar o seu eixo pelo centro do instrumento; coisa de facil prática, e de facil verificaçaõ a bordo; por quanto póde marcar-se no espelho huma recta perpendicular ao plano OXVR, e que passe, ou pelo centro C, ou pela linha de fé da alidade do oculo; e logo quando a quella recta cortar os extremos oppostos dos fios parallelos, ou os angulos oppostos do reticulo, se este for romboide, julgaremos exacta a posiçaõ do oculo; tal he hum dos meios, que se poderá empregar para obter a dita verificaçaõ.

Na parte circular da alidade haveraõ quatro fendas, IM, MN, NP, PI, que se cortem em angulo recto formando hum quadrado inscripto no circulo IMNP; nestas entraráõ os vidros córados á maneira de corrediças, quando forem necessarios para as observações. Em fim a principal differença entre o novo instrumento e o de M. de Bordá, consiste em ter hum só espelho; e como as mais alterações saõ consequencias d'está, deixando de continuar com ellas, vou mostrar o modo de usar do novo circular.

Modo de observar as distancias angulares.

Todo este paragrafo deve reduzir-se a mostrar como com hum dos novos instrumentos se póde medir qualquer angulo SCL, formado em hum ponto C pelos raios visuaes tirados d'este ponto a dois objectos S, e L: supponhamos pois, que se queira effectivamente medir o angulo SCL: fixaremos a alidade do oculo em qualquer ponto O, e olhando para o objecto menos luminoso L pela parte transparente do espelho, moveremos este por meio da sua alidade até vêr o outro objecto S em contacto com L, por meio de huma re-

flexaõ

flexaõ ſimples feita na parte eſtanhada do meſmo eſpelho; entaõ o angulo BCO, dado pelas alidades, ſerá metade do que ſe pertendia conhecer; e como o circulo eſtá dividido em 720°, o numero de gráos de BO ſerá o valor do angulo LCS; iſto he claro, pois para que S pareça eſtar na linha LO, como o angulo de incidencia SCL deve ſer igual ao de reflexaõ BCO, e BCO=ACL, ſerá SCA=ACL, e por conſequencia ACL, ou BCO=½ LCS.

Imaginando agora, que o plano do inſtrumento gire á roda de LCO como eixo até completar huma ſemi-revoluçaõ, a alidade AB ficará na poſiçaõ AB (Fig. II.) e todas as mais partes d'elle ficaráõ tambem na poſiçaõ, em que as repreſenta a meſma Fig. II: logó andando com AB até chegar á poſiçaõ A'B' directamente oppoſta á da Fig. I. tomaremos a vêr em contacto os objectos L, e S; e o angulo A'CO igual ao primeiro BCO marcará de novo a diſtancia angular dos meſmos objectos.

He manifeſto, que iſto deve ſucceder aſſim, naõ havendo defeito na poſiçaõ do eſpelho, por cuja cauſa o primeiro angulo BCO ſaia maior ou menor do que deve ſer; mas neſte caſo o ſegundo A'CO ſerá outro tanto menor ou maior; logo ametade da ſomma de ambos moſtrará ſempre a diſtancia angular LCS, e a ſemi-differença d'elles ſerá quanto o eſpelho ſe aparta da ſua poſiçaõ verdadeira; quantidade a quem por eſte motivo chamaremos: *Erro de poſiçaõ*.

A' combinaçaõ das duas obſervaçôes referidas daremos o nome de *obſervaçôes cruzadas*, por ſupprirem as d'eſta meſma denominaçaõ feitas com o circular de Mayer.

Reflexões.

I. Póde acontecer naõ ſerem parallelas as faces do eſpelho; ſendo aſſim deveremos recorrer ás maneiras actualmente praticadas para corrigir os defeitos d'eſte genero; advertindo com tudo, que nas obſervaçôes cruzadas quaſi nada influirá, como he facil moſtrar, e que em taes cir-

para as longitudes, saõ quasi sempre > 30°, e nunca < 20°, a dita falta reduz-se a nada.

O novo Circular póde tambem ser empregado em medir as alturas dos Astros sobre o horizonte.

He evidente, que este Circular póde igualmente servir para observarmos as alturas dos Astros sobre o horizonte, como acontece ao do Cavalheiro de Bordá; com tanto que, em lugar da observaçaõ preparatoria do parallelismo dos espelhos, se determine o Erro de posiçaõ, afim de attendermos a elle: e ainda que neste cazo naõ seja possivel observar directamente as alturas < 10°, fica o recurso da observaçaõ de revez; observaçaõ sim menos commoda, por ser preciso pôr a cabeça de maneira, que naõ corte os raios da luz vindos do Astro, mas que naõ admitte impossibilidade.

Conseguir-se-ha naõ ser necessario attender ao erro de posiçaõ, observando alturas cruzadas do mesmo modo, que as distancias; e se as alturas fôrem, ora do limbo superior, ora do inferior, escusaremos tambem a correcçaõ do semi-diametro do astro observado.

Reflexões.

Os novos instrumentos devem custar menos que os ordinarios, por serem mais simplices: por esta mesma causa dependem menos das luzes do Artista, que os construir; pois basta, que o seu limbo seja bem contornado, e forme hum plano perfeito; que as alidades girem parallelamente ao dito plano; e que o espelho, e eixo do oculo passem pelo centro: ora as tres primeiras condições saõ communs a todos os instrumentos de reflexaõ; a quarta, que substitue as outras precisas aos mais instrumentos, he assaz facil de alcançar; por tanto combinando este instrumento com os actuaes do mesmo genero, parece-me que posso affirmar ter unido

nelle

nelle o simples ao util; ao menos elle he o primeiro dos quantos conheço, que mostra os objectos do modo mais singelo, a saber, hum directamente, e o outro por huma simples reflexaõ.

Os principios expostos podem ser applicados a todos os instrumentos de Reflexaõ.

Agora que tenho concluido a descripçaõ geral do novo Circular, vou fazer vêr, que os outros instrumentos de Reflexaõ saõ tambem susceptiveis de mudanças semelhantes, mostrando, que mesmo com o Oitante se podem medir quaesquer distancias, havendo neste hum só espelho estanhado-transparente posto no seu centro.

Seja MEO (Fig. IV) hum oitavo de circulo, cujo arco MO esteja dividido em 90°, e NI hum espelho, meio estanhado e meio transparente, posto no centro C, na direcçaõ CO, e fixo segundo o costume sobre huma alidade perpendicularmente ao plano MEO; sejaõ em fim HEO dois oculos fixos, cujos eixos concorraõ em C fazendo hum angulo de 45°, digo, que com hum instrumento d'estes podemos observar todas as distancias da Lua aos mais Astros desde 10° até 180°, e todas as alturas dos Astros sobre o horizonte. NI póde fazer com o eixo de GH todos angulos possiveis desde 0° até 15°, e com o eixo de SR todos os angulos desde 45° até 90°, pois que póde occupar todas as posições diversas comprehendidas entre NI e N'I'; logo podemos observar por GH todos os angulos desde 10° até 90°, e por SR todos os comprehendidos entre 90° e 180°; ora se estes forem alturas, e $<10°$, conhecellos-hemos observando o seu supplemento pelo oculo RS : a razaõ dos 10° he evidente; logo tenho demonstrado.

Notas.

I. Quando as alturas forem $>10°$, e $<90°$, ao mesmo tempo que saõ observadas directamente por GH, podemos

observar por SR os seus supplementos; e assim faremos, que os dois oculos verifiquem a mesma observaçaõ.

II. Sendo as observações bem feitas, e o instrumento sem erro, se pela segunda naõ tivermos o supplemento da primeira, a semi-differença entre estas duas quantidades será igual a 45° ∞ OCO′, e OCO′ > ou < 45°, conforme a segunda observaçaõ der menos, ou mais do que o supplemento da primeira: he pois facil conhecer o valor preciso de OCO′, para se ajuntar o seu dobro aos arcos dados pelo instrumento, quando se observa pelo oculo RS, a fim de ter o numero de gráos, e partes de gráo das distancias observadas.

III Em lugar dos dois oculos pode-se empregar hum, pondo-o nos lugares O, e O′, conforme for necessario.

IV. Póde-se evitar a mudança do oculo, usando de duas alidades, que girem independentes, huma na face superior, e outra na inferior do instrumento; porque supponhamos ser OC a superior, ME a inferior, e que o oculo esteja em O; movendo NI com OC até M poderemos observar por GH os angulos > 10°, e < 90°; chegado pois CO a ME traga-se CM só para OC, separe-se o espelho de OC, e una-se a ME, agora andando com ME até á sua primeira posiçaõ, o espelho girará desde N′I′ até N″I″ formando com o eixo de GH todos os angulos > 45°, e < 90°; lógo poderemos assim medir as distancias angulares comprehendidas entre 90°, e 180°, que he quanto nos faltava. D'esta sorte naõ sómente se evita a mudança do oculo, mas tambem toda a porçaõ OCO′ do Oitante.

V. Se o apparelho central for susceptivel de movimentos semelhantes aos que tenho visto em alguns instrumentos de Reflexaõ enviados por Magalhaens á Real Academia dos Guardas da Marinha, poderemos tambem dispensar-nos de os fazer construir com duas alidades; porque, apenas OC estiver sobre ME, tira-se-lhe o apparelho, e deixando-o immovel na posiçaõ N′I′, faz-se voltar OC a O, onde se lhe reune o mesmo apparelho, com o qual póde OC tornar a CM, e logo NI de N″I′ para N′I″, que he quanto se pertende.

Isto deve ser extremamente facil, construindo a parte circu-

circular da alidade de tal modo, que se possa fixar-lhe o espelho em direcções, que formem entre si angulos de 45°, e nunca em outras.

VI. sendo OCO'=45°, a semi-differença indicada em o n°. II deve representar o erro de posiçaõ, additivo no 1.° caso, e subtractivo no 2.°

VII. Quando o instrumento tem erro, e OCO' >ou<45°, a dita correcçaõ deve corrigir o effeito simultaneo d'estas duas faltas: assim para as conhecer separadamente, determinaremos primeiro o erro, ou observando ao mesmo tempo augulos <90° com outro instrumento ja correcto, ou medindo os mesmos augulos por algum outro meio a fim de os conhecer exactamente, ou medindo angulos conhecidos &c. depois do que nenhuma duvida nos restará sobre este assumpto.

Sendo o arco do instrumento >90°, determinaremos o seu erro, observando por diante, e de revez hum angulo, cujo supplemento naõ exceda o mesmo arco.

VIII. Quando as faces do espelho naõ forem parallelas, calcular-se-haõ os effeitos d'esta falta segundo se costuma.

Poderia continuar a reflectir sobre estes objectos, mas temo ser longo, e muito mais cahir no defeito de pertender generalizar demaziadamente as minhas idéas.

RE-

REFLEXÕES

Sobre certas sommações successivas dos termos das Series arithmeticas, applicadas ás soluções de diversas questões algebricas.

POR

JOSÉ MARIA DANTAS PEREIRA.

Nec ulli nato post mile sæcula præcludetur occasio aliquid adhuc adjiciendi.

Seneca.

Lida em 8 de Jan. de 1794.

NA foluçaõ de varios Problemas da analyfe indeterminada, fomos muitas vezes conduzidos a exprefsões da forma $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} +$ &c. da qual fe requerem as differentes foluções em numeros, ou fimplesmente inteiros, ou inteiros e pofitivos, na hypothefe de fer tambem x hum numero inteiro e pofitivo: he clariffimo o grande incommodo, que deve caufar a fatisfacçaõ do que fe requer, quando efta depende de calcular os numeros a que a dita fórmula fe reduz nas hypothefes fucceffivas de $x = 1, = 2, = 3,$ &c.; e que efte incommodo augmentará tanto mais quanto maior for o expoente m, e mais compofto o valor de x: por efta razaõ fempre nos dirigimos primeiro a conhecer a lei das feries formadas pelas differentes foluções pedidas, a qual, depois de conhecida, nos offerece meios de as continuar com muito menos trabalho: até agora confiftia de ordinario a maneira da dita indagaçaõ (ao menos a que me confta) em achar fuc-

ſucceſſivamente as differenças primeiras, ſegundas, terceiras, e aſſim por diante até ás differenças do gráo m das primeiras $m+1$ ſoluções da fórmula propoſta, precedendo o cuidado de determinar os valores correſpondentes de x, taes que formem huma progreſſaõ arithmetica, e iſto na certeza de que as ditas differenças da ordem m devem ſahir conſtantes; pelo que retrogradando calculariamos todas as outras ſoluções pertendidas por meio de ſimples ſommas: eſte methodo carece de ſe calcularem primeiro $m+1$ ſoluções, para ſe conhecer a ſua lei, e poder depois achar facilmente as ſoluções reſtantes, e aſſim lévanos por hum caminho indirecto ao fim que procuramos; pois he mais proprio conhecer a lei á viſta da fórmula, e com eſta ir calcular depois as meſmas $m+1$ ſoluções primeiras: tal foi o motivo que me conduzio á compoſiçaõ da preſente Memoria, onde tudo he conſequencia da ſoluçaõ do ſeguinte

Problema fundamental.

Calcular por meio de ſimples sommas de progressões arithmeticas as quantidades, a que se reduz a fórmula $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$ *nas hypotheses successivas de* $x = 1, = 2, = 3, \&c.$; *sendo* a, b, c, &c. *ou cifra, ou quantidades reaes; positivas, ou negativas; inteiras, ou fraccionarias.*

Soluçaõ.

Repreſente p o primeiro termo, r a razaõ, e x o numero de termos de qualquer progreſſaõ arithmetica; ſuppondo que T, e $\int$ ſejaõ reſpectivamente os termos geral, e ſommatorio da meſma progreſſaõ ſerá $T = p + r(x-1)$, e $\int = \frac{r(x-1)x}{2} + px = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\right) + px$: ſe a cada termo $\int$ ajuntarmos qualquer quantidade b, re-

 ſul-

fultará huma nova ferie onde teremos o termo geral . . $T'=r\left(\frac{x-1}{1}+\frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\right)+px+b$; e chamando f' o termo fommatorio defta nova ferie ferá $f'=r\left(\frac{x-1}{1}+\frac{(x-2)(x-1)}{1.2}+\frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\right)+p\left(\frac{x}{1}+\frac{(x-1)x}{1.2}\right)$ $+bx$: confiderando agora $f'+i$ como termo geral de outra ferie, e f'' como feu termo fommatorio, ferá

$$f''=r\left(\frac{x-1}{1}+\frac{(x-2)(x-1)}{1.2}+\frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}+\frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4}\right)$$

$$+p\left(\frac{x}{1}+\frac{(x-1)x}{1.2}+\frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3}\right)+b\left(\frac{x}{1}+\frac{(x-1)x}{1.2}\right)+ix,$$ e

affim por diante; donde fe conclue, que fe, fommados os termos de huma progreffaõ arithmetica dos quaes o primeiro for p e a razaõ r, augmentarmos a cada termo da fomma a quantidade b; e feita huma nova fomma, fe ajunta a cada termo della a quantidade i; e fommando depois outra vez, fe augmenta a cada termo defta outra fomma a quantidade k, e affim por diante até completar hum certo numero $m-1$ de fommas, cada termo da ferie refultante ferá reprefentado em geral pela fórmula feguinte, (A), $r\left(\frac{x-1}{1}+\frac{(x-2)(x-1)}{1.2}+\frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}+\right.$

$$\left.\frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4}+\ldots\frac{(x-2)(x-1)x(x+1)\ldots(x+m-3)}{1.2.3.4\ \ldots\ m}\right)+$$

$$p\left(\frac{x}{1}+\frac{(x-1)x}{1.2}+\frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3}+\ldots\frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-3)}{1.2.\ \ldots\ m-1}\right)+$$

$$b\left(\frac{x}{1}+\frac{(x-1)x}{1.2}+\frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3}+\ldots\frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-4)}{1.2.\ \ldots\ m-2}\right)+$$

$$i\left(\frac{x}{1}+\frac{(x-1)x}{1.2}+\frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3}+\ldots\frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-5)}{1.2.\ \ldots\ m-3}\right)+$$

$$k\left(\frac{x}{1}+\frac{(x-1)x}{1.2}+\frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3}+\ldots\frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-6)}{1.2.\ \ldots\ m-4}\right)+$$

&c. He -

He evidente que esta fórmula desenvolvida, e ordenada a respeito de x dará sempre huma equaçaõ do gráo m, onde os coefficientes de x seraõ funcções das indeterminadas r, p, h, i &c., e que destas indeterminadas conterá a equaçaõ desenvolvida tantas, quantas forem as unidades de m, as quaes por consequencia seraõ sempre determinaveis pela igualaçaõ successiva dos coefficientes de huma mesma potencia de x nas duas fórmulas a proposta, e a desenvolvida; logo segue-se, que a expressaõ $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} +$ &c. $+ nx$ he sempre resoluvel pela dita addicçaõ successiva das series arithmeticas; que para assim a resolver saõ precisas $m - 1$ de sommas; e que para determinar logo a primeira progressaõ arithmetica, a que chamaremos *base*, e as outras quantidades h, i, k, &c. que successivamente se devem hir ajuntando, deveremos desenvolver da fórmula superior a parte que fôr correspondente, conforme as unidades de que m constar, igualando depois entre si os coefficientes de huma mesma potencia da variavel, o que dará tantas equações como indeterminadas, das quaes será sempre facillimo tirar o valor destas indeterminadas. Q. E. D. et F.

Para maior clareza ajuntarei o seguinte

Exemplo.

Supponhamos que se pedem todas as soluções da fórmula $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$ nas hypotheses successivas de ser $x = 1, = 2, = 3$ &c.

A parte da expressaõ geral sommatoria, que neste caso deverá desenvolver-se, he $r\Big(x - 1 + \frac{1}{2}(x-2)(x-1) + \frac{1}{6}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1) + \frac{1}{120}(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\Big) + p\Big(x + \frac{1}{2}(x-1)x +$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)+\frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2)\Big)+$
$b\Big(x+\frac{1}{2}(x-1)x+\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)\Big)+i\Big(x+\frac{1}{2}(x-1)x\Big)+kx;$
a qual reduzida, e ordenada a reſpeito de x, dá a ſeguinte expreſſaõ

$$x^5\frac{r}{120}+x^4\Big(\frac{5r}{120}+\frac{p}{24}\Big)+x^3\Big(\frac{5r}{120}+\frac{6p}{24}+\frac{b}{6}\Big)+x^2\Big(\frac{-5r}{120}+\frac{11p}{24}+\frac{3b}{6}+\frac{i}{2}\Big)+x\Big(\frac{-6r}{120}+\frac{6p}{24}+\frac{2b}{6}+\frac{i}{2}+k\Big);$$

igualando termo a termo com a fórmula propoſta temos,

$r=120;\ p=-144;\ b=180;\ i=-36;\ k=-1;$

com eſtes dados paſſaremos a formar as ſeries ſeguintes, e a ultima dellas moſtrará o que ſe quer

−144,	−24,	96,	216,	336,	&c.	
−144,	−168,	−72,	144,	480,	&c.,	primeira ſomma
36,	12,	108,	324,	660,	&c.	
36,	48,	156,	480,	1140,	&c.,	ſegunda ſomma
0,	12,	120,	444,	1104,	&c.	
0,	12,	132,	576,	1680,	&c.,	terceira ſomma
−1,	11,	131,	575,	1679,	&c.	
−1,	10,	141,	716,	2395,	&c.,	quarta ſomma,

que reſolve a queſtaõ: com effeito ſe, ex. gr., ſuppomos $x=4$, vêſe que a fórmula ſe reduz a $1024-256-64+16-4=716=$ ao quarto termo da ultima ſerie.

Nota.

Se a fórmula dada foſſe $ax^m+bx^{m-1}+\ldots H$, achada como aſſima a ſerie, que reſolveſſe $ax^m+bx^{m-1}+\ldots nx$, ajuntando a cada hum dos ſeus termos a quantidade H, teriamos a ſerie competente á fórmula propoſta.

Por exemplo, ſe em lugar da expreſſaõ que fica men-

mencionada se desse esta $x^5-x^4-x^3+x^2-x+8$, augmentando 8 a cada termo da ultima serie superior, teriamos esta

7, 18, 149, 724, 2403, &c.

que satisfaz a questaõ.

Está pois resolvido plenamente o problema proposto; por tanto vamos tratar de algumas das suas applicações.

O que fica dito antes da soluçaõ precedente assás manifesta o grande uso della na analyse indeterminada, para conhecer as leis das series, que resolvem muitos dos seus problemas, e por isso he inutil a demora, que podia fazer sobre este assumpto; porém algumas vezes faz-se preciso usar antes de certas preparações a fim de evitar quebrados, as quaes saõ semelhantes ás de que necessita o problema immediato, que por esta causa resolveremos.

Exposiçaõ.

Achar tres numeros inteiros taes, que, se do triplo do quadrado do primeiro se tirar o segundo, o resto seja igual a oito vezes o terceiro; e que, se do cubo do primeiro se tirar o seu dobro, o resto seja igual ao segundo.

Soluçaõ.

Faça-se o primeiro $=x$, o segundo $=y$, o terceiro $=z$, e teremos $3x^2-y=8z$, $x^3-2x=y$, donde se tira $z=\frac{x(-x^2+3x+2)}{8}$: ora x, y, z devem ser inteiros, mas sendo x inteiro, y tambem o he, pois que temos $y=x^3-2x$; logo resta vêr quaes numeros inteiros pode ser x, para que z, ou $\frac{x(-x^2+3x+2)}{8}$, seja numero inteiro: ora x, relativamente ao divisor 8, ha-de ser hum numero comprehendido em alguma das fórmas seguintes,

$8n$; $8n+1$; $8n+2$; $8n+3$; $8n+4$; $8n+5$; $8n+6$; $8n+7$;

 sen

ſendo x da fórma $8n$, z ſerá evidentemente hum numero inteiro, pois que entaõ he $z = n(24n - 64n^2 + 2)$; ſe x for da fórma $8n+1$, ſerá $z = \frac{(8n+1)(-64n^2+8n+4)}{8}$, e logo naõ ſerá inteiro; mas ſe x fôr da fórma $8n+2$, z ſerá igual a $(4n+1)(-16n^2-2n+1)$, e por conſequencia inteiro: diſcorrendo por diante da meſma maneira veriamos, que, para z ſer numero inteiro, he neceſſario que x ſeja hum numero inteiro pertencente a alguma das fórmas, $8n$, $8n+2$, $8n+4$, $8n+5$, $8n+6$; expreſsões que, ſubſtituidas por x no valôr de z, daõ 1.° $z = 24n^2 - 64n^3 + 2n$, 2.° $z = -64n^3 - 24n^2 + 2n + 1$, 3.° $z = -64n^3 - 72n^2 - 22n - 1$, 4.° $z = -64n^3 - 96n^2 - 43n - 5$, 5.° $z = -64n^3 - 120n^2 - 70n - 12$: cada hum deſtes ultimos valores de z ſerá o que ſe deva calcular pelo noſſo methodo, ſuppondo ſucceſſivamente

$n = 0, = 1, = 2, = 3, =$ &c., o que dará
nos primeiros $x = 0, = 8, = 16, = 24, =$ &c.
nos ſegundos $x = 2, = 10, = 18, = 26, =$ &c.
nos terceiros $x = 4, = 12, = 20, = 28, =$ &c.
nos quartos $x = 5, = 13, = 21, = 29, =$ &c., e ultimamente
nos quintos $x = 6, = 14, = 22, = 30, =$ &c.
calculados x e z, y fica facil.

Notas.

1.ª Se, além de ſer z igual á expreſſaõ fraccionaria $\frac{1}{8}(3x^2 - x^3 + 2x)$, tambem y foſſe igual a outra expreſſaõ fraccionaria, fariamos primeiro que o valor de y contiveſſe ſómente x de incognito, depois indagariamos, que fórmas devia ter x relativamente ao diviſor do valor de y, da meſma ſorte que operamos para z; em fim as fórmas que ſe achaſſem para y multiplicadas duas a duas com as que tiveſſemos determinado para z, dariaõ as novas fórmas, que x devia ter, para ſatisfazer ambas as condi-

çóes

ções ao mesmo tempo, tendo o cuidado de fazer entrar neste numero as fórmas primeiras, que se achassem communas aos dous valores: assim teriamos as expressões, que deveriaõ ser substituidas nos valores de x, e z, para depois os calcular pelo nosso methodo.

2.ª A nota precedente faz ao mesmo tempo conhecer o que se deve praticar quando as expressões fraccionarias forem mais de duas, por isso naõ continuaremos com estes casos.

3.ª Se no enunciado do problema dissessem que z, y, e x deviaõ ser inteiros, e positivos; entaõ, sobre as reflexões já feitas, deveriamos ver tambem, que fosse $x^2 < 3x + 2$, e $x^3 > 2x$, o que dá $x < 3,6$; e $x > 1,4$; ora estas condições combinadas com ser x de alguma das fórmas $8n$, $8n + 2$, &c., fazem ver, que o problema tem huma soluçaõ só em numeros inteiros, e positivos, que vem a ser $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$.

4.ª Todas as preparações, e considerações feitas na soluçaõ do problema, e nas precedentes notas, saõ precisas a fim de naõ calcular hum só numero, que deixe de servir, pois aliás pode-se hir directamente achar todas as soluções da fórmula $\frac{-x^3+3x^2+2x}{8}$ assim como se fez para ter as de $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$; para cujo fim desenvolvendo a parte competente da expressaõ geral sommatoria, e continuando as mais operações, achariamos $r = -\frac{6}{8}$; $p = \frac{6}{8}$; $b = -\frac{2}{8}$; com o que se formariaõ as seguintes series:

$$\div + \frac{6}{8},\ 0 \cdot -\frac{6}{8} \cdot -\frac{12}{8} \cdot -\frac{18}{8} \cdot \text{\&c.}$$

$$\frac{6}{8},\ \frac{6}{8},\ 0,\ -\frac{12}{8},\ -\frac{30}{8},\ \text{\&c.}$$

$$\frac{4}{8},\ \frac{4}{8},\ -\frac{2}{8},\ -\frac{14}{8},\ -\frac{32}{8},\ \text{\&c.}$$

$$\frac{4}{8},\ 1,\ \frac{6}{8},\ -1,\ -5,\ \text{\&c.}$$

a ultima claramente moſtra, que ſó quando $x = 2$, ſahe $z = 1$, numero inteiro e poſitivo: ſe ſe continuaſſe moſtraria tambem, que z era inteiro, quando x foſſe hum dos numeros, 8, 16, 24 &c., 2, 10, 18 &c., 4, 12, 20 &c., 5, 13, 21 &c., 6, 14, 22 &c., que ſaõ juſtamente os numeros das fórmas aſſima expoſtas.

5.ª Naõ devo ommittir a ſeguinte vantagem do preſente methodo, vem a ſer poder-ſe calcular com facilidade huma ſoluçaõ independentemente das outras todas, e poder-ſe depois achar eſtas outras, já retrogradando, já continuando a reſpeito della. Supponhamos que ſe tenha reſolvido hum problema indeterminado, o qual nos conduza á ſeguinte equaçaõ $y = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$, e que pertendamos partir da terceira ſoluçaõ; tendo achado como aſſima os valores de r, p, h, i &c., ſubſtituindo-os na parte deſenvolvida da expreſſaõ geral ſommatoria, teremos que eſta ſe reduzirá a

$$120\left(x - 1 + \frac{1}{2}(x-2)(x-1) + \frac{1}{6}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1) + \frac{1}{120}(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\right) -$$

$$144\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x + \frac{1}{6}(x-1)x(x+1) + \frac{1}{24}(x-1)(x)(x+1)(x+2)\right) +$$

$$180\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x + \frac{1}{6}(x-1)x(x+1)\right) - 36\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x\right) - x;$$

onde fazendo $x = 3$; virá

$120 \times 6 - 144 \times 15 + 180 \times 10 - 36 \times 6 - 3 = 141$ ſoluçaõ procurada.

Querendo agora por meio deſta achar todas as outras, hiriamos calcular os terceiros termos ſucceſſivos da baſe, e das outras ſeries; para o que notariamos, que a fórmula precedente em conſequencia da ſubſtituiçaõ reduz-ſe a

$$120(2+1+1+1+1) - 144(3+3+4+5) + 180(3+3+4) - 36(3+3) - 1.3$$

e logo teremos

$120 . 2 - 144 = 96 =$ ao terceiro termo da bafe.

$120(2+1)-144.3=96+120-144.2=-72=$ 3.° termo da 2.ª ferie.

$120(2+1)-144.3+180=-72+180=108=$ 3.° termo da 3.ª ferie.

$120(2+1+1)-144(3+3)+180.3=108+120-3.144+2.180=156$ $=$ 3.° termo da 4.ª ferie.

$120(2+1+1)-144(3+3)+180.3-36=156-36=120=$ 3.° termo da 5.ª ferie.

$120(2+1+1+1)-144(3+3+4)+180(3+3)-36.3=132 =$ 3.° termo da 6.ª ferie.

$120(2+1+1+1)-144(3+3+4)+180(3+3)-36.3-1=131=$ 3.° termo da 7.ª ferie.

ordenados agora eftes terceiros termos verticalmente, vifto ferem já conhecidas as quantidades r, p, h, i, k, e conhecer-fe tambem o como fe deve ufar dellas, fica facil continuar em qualquer fentido a bafe, e cada huma das outras feries até á ultima. Q. E. F.

A razaõ do modo empregado em achar os terceiros termos todos ficará evidente, a penas fe pondére, que a expreffaõ geral fommatoria, logo que $r, p,$, &c. faõ determinados, deve reprefentar as differentes fommas da progreffaõ arithmetica, a quem r, e p competem, com as mais onde entraõ as quantidades h, i, &c., pela fimples fuppofiçaõ de $m = 2, = 3, = 4, = 5$, &c.

Paffemos agora a moftrar como a foluçaõ do problema fundamental pode fer applicada á refoluçaõ das equaçóes numericas de todos os gráos.

As raizes das equaçóes numericas podem-fe dividir em reaes, e imaginarias; as primeiras fubdividem-fe em racionaes, e irracionaes, pofitivas, ou negativas; e ultimamente, as raizes racionaes podem fer ou numeros inteiros, ou fraccionarios: ora refolver huma equaçaõ tal como por exemplo $ax^m + bx^{m-1} + \ldots h = 0$, he achar para x valores que façaõ $ax^m + bx^{m-1} + \ldots\ldots = -h$; pelo noffo me-

thodo podem calcular-se com facilidade os valores de $ax^m + bx^{m-1} +$ &c., quando se suppoem x successivamente $= 1, 2, 3,$ &c., logo

1.° Se as raizes da equaçaõ proposta forem numeros inteiros, e positivos, na serie dos ditos valores deve forçosamente achar-se $-b$, m de vezes.

2.° Se as mesmas raizes fôrem numeros positivos, e fraccionarios, deverá apparecer naõ $-b$, mas sim numeros entre os quaes $-b$ se contenha; e entaõ ficará conhecida a parte inteira da raiz; em quanto á fracçaõ, que a deve acompanhar, abaixo diremos hum modo de a calcular, o qual servirá tambem para a approximaçaõ das raizes irracionaes.

3.° Sendo porém as raizes da equaçaõ proposta, numeros negativos, inteiros, ou fraccionarios, racionaes, ou irracionaes, a serie mencionada nem conterá $-b$, nem mostrará limites que o contenhaõ; convertidas porém na mesma equaçaõ as raizes positivas em negativas, e reciprocamente, teremos entaõ huma nova equaçaõ, cujas raizes seraõ numeros positivos, que determinaremos pelo modo assima dito.

4.° Se as raizes fôrem reaes, mas humas negativas, e outras positivas, calcularemos estas primeiro, e mudando depois os signaes ás potencias impares de x, passaremos a calcular as raizes positivas da nova equaçaõ, que seraõ as negativas da primeira.

5.° Quando a equaçaõ proposta contiver raizes iguaes, inteiras, ou fraccionarias, he claro que nas series sim se achará $-b$, ou limites, que o contenhaõ, mas naõ tantas vezes quantas saõ as unidades de m; por quanto, suppondo c huma das raizes iguaes, as series deveráõ mostrar, que $ax^m + bx^{m-1}$ +&c. se reduz a $-b$ quando $x=c$, mas de nenhuma sorte podem fazer conhecer quantos factores $x-c$ se involvem na dita equaçaõ, de maneira que, suppondo haver n de raizes c, as series só mostraráõ $m-n+1$ de raizes; e se a equaçaõ contivesse n de raizes

zes

zes c, q de raizes d, r de raizes e, &c., as ſeries ſó nos fariaõ conhecer $m - n - q - r + 3$, &c. de raizes, o que he evidente; eſta falta tem o prompto remedio de ſe dividir a equaçaõ propoſta pelos factores correſpondentes ás raizes achadas, pois aſſim obteremos huma equaçaõ de menor gráo, que reſolvida como a precedente, nos dará o meſmo numero, e grandeza de raizes, ſe eſtas eraõ iguaes duas a duas; ou menos ſe entre ellas houverem algumas iguaes tres a tres, quatro a quatro, &c.: no primeiro caſo teremos achado todas as raizes pedidas, no ſegundo dividiremos a nova equaçaõ pelos factores ſimples, que ella nos der, e teremos outra, que tambem reſolveremos, continuando aſſim até achar as m raizes.

6.° Quando, formadas as ſeries para as raizes poſitivas, e negativas, naõ encontrarmos $-b$, nem limites que o comprehendaõ; ou quando o naõ encontrarmos tantas vezes quantas forem as unidades de m, e dividindo depois a equaçaõ propoſta pelos factores correſpondentes ás raizes achadas, a nova equaçaõ for tal que o ſeu ultimo termo, ou naõ ſe contenha nas ſeries que ſe fizerem para a reſolver, ou ſe contenha menos vezes do que ſaõ nella as unidades do maior expoente da incognita; e aſſim ſucceſſivamente, de maneira que por fim cheguemos a huma equaçaõ, cujo ultimo termo naõ entre nas ſeries; he manifeſto que ſe deve concluir, no primeiro caſo, que todas as raizes da equaçaõ propoſta ſaõ imaginarias; e no ſegundo, que ſaõ imaginarias as que reſtaõ a conhecer; porque viſto naõ entrarem nas ſeries naõ podem ſer numero algum, racional, ou irracional, poſitivo, ou negativo, e por conſequencia naõ podem ſer numero algum real.

Notas.

1.ª He neceſſario advertir, que de tres modos póde $-b$ ter limites que o comprehendaõ; ou ſendo hum dos termos das ſeries menor que $-b$, e o ſeu immediato maior

maior; ou ſendo ambos menores, ou maiores que $-b$; da meſma ſorte que ab póde exiſtir entre mn, e pq, ou ſendo $ab > mn$, e $< pq$, ou ſendo $a'b' > m'n'$, e $> p'q'$, ou ſendo $a''b'' < m''n''$, e $< p''q''$; por iſſo deve haver cuidado em decidir, ſe $-b$ tem ou naõ limites, que o comprehendaõ, e por tanto vamos a notar o como ſe deve proceder em ſemelhantes caſos: conhecer que $-b$ tem limites, quando he como $ab > mn$, e $< pq$ he couſa clariſſima; $-b$ terá lemites, ſendo maior que os termos da ſerie, quando fôr como $a'b' > m'n'$, e $> p'q'$, iſto he, quando a ſerie decreſcer de cada hum dos termos immediatamente menores do que $-b$ para os lados; em fim $-b$ terá limites ſendo menor do que dois termos conſecutivos da ſerie, quando deſtes para os lados a ſerie fôr augmentando.

2.ª A nota 5.ª do exemplo precedente faz obſervar, que eſte methodo tem a grande vantagem de principiar a ſerie dos valores no termo que ſe quizer, e por eſte motivo pode poupar muito trabalho principiando o calculo em hum termo, que pouco mais ou menos repreſente x na equaçaõ propoſta: para iſto poderemos ſervir-nos com toda a vantagem, ou das idéas relativas aos termos dominantes das equações, expoſtas por M. de Lagny nas Memorias de Pariz para o anno de 1706; ou das de M. de la Grange eſcritas nas Memorias de Berlin para o anno de 1767: onde, e nas de 1768, ſe acharáõ tambem couzas aſſás intereſſantes ſobre a reſoluçaõ geral das equações numericas de todos os gráos.

3.ª No uſo do methodo ſe conhecerá tambem ſer elle tal, que a meſma formaçaõ da ultima ſerie vai moſtrande ſe ha, ou naõ mais que eſperar della, circunſtancia que tambem poupa o trabalho inutil, a que muitas vezes obrigaõ aquelles methodos, que de longe naõ moſtraõ os limites onde ſe deve parar.

4.ª Note-ſe mais, que a ſubſtituiçaõ Newtoniana de introduzir por x os numeros 1, 2, 3, &c. -1, -2, -3, &c. até

até se alcançar hum resultado positivo, e outro negativo, tem o defeito notado por M. Bezout, de naõ satisfazer quando as raizes da equaçaõ saõ iguaes, defeito que se naõ encontra em o presente; pois que as raizes da equaçaõ, ou devem ser imaginarias, ou infallivelmente saõ dadas por elle; de sorte que, naõ achar por este methodo algumas raizes, he signal certissimo de ellas serem imaginarias, e que por consequencia deve a equaçaõ, que as contém, ser decomposta do modo competente.

5.ª Só póde objectar-se ao meu methodo trabalho inutil, quando as raizes fôrem todas imaginarias; mas he elle tal, que neste caso formadas as series, logo desde os primeiros termos se conhece serem as raizes imaginarias, como deve ser, e como se pode vêr resolvendo, por exemplo, a equaçaõ $x^4 + 6x^3 + 26x^2 + 46x + 65 = 0$, cujas raizes saõ todas imaginarias; para o que deve primeiro notar-se, que, vista a disposiçaõ dos signaes, se as raizes fossem reaes, naõ podiaõ ser senaõ negativas.

Resta agora dar o modo de calcular as raizes fraccionarias, e approximar as irracionaes; o que vou executar na soluçaõ do seguinte problema, que servirá de exemplo aos mais do mesmo genero.

Problema.

Achar as raizes da equaçaõ $x^3 - x^2 - 41x - 100 = 0$.

Soluçaõ.

A equaçaõ proposta deve conter duas raizes positivas, e huma negativa; para determinar as primeiras formaremos as seguintes series:

$\div - 2. \quad 4. \quad 10. \quad 16. \quad 22. \quad 28$, &c.
$-2, \quad 2, \quad 12, \quad 28, \quad 50, \quad 78$, &c.
$-41, -37, -27, -11, +11, +39$, &c.
$-41, -78, -105, -116, -105, -66$, &c.

a ultima bem patenteia, que as duas raizes positivas saõ fraccionarias, e que devem estar, a primeira entre 2, e 3, e a segunda entre 5, e 6; porque -100 cahe entre -78, e -105, e entre -105, e -66: tratêmos pois de hir approximar a raiz menor, e para isto supporemos que ella seja

$2 + 0,1.y$, ou $2 + 0,01.y$, ou $2 + 0,001.y$ &c.

conforme a quizermos approximada até ás décimas, centessimas, millessimas, &c.; por agora faça-se $x = 2 + 0,1.y$, este valor de x substituido na equaçaõ proposta a transformará nesta $y^3 + 50y^2 - 3300y + 22000 = 0$, onde indagaremos o valor de y, assim como em a proposta se examinou o de x, o que nos dará $y > 7, < 8$, e logo a raiz até ás décimas será 2,7. Querendo-a agora até ás centessimas, ou transformariamos a equaçaõ precedente nesta $y^3 + 500y^2 - 330000y + 22000000 = 0$, a qual resolvida satisfaria a nossa pertençaõ, advertindo, que para evitar trabalho deveriamos calcular do termo 70 por diante, visto sabermos já que as décimas saõ 7; ou fariamos $y = 7 + 0,1.z$, valor que substituido por y daria

$$z^3 + 710z^2 - 245300z + 1693000 = 0,$$

equaçaõ onde facilmente determinariamos as centessimas da raiz: e continuando assim chegariamos em fim ao pertendido gráo de approximaçaõ. Q. E. F.

Notas.

1.ª He manifesto, que desta maneira approximariamos a raiz até onde quizessemos, se ella fosse irracional, mas que a ser racional achariamos huma dizima, ou finita, ou periodica, que seria sempre facil converter em quebrado.

2.ª

2.ª A equaçaõ em y deve ter tres raizes, cada huma das quaes junta a 2 formará huma das raizes da proposta; e logo conhecidas aquellas, estaraõ conhecidas estas.

3.ª Quando muitas raizes fôrem iguaes em quanto ás unidades; ás unidades, e decimas; ás unidades, decimas, e centessimas; &c. o seu primeiro aspecto (por assim dizer) será ou de imaginarias, ou de absolutamente iguaes; porém á medida que formos resolvendo as equações em y, em z, &c. iremos formando o verdadeiro conceito das raizes, e determinando o seu exacto valor.

4.ª Este methodo de approximar he certo, e naõ obstante parecer algum tanto longo, com tudo naõ o he quanto parece: todavia sempre satisfaz ao seu fim, que he mostrar o uso, que pode ter a soluçaõ do Problema fundamental na approximaçaõ das raizes das equações: dos methodos, que para isto mesmo tenho visto até agora, o mais breve foi exposto em 1774 á Real Academia das Sciencias de Pariz pelo Marquez de *Courtivron*, em huma elegante Memoria, no fim da qual mostra a identidade da sua ultima formula com a de *Euler*, que nesse tempo appareceu sem a respectiva demonstraçaõ; por isto, em quanto diz respeito ao presente assumpto, reporto-me absolutamente á dita Memoria, posto que ella necessite de algumas observações, as quaes deixo agora de fazer por naõ ser muito extenso.

Igual motivo me determina a omittir a applicaçaõ do meu methodo, aliás evidente, ás sommações successivas dos termos, e potencias dos termos das progressões arithmeticas; assim como tambem á determinaçaõ immediata das ballas contidas em pilhas de qualquer figura, contentando-nos com dar fim a esta Memoria mostrando, como o mesmo methodo nos conduz a determinar os coefficientes do binomio Newtoniano.

1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
1	3	6	10	15	21	28	36	&c.
1	4	10	20	35	56	84	120	&c.
1	5	15	35	70	126	210	360	&c.
1	6	21	56	126	252	462	822	&c.
1	7	28	84	210	462	924	1746	&c.

Se, ordenando a serie de unidades representada pela figura superior, formos sommando estas successivamente comsigo mesmas, e achando por consequencia os diversos numeros naturaes, e figurados; e se depois considerarmos os numeros, que ficaõ distribuidos diagonalmente, a saber,

1.° 1, 1
2.° 1, 2, 1
3.° 1, 3, 3, 1
4.° 1, 4, 6, 4, 1
5.° 1, 5, 10, 10, 5, 1
&c.

conheceremos facilmente, que elles representaõ os coefficientes das potencias successivas de qualquer binomio simples; vê-se pois, que as expressões geraes dos mesmos coefficientes podem ser achadas como corollarios do nosso Problema fundamental, bastando para isto fazer as reflexões seguintes:

1.ª Que a base tem o primeiro termo igual a 1, e a razaõ igual a o.

2.ª Que as quantidades *h*, *i*, &c. saõ tambem iguaes a cifra.

3.ª

3.ª Que sendo μ o expoente da potencia á qual o binomio proposto deva ser elevado, o primeiro coefficiente he sempre o primeiro termo da somma μ, ou o termo $\mu+1$ da primeira serie, ou da base, o qual vem a ser 1.

4.ª Que o segundo coefficiente, he o segundo termo da somma $\mu-1$, ou o termo μ da serie segunda, que forma a primeira somma da base.

5.ª Que o terceiro coefficiente, he o terceiro termo da somma $\mu-2$, ou o termo $\mu-1$ da serie terceira, somma segunda da base.

6.ª Que o quarto coefficiente, he sempre o quarto termo da somma $\mu-3$, ou o termo $\mu-2$ da serie quarta, somma terceira da base; e assim por diante: donde se conclue, que em geral o σ coefficiente he igual ao termo $\mu-\sigma+2$ da somma $\sigma-1$ da base dita.

Das precedentes observações resulta

1.° Que da serie achada na soluçaõ do Problema fundamental, a parte que deve satisfazer estas questões, he,

$$x+\frac{1}{2}(x-1)x+\ldots\ldots\frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-3)}{2\ \ldots\ m-1}$$

2.° Que nesta parte deve fazer-se $m=\sigma$, e $x=\mu-\sigma+2$, o que a faz transformar em a seguinte $\mu-\sigma+2+\frac{1}{2}(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)+\frac{1}{6}(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)(\mu-\sigma+3)+\ldots$

$$\frac{(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)\ \ldots\ (\mu-1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ (\sigma-1)}.$$

Agora bastará fazer successivamente $\sigma=2, 3, 4,$ &c. para obter as expressões geraes pertendidas, como se vê nos seguintes exemplos:

$\sigma=2.$

2.° Coefficiente $=\mu-2+2=\mu$

$$\sigma = 3.$$

3.° Coef. $= \mu - 1 + \frac{1}{2}(\mu - 2)(\mu - 1) = \mu . \frac{\mu - 1}{2}$.

$$\sigma = 4.$$

4.° Coef. $= \mu - 2 + \frac{1}{2}(\mu - 3)(\mu - 2) + \frac{1}{6}(\mu - 3)(\mu - 2)(\mu - 1)$

$$= \mu . \frac{\mu - 1}{2} . \frac{\mu - 2}{3}.$$

&c.

Q. E. F. et D.

DES-

DESCRIPÇÃO

De hum Monstro de especie Humana, existente na Cidade de S. Paulo na America Meridional.

POR BENTO SANCHES DORTA.

TOdos os dias admiramos a Natureza pela variedade das suas producções; e muitas vezes não he menos attendivel aos nossos olhos, quando ella se aparta das suas mais constantes leis, e parece commetter alguns erros. O espirito do homem he bastantemente agitado quando pertende descubrir o mysterio das suas operações. Feliz aquelle, a quem a mesma Natureza franquêa o seu sanctuario, e deixa ver as causas finaes de seus trabalhos.

A geração dos Monstros na especie Humana não he Fenomeno totalmente raro; pois lêmos nas Collecções de Memorias das mais célebres Academias da Europa noticias d'esta classe, que de tempos a tempos apparecem. Seguindo eu este exemplo, he que me animo a pôr na presença da Academia a Descripção do Monstro, que actualmente existe nesta Cidade. Eu me lisongêo, que nella se achará alguma cousa de raro, e extraordinario, que em outra parte se não encontra.

Tem-se tomado por systema até agora dividir os Monstros, que pertencem á especie Humana, em tres classes. Primeira classe: *Monstros por excesso, ou augmento de membros*. Segunda classe: *Monstros por falta, ou diminuiçaõ de membros*. Terceira classe: *Monstros por mudança de membros*. Da segunda classe he o Monstro, de que vou tratar.

Nesta Cidade existe huma rapariga de idade de quatorze annos, pouco mais, ou menos, chamada Anna Maria, que nasceo sem nenhum dos braços, nem final, ou crescença donde parecesse quererem sahir, e só tem em si-

ma

ma do hombro direito huma pequena prominencia, tendo de ambos os lados bem colocados, e conformes os oſſos da eſpadua, ou a que chamamos eſcapula: o mais corpo he bem proporcionado, exceptuando a perna, e pé direito; pois a perna, começando do tronco, eſtá torcida para a parte de fóra, e algum tanto mais groſſa do que a eſquerda, e muito mais curta, o que faz que manqueje quando anda: no meſmo torcimento continúa até ao metatarſo: o pé fica quaſi todo virado para fóra, tendo o dedo pollegar com alguma deformidade, e principalmente por eſtar muito ſeparado dos outros dedos, e não poder unir-ſe-lhe.

Eſta rapariga he filha de pais incognitos, porém ſabe-ſe, que he filha de India já domeſtica; pois naſcendo em huma das Aldêas de Indios, que aqui temos na diſtancia de ſinco leguas, foi achada expoſta n'hum campo por huma India, que a levou a baptizar, e a creou; ſendo talvez abandonada por ſeus pais pela verem falta de membros, praticando ainda os ſeus antigos, crueis, e barbaros coſtumes de matarem, ou abandonarem ſeus filhos quando naſcem com defeitos em ſeus membros.

O que a Natureza negou a eſta creatura, não lhe dando braços, lhe avantajou na intelligencia, e habilidade, para uſar de pés, e dentes para ſupprir todas as funções, em que os braços lhe erão preciſos. Com o dedo pollegar do pé direito pega na colhér, e garfo, quando come; com os dous pés pega na vaſilha d'agua, quando quer beber; com o pé direito pentêa o ſeu cabello da cabeça; com o meſmo pé faz ſua coſtura, e enfia a agulha, &c. Faz renda de linhas, pegando com ambos os pés nos bilros, e mudando os alfinetes com o dedo pollegar do direito: da qual renda, que eu lhe vi trabalhar, ajunto aqui a amoſtra (*) de ſete pollegadas de comprimento, parecen-do-

(*) Eſta amoſtra exiſte no Archivo da Academia juntamente com hum deſenho, que figura o Monſtro, de que ſe trata, e com o Inſtrumento de Juſtificação, que comprova a verdade do facto.

do-me, que he quanto basta para se admirar. Ella muitas vezes anda a cavallo, quando vai fóra da Cidade, o que faz com bastante desembaraço, pegando na redea, e guiando o cavallo com o pé direito, tendo o esquerdo no estribo. Em fim he muito digno de admiraçaõ este individuo, e muito mais sendo filha de pais selvagens.

Juntamente com esta breve Descripçaõ remetto o Instrumento de Justificação authentica, que aqui fiz tirar perante o Juiz Ordinario d'esta Cidade, em que fiz jurar as pessoas, que observão, e vivem com a dita Anna Maria, para comprovar a verdade de quanto tenho exposto.

OBSERVAÇOES ASTRONOMICAS

Feitas na Cidade de S. Paulo na America Meridional

POR BENTO SANCHES D'ORTA.

Diſtancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith, ao tempo da ſua paſſagem pelo Meridiano; para a determinação da altura do Polo da Cidade de S. Paulo, ſendo obſervadas as ſuas alturas com hum Quadrante de hum pé de raio: feito em Londres por Siſſon.

Anno de 1788.	Diſtancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith.	Declinaçaõ do Sol Auſtral.	Altura do Pólo Auſtral.	Anno de 1789.	Diſtancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith.	Declinaçaõ do Sol Auſtral.	Altura do Pólo Auſtral.
Novemb. 4	7° 49′ 11″	15° 43′ 57″	23° 33′ 8″	Janeiro 3	0° 48′ 17″	22° 44′ 58″	23° 33′ 15″
5	7 31 1	16 2 5	23 33 6	8	1 25 23	22 7 52	23 33 15
7	6 55 31	16 37 32	23 33 3	10	1 44 22	21 48 41	23 33 3
8	6 38 29	16 54 49	23 33 18	12	2 2 37	21 30 24	23 33 1
10	6 4 30	17 28 34	23 33 4	19	3 23 44	20 9 23	23 33 7
11	5 48 10	17 44 57	23 33 7	Fever. 10	9 29 46	14 3 16	23 33 2
12	5 32 3	18 1 4	23 33 7	13	10 29 58	13 3 7	23 33 5
13	5 16 4	18 16 52	23 32 56	14	10 50 17	12 42 48	23 33 5
19	3 48 31	19 44 38	23 33 9	17	11 53 14	11 40 0	23 33 14
22	3 9 19	20 23 46	23 33 5	18	12 14 24	11 18 44	23 33 8
28	2 1 31	21 31 42	23 33 2	19	12 35 49	10 57 18	23 33 7
29	1 51 19	21 41 37	23 32 56	20	12 57 27	10 35 40	23 33 7
Dezemb. 3	1 16 11	22 17 4	23 33 15				
5	1 0 51	22 32 13	23 33 4				
6	0 54 2	22 39 6	23 33 8				
7	0 47 32	22 45 36	23 33 8				
9	0 35 52	22 57 11	23 33 3				
18	0 6 32	23 26 33	23 33 5				
19	0 5 33	23 27 29	23 33 2				

Reſultado 23° 33′ 6″ 17‴

Advertencia.

As Declinações do Sol foraõ tiradas do *Conhecimento dos Tempos* dos annos reſpectivos, e calculadas para eſte Meridiano, na ſuppoſição de ſer a differença do Meridiano de París $3^h\ 16'\ 16''$

Obſer-

Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter feitas na Cidade de S. Paulo, com hum Oculo achromatico de Dollon de 17 pollegadas de fóco.

Dias das observações. Anno 1788.	Satellites.	Calculadas para Pariz, extrahidas do *Conhecimento dos tempos.* Tempo verdadeiro.	Observações na Cidade de S. Paulo. Tempo verdadeiro.	Differença. Tempo verdadeiro.	Advertencias O Tempo foi determinado na pendula, pelas alturas correspondentes, em tres dias consecutivos; antes do dia; no dia; e depois do dia das observações, e corrigido pela equação do meio dia.
Dezembro 19	1.°	10h 8′ 36″ Im.	12h 52′ 24″	—3h 16′ 12″	O Ceo ao tempo da Observação estava bem claro, as faxas do Planeta bem terminadas: o Oculo alguma couza tremia por causa do vento, que assoprava.
Anno 1789					
Fevereiro 28	3.°	12 54 30 Im.	9 35 32	—3 18 58	Ceo claro; Jupiter bem terminado, e as faxas bem visiveis.
.... 28	1.°	13 10 48 Em.	9 54 34	—3 16 14	O mesmo.
Março .. 9	1.°	9 36 21 Em.	6 20 8	—3 16 13	Ceo claro, porém muito crepusculo.
.... 16	2.°	14 21 51 Em.	11 5 26	—3 16 25	Ceo muito claro, o Planeta bem terminado, as faxas muito patentes.
.... 22	4.°	14 0 33 Im.	10 44 23	—3 16 10	Ceo claro.
.... 23	1.°	13 30 7 Em.	10 13 42	—3 16 25	Ceo muito claro, as faxas e Jupiter bem terminados.
Abril.... 1	1.°	9 56 27 Em.	6 40 20	—3 16 7	Ceo ennuvoado, e vento forte, que fazia tremer o Oculo.
.... 24	1°.	10 15 48 Em.	6 59 28	—3 16 20	Ceo muito claro, o Planeta bem terminado, as faxas bem patentes.
Maio 1	1.°	12 11 49 Em.	8 55 31	—3 16 18	Ceo bem sereno, porém a Lua muito clara, e bem proxima de Jupiter: as faxas bem visiveis.
.... 17	1.°	10 31 5 Em.	7 14 56	—3 16 9	Ceo muito claro, Jupiter e as suas faxas bem terminadas.
Junho... 9	1.°	10 41 35 Em.	7 25 28	—3 16 7	Ceo pouco claro, o Planeta mal terminado, as faxas mal se percebião.

Distan-

Distancias de algumas Estrellas ao Zenith, ao tempo da passagem d'estes Astros pelo Meridiano, para a determinação da altura do Pólo na Cidade de S. Paulo, sendo observadas as suas alturas com o mesmo Quadrante, com que observei as do Sol.

Annos de 1788, e 1789.	Distancias verdadeiras ao Zenith.	Declinação das Estrellas.	Altura do Pólo Austral.	*Advertencias.*
Rigel.	15° 5′ 51″	8° 27′ 25″ Aust.	23° 33′ 16″	
δ Orion.	23 25 15	0 8 4 A.	23 33 19	
β Navio.	45 17 53	68 51 7 A.	23 33 14	
θ Navio.	39 44 19	63 17 36 A.	23 33 17	
α Cruzeiro.	38 22 41	61 55 51 A.	23 33 10	
Aldebaran.	39 37 36	16 4 28 Bor.	23 33 8	
ε Leão.	48 17 20	24 44 10 B.	23 33 10	
μ Leão.	50 32 53	26 59 31 B.	23 33 22	
Regulus.	36 32 46	12 59 37 B.	23 33 9	
ζ Leão.	48 0 57	24 27 40 B.	23 33 17	
δ Leão.	45 13 57	21 40 42 B.	23 33 15	
β Leão.	39 18 26	15 45 7 B.	23 33 19	
		Resultado	23° 33′ 14″ 40‴	

Advertencias.

As Declinações das Estrellas são tiradas do *Conhecimento dos Tempos*, e corrigidas para o mez de Março, em que tomei as suas alturas meridianas. As Estrellas Rigel, δ Orion, e Aldebaran tomei as suas alturas meridianas em Dezembro de 1788.

Eu verifiquei novamente o erro do meu Quadrante pelo meio de duas alturas meridianas de Estrellas; huma com declinação boreal, e outra austral, e quasi da mesma altura, as quaes fôrão θ Navio, e Aldebaran; β Navio δ Leão; e com effeito achei augmentado o erro subtractivo do Instrumento: augmento que me parece proceder de ser desarmado de todo para se limpar nas vesperas da minha sahida do Rio de Janeiro.

Como as alturas meridianas do Sol fôrão tomadas antes da verificação do Quadrante, fôrão novamente corrigidas d'este augmento.

Não verifiquei o Quadrante antes das alturas do Sol, por não haver noite clara, que me deixasse tomar alturas de Estrellas com exactidão, pois sempre fôrão naquelle tempo cubertas de todo, ou por intervallos.

Ecli-

Eclipse da Lua de 28 de Abril 1790. observado com hum Oculo Achromatico de Dollond de 17 pollegadas de foco.

Immersões.	Tempo Verdadeiro. Hor.Min.Seg.	Emmersões.	Tempo Verdadeiro. Hor.Min.Seg.
Principio do Eclipse . .	7 3 46	Principio da Emmersaõ da Lua	9 38 2
Grimaldus	7 24	Grimaldus	40 23
Aristarcus	9 47	Aristarcus	46 27
Keplerus	11 20	Keplerus	49 51
Mare Humorum começa.	16 16	Mare Humorum	51 31
Copernicus	20 20	Bullialdus	55 27
Mare Humorum acaba .	21 6	Copernicus	56 21
Mare Nubium principia.	22 42	Tycho	10 0 47
Plato	25 33	Plato	1 52
Mare Nubium finda . .	30 50	Mare Nubium. Duvidosa.	3 25
Bullialdus	31 12	Mare Serenitatis começa. Duvidosa	12 17
Mare Serenitatis principia.	31 32	Mare Serenitatis finda .	20 49
Tycho principia	34 9	Mare Tranquilitatis . . .	23 54
Tycho finda	35 27	Proclus	29 14
Mare Serenitatis finda .	40 1	Mare Crisium começa .	29 52
Proclus	49 20	Mare Crisium finda . . .	32 4
Mare Crisium principia .	50 2	Fim do Eclipse	34 52
Mare Crisium acaba . . .	54 54	Fim da Penumbra. . . .	37 23
Immersaõ total da Lua .	8 0 59		

ADVERTENCIAS

A Pendula foi regulada pelas alturas correspondentes nos dias 26, 27, 28, e 29, corrigidas pela correcçaõ do meio dia.

O Céo esteve todo o tempo, que durou o Eclipse, clarissimo e sereno sem haver o menor vento, que fizesse tremer o oculo.

A Lua todo o tempo, que esteve immergida, parecia-se bem a hum ferro em braza; porém muito diminuta a sua côr para o limbo Occidental.

Em todo o tempo, que durou o Eclipse, sustentou-se o Barometro n' altura de 25″ 10‴, 7½ e o Thermometro de Farenneith em 60°.

MEMORIA

Sobre as Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes.

POR FRANCISCO DE BORJA GARÇAÕ STOCKLER.

SECÇAÕ I.

Das Equações de Condiçaõ das Funcções Fluxionaes, que saõ Fluxões exactas.

§. I.

Lida em 22 de Junho de 1791.

DEpois que M. de Condorcet deo ao público a sua excellente Obra sobre a Theorica Geral do Calculo Integral, ou Methodo inverso das Fluxões todos os Geometras sabem, que sendo V huma Funcçaõ Fluxional de qualquer ordem n, e de qualquer numero de variaveis x, y, &c. para que seja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o será precizo que cada huma das series de coefficientes, que multiplicaõ as differentes fluxões de cada variavel primitiva na expressaõ.

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{ddx}ddx + \frac{dV}{d^3x}d^3x + \ldots + \frac{dV}{d^{n+1}x}d^{n+1}x$$
$$+ \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{ddy}ddy + \frac{dV}{d^3y}d^3y + \ldots + \frac{dV}{d^{n+1}y}d^{n+1}y$$
$$+ \&c.$$

que por maior simplicidade escrevo assim

$$dV = N^{1\prime}dx + N^{2\prime}dp + N^{3\prime}dp' + \ldots + N^{(n+1)\prime}dp^{(n-1)\prime}$$
$$+ P^{1\prime}dy + P^{2\prime}dq + P^{3\prime}dq' + \ldots + P^{(n+1)\prime}dq^{(n-1)\prime}$$
$$+ \&c.$$

sa-

ſatisfaçaõ (naõ ſuppondo Fluxaõ alguma conſtante) a hum numero n de Equações de condiçaõ, que ſaõ para os coefficientes das Fluxões da variavel x

$$N^{1\prime} - dN^{2\prime} + ddN^{3\prime} - d^3N^{4\prime} + d^4N^{5\prime} - d^5N^{6\prime} + \&c. = 0$$

$$N^{2\prime} - 2dN^{3\prime} + 3ddN^{4\prime} - 4d^3N^{5\prime} + 5d^4N^{6\prime} - \&c. = 0$$

$$N^{3\prime} - 3dN^{4\prime} + 6ddN^{5\prime} - 10d^3N^{6\prime} + \&c. = 0$$

$$N^{4\prime} - 4dN^{5\prime} + 10ddN^{6\prime} - \&c. = 0$$

- -

- -

$$N^{n\prime} - ndN^{(n+1)\prime} = 0$$

Para os coefficientes das Fluxões da variavel y

$$P^{1\prime} - dP^{2\prime} + ddP^{3\prime} - d^3P^{4\prime} + d^4P^{5\prime} - d^5P^{6\prime} + \&c. = 0$$

$$P^{2\prime} - 2dP^{3\prime} + 3ddP^{4\prime} - 4d^3P^{5\prime} + 5d^4P^{6\prime} - \&c. = 0$$

$$P^{3\prime} - 3dP^{4\prime} + 6ddP^{5\prime} - 10d^3P^{6\prime} + \&c. = 0.$$

$$P^{4\prime} - 4dP^{5\prime} + 10ddP^{6\prime} - \&c. = 0.$$

- -

- -

$$P^{n\prime} - ndP^{(n+1)\prime} = 0$$

e aſſim ſucceſſivamente a reſpeito de todas as outras variaveis primitivas, que entrarem na Funcçaõ propoſta.

§. II.

Igualmente ſe ſabe, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem, baſta, que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ a todas as Equações antecedentes menos a ultima de cada ſerie. Que para ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem, baſ-

ta que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ a todas as Equações antecedentes menos as duas ultimas de cada ſerie. E finalmente que para ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ordem immediatamente inferior, baſta que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ a primeira Equaçaõ de cada ſerie : condiçaõ eſta que já ſe conhecia antes da publicaçaõ da Obra de M. de Condorcet, mas cuja demonſtraçaõ ſe ignorava; pois que o Celebre Leonardo Euler, a quem eſte Theorema he devido, o publicou ſem ella em os Commentarios da Academia Imperial de Petresburgo, exaltando-o porém como huma d'aquellas verdades, que deviaõ ter, e com effeito tem hum uſo admiravel no Calculo Integral.

§ III.

Ninguem porém até ao prezente (ao menos que eu ſaiba) tem ſimplificado eſtas condições deduzindo dos principios, de que ellas ſe derivaõ, ou de outros quaeſquer, condições mais ſimpleces em ſi, ou dependentes de menor numero de operações, e por conſequencia mais faceis de applicar á pratica; e por iſſo fiz d'eſta inveſtigaçaõ o objecto da prezente Memoria.

§. IV.

Reflectindo em os coefficientes numericos dos termos de cada Equaçaõ, das que compoem a ſerie de condições relativas a qualquer variavel, facilmente ſe vê, que os coefficientes da primeira formaõ a ſerie dos numeros conſtantes: os coefficientes da ſegunda a ſerie dos numeros naturaes: os coefficientes da terceira a ſerie dos numeros triangulares: os coefficientes da quarta a ſerie dos numeros piramidaes, e aſſim ſucceſſivamente os coefficientes de todas as outras as ſeries de todos os outros numeros figurados; de ſorte que em geral podemos dizer, que os coefficientes de qualquer das ſobreditas Equações, exceptuando a primeira,

conſti-

constituem huma serie formada pela addiçaõ successiva dos coefficientes da precedente.

§. V.

Naõ he menos facil de ver, que o numero dos termos da serie formada pelos coefficientes da primeira Equaçaõ he $n+1$: o numero dos termos da serie formada pelos coefficientes da segunda he n : o numero dos termos da serie formada pelos coefficientes da terceira he $n-1$: o numero dos termos da serie formada pelos coefficientes da quarta he $n-2$: e que finalmente o numero dos termos da serie formada pelos coefficientes da ultima he 2 : donde se segue pela natureza das mesmas series, que o ultimo termo da segunda he n : o ultimo termo da terceira he $\frac{n(n-1)}{1.2}$: o ultimo termo da quarta he $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}$: o ultimo termo da quinta he $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.}$: e assim successivamente até a ultima, cujo ultimo termo deve ser n ; pois que o ultimo termo de cada huma he igual á somma dos termos da precedente menos o ultimo. Discorrendo semelhantemente se verá, que o penultimo termo da segunda he $n-1$: o penultimo termo da terceira he $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$: o penultimo termo da quarta he $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$: e assim progressivamente até a penultima, cujo penultimo termo deve por consequencia ser $n-1$; por ser o penultimo termo de cada huma igual á somma dos termos da antecedente menos os dois ultimos. Do mesmo modo se acharaõ todos os termos intermedios de cada huma reprezentados por expressões geraes; e portanto escrevendo as mesmas series por ordem inversa, isto he, começando pela ultima, seraõ como se segue.

$1;\quad n$

$1;\ n-1;\ \frac{n(n-1)}{1.\,2.}.$

$1;\ n-2;\ \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.};\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}.$

$1;\ n-3;\ \frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2.};\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.};$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}.$

$1;\ n-4;\ \frac{(n-3)(n-4)}{1.\,2.};\ \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\,2.\,3.};$

$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4.};\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.}$

&c.

§. VI.

D'aqui ſe conclue, que invertendo tambem a ordem das Equações de condição dadas por M. de Condorcet, eſtas ſeraõ para a variavel x

$$N^{n,} - ndN^{(n+1),} = 0$$

$$N^{(n-1),} - (n-1)dN^{n,} + \frac{n(n-1)}{1.\,2.}ddN^{(n+1),} = 0$$

$$N^{(n-2),} - (n-2)dN^{(n-1),} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.}ddN^{n,} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}d^3N^{(n+1),} = 0$$

$$N^{(n-3),} - (n-3)dN^{(n-2),} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2.}ddN^{(n-1),} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.}d^3N^{n,} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}d^4N^{(n+1),} = 0$$

&c.

Para a variavel y

$P^{n,}$

$$P^{n\prime} - n\,dP^{(n+1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-1)\prime} - (n-1)\,dP^{n\prime} + \frac{n(n-1)}{1.\,2.}\,ddP^{(n+1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-2)\prime} - (n-2)dP^{(n-1)\prime} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.}\,ddP^{n\prime} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}\,d^3P^{(n+1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-3)\prime} - (n-3)dP^{(n-2)\prime} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2.}\,ddP^{(n-1)\prime} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.}\,d^3P^{n\prime}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\,d^4P^{(n+1)\prime} = 0$$

&c.

e ſemelhantemente para todas as outras variaveis.

§. VII.

Determinando as Fluxões ſucceſſivas da primeira Equaçaõ da ſerie relativa á variavel x teremos em geral

$$d^mN^{(n+1)\prime} = \frac{1}{n}\,d^{m-1}N^{n\prime}$$

primeira Equaçaõ Fluxional; e ſubſtituindo na ſegunda o valor de $ddN^{(n+1)\prime}$ tirado d'eſta Equaçaõ Fluxional teremos

$$N^{(n-1)\prime} - \frac{n-1}{2}\,dN^{n\prime} = 0$$

Equaçaõ de condiçaõ mais ſimples, e equivalente á ſegunda, todas as vezes que a primeira tiver lugar.

§. VIII.

Determinando as Fluxões ſucceſſivas d'eſta nova Equaçaõ acharemos em geral

$$d^mN^{n\prime} = \frac{2}{n-1}\,d^{m-1}N^{(n-1)\prime}$$

Segunda Equaçaõ Fluxional: e fubftituindo na terceira o valor de $d^3 N^{(n+1)\prime}$ tirado da primeira Equaçaõ Fluxional, e o valor de $d dN^{n\prime}$ tirado d'efta fegunda teremos a Equaçaõ de condiçaõ

$$N^{(n-2)\prime} - \frac{n-2}{3} d N^{(n-1)\prime} = 0$$

equivalente á mefma terceira todas as vezes que as duas primeiras tiverem lugar.

§. IX.

Se determinarmos as Fluxões fucceffivas d'efta teremos em geral por terceira Equaçaõ Fluxional.

$$d^m N^{(n-1)\prime} = \frac{3}{n-2} d^{m-1} N^{(n-2)\prime}$$

e fubftituindo na quarta Equaçaõ de condiçaõ o valor de $d^4 N^{(n+1)\prime}$ tirado da primeira Fluxional: o valor de $d^3 N^{n\prime}$ tirado da fegunda; e o valor de $d d N^{(n-1)\prime}$ tirado d'efta terceira, teremos huma nova Equaçaõ de condiçaõ.

$$N^{(n-3)\prime} - \frac{n-3}{4} d N^{(n-2)\prime} = 0$$

equivalente á mefma quarta todas as vezes que as tres primeiras fe verificarem.

§. X.

Continuando a praticar operações e fubftituições femelhantes em todas as outras, hiremos achando novas Equações de condiçaõ igualmente fimpleces, e equivalentes ás do §. VI; e efte proceffo nos moftrará por huma inducçaõ affaz clara, que fendo V, como fupozemos, huma Funcçaõ Fluxional da ordem n, para fe conhecer fe he Flu-

xaõ

xaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, naõ he precizo examinar se os coefficientes de dV satisfazem a aquellas series de Equações taõ complicadas e trabalhozas, mas taõ sómente se os mesmos coefficientes satisfazem á serie de Equações.

$$N^{1\prime} - \frac{1}{n} dN^{2\prime} = 0$$

$$N^{2\prime} - \frac{2}{n-1} dN^{3\prime} = 0$$

$$N^{3\prime} - \frac{3}{n-2} dN^{4\prime} = 0$$

- - - - - - -

- - - - - - -

$$N^{(n-2)\prime} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)\prime} = 0$$

$$N^{(n-1)\prime} - \frac{n-1}{2} dN^{n\prime} = 0$$

$$N^{n\prime} - \frac{n}{1} dN^{(n+1)\prime} = 0$$

relativa á variavel x; e a serie de Equações.

$$P^{1\prime} - \frac{1}{n} dP^{2\prime} = 0$$

$$P^{2\prime} - \frac{2}{n-1} dP^{3\prime} = 0$$

$$P^{3\prime} - \frac{3}{n-2} dP^{4\prime} = 0$$

- - - - - - -

- - - - - - -

$$P^{(n-2)\prime} - \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)\prime} = 0$$

$P^{(n-1)\prime}$

$$P^{(n-1)\prime} - \frac{n-1}{2} dP^{n\prime} = 0$$

$$P^{n\prime} - \frac{n}{1} dP^{(n+1)\prime} = 0$$

relativa á variavel y, e a huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem em V.

§. XI.

He bem vizivel quanto eſtas ſeries de Equaçőes de condiçaő ſaő mais ſimpleces que as do illuſtre Geometra citado, cujos trabalhos me deraő occaziaő a eſtas reflexőes; com tudo naő devo deſſimular, que ainda meſmo a verificaçaő de todas ellàs naő ſó ſeria demaſiadamente trabalhoza em muitos e muitos cazos, mas que he abſolutamente deſneceſſaria em todas as Funcçőes Fluxionaes ſuperiores á primeira ordem, ainda ſem ſuppor Fluxaő alguma conſtante: o que, ſegundo o meſmo Geometra adverte, nos diſpenſaria de verificar a ſerie de condiçőes relativa á variavel primitiva, cuja primeira Fluxaő ſe tiveſſe ſuppoſto conſtante; mas o methodo que me propuz ſeguir pede, que deixemos para ao diante a verificaçaő da prezente aſſerçaő.

§. XII.

Se a Funcçaő Fluxional propoſta V naő for Fluxaő exacta de nenhuma Funcçaő da ordem 0; mas ao meſmo tempo for Fluxaő exacta de outra Funcçaő Fluxional da primeira ordem; os coefficientes de dV deveraő ſatisfazer a todas as Equaçőes do §. VI. menos a primeira de cada ſerie; pelo que, ſe preſcindindo d'eſta determinarmos as Fluxőes ſucceſſivas da ſegunda, acharemos em geral.

$$d^{m} N^{(n+1)\prime} = \frac{2}{n} d^{m-1} N^{n\prime} - \frac{1.2.}{n(n-1)} d^{m-2} N^{(n-1)\prime}$$

pri-

primeira Equaçaõ Fluxional: e fubftituindo na terceira o valor de $d^{3}N^{(n+1)\prime}$ tirado d'efta primeira Fluxional ella fe converterá em

$$N^{(n-2)\prime} - 2\frac{n-2}{3}dN^{(n-1)\prime} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3.}ddN^{n\prime} = 0$$

Equaçaõ de condiçaõ equivalente á mefma terceira, todas as vezes que a fegunda tiver lugar.

§. XIII.

Se determinarmos as fuas Fluxões fucceffivas teremos em geral

$$d^{m}N^{n\prime} = \frac{4}{n-1}d^{m-1}N^{(n-1)\prime} - \frac{2.3.}{(n-1)(n-2)}d^{m-2}N^{(n-2)\prime}$$

Segunda Equaçaõ Fluxional: e fe na quarta Equaçaõ de condiçaõ fubftituirmos o valor de $d^{4}N^{(n+1)\prime}$ tirado da primeira Fluxional, e o valor de $d^{3}N^{n\prime}$ tirado d'efta fegunda, ella fe converterá em

$$N^{(n-3)\prime} - 2\frac{n-3}{4}dN^{(n-2)\prime} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4.}ddN^{(n-1)\prime} = 0$$

Equaçaõ de condiçaõ que lhe ferá equivalente, todas as vezes que a fegunda e terceira forem verdadeiras.

§. XIV.

Determinando as Fluxões fucceffivas d'efta; fubftituindo na feguinte os valores de todas as Fluxões fuperiores á fegunda ordem tirados das Equações Fluxionaes precedentes; e continuando a proceder femelhantemente a refpeito de todas as feguintes, fe achará, que para V fer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem

os coefficientes de dV deveraõ satisfazer á serie de Equações de condiçaõ

$$N^{1'} - 2\,\frac{1}{n}\,dN^{2'} + \frac{1.2.}{n(n-1)}\,ddN^{3'} = 0$$

$$N^{2'} - 2\,\frac{2}{n-1}\,dN^{3'} + \frac{2.3.}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4'} = 0$$

$$N^{3'} - 2\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4'} + \frac{3.4.}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'} = 0$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$N^{(n-3)'} - 2\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4.}\,ddN^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-2)'} - 2\,\frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3.}\,ddN^{n'} = 0$$

$$N^{(n-1)'} - 2\,\frac{n-1}{2}\,dN^{n'} + \frac{n.(n-1)}{1.2.}\,ddN^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel x, e á serie de Equações de condiçaõ

$$P^{1'} - 2\,\frac{1}{n}\,dP^{2'} + \frac{1.2.}{n(n-1)}\,ddP^{3'} = 0$$

$$P^{2'} - 2\,\frac{2}{n-1}\,dP^{3'} + \frac{2.3.}{(n-1)(n-2)}\,ddP^{4'} = 0$$

$$P^{3'} - 2\,\frac{3}{n-2}\,dP^{4'} + \frac{3.4.}{(n-2)(n-3)}\,ddP^{5'} = 0$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$P^{(n-3)'} - 2\,\frac{n-3}{4}\,dP^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4.}\,ddP^{(n-1)'} = 0$$

$$P^{(n-2)'} - 2\,\frac{n-2}{3}\,dP^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3.}\,ddP^{n'} = 0$$

$$P^{(n-1)'} - 2\,\frac{n-1}{2}\,dP^{n'} + \frac{n.(n-1)}{1.2.}\,ddP^{(n+1)'} = 0$$

re-

relativa á variavel y, e a huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem na Funcçaõ V

§. XV.

Sendo V Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem, entaõ os coefficientes de dV deveráõ ſatisfazer a todas as Equações do §. VI. menos as duas primeiras de cada ſerie; e por tanto determinando as Fluxões ſucceſſivas da terceira acharemos em geral

$$d^{m} N^{(n+1)'} = 3\,\frac{1}{n}\, d^{m-1} N^{n'} - 3\,\frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\, d^{m-2} N^{(n-1)'} + \frac{1.\,2.\,3.}{n\,(n-1)(n-2)}\, d^{m-3} N^{(n-2)'}$$

primeira Equaçaõ Fluxional: e ſubſtituindo na quarta, o valor $d^{4} N^{(n+1)'}$ tirado d'eſta, ella ſe converterá em

$$N^{(n-3)'} - 3\,\frac{n-3}{4}\, dN^{(n-2)'} + 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\, ddN^{(n-1)'} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\,3.\,4.}\, d^{3} N^{n'} = 0$$

Equaçaõ de condiçaõ equivalente á meſma quarta todas as vezes que a terceira ſe verificar.

§. XVI.

Continuando a proceder por hum modo analogo ao que até agora temos praticado ſe achará, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem, os coefficientes de dV deveraõ ſatisfazer á ſerie de Equações de condiçaõ

N^{ii}

$$N^{1'} - 3\,\frac{1}{n}\,dN^{2'} + 3\,\frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\,ddN^{3'} - \frac{1.\,2.\,3.}{n\,(n-1)(n-2)}\,d^3N^{4'} = 0$$

$$N^{2'} - 3\,\frac{2}{n-1}\,dN^{3'} + 3\,\frac{2.\,3.}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4'} - \frac{2.\,3.\,4.}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^3N^{5'} = 0$$

$$N^{3'} - 3\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4'} + 3\,\frac{3.\,4.}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'} - \frac{3.\,4.\,5.}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^3N^{6'} = 0$$

- -

- -

$$N^{(n-4)'} - 3\,\frac{n-4}{5}\,dN^{(n-3)'} + 3\,\frac{(n-3)(n-4)}{4.\,5.}\,ddN^{(n-2)'} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.\,4.\,5.}\,d^3N^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-3)'} - 3\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'} + 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\,ddN^{(n-1)'} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\,3.\,4.}\,d^3N^{n'} = 0$$

$$N^{(n-2)'} - 3\,\frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'} + 3\,\frac{(n-1)(n-2)}{2.\,3.}\,ddN^{n'} - \frac{n\,(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}\,d^3N^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel x; e a serie de Equações de condiçaõ

$$P^{1'} - 3\,\frac{1}{n}\,dP^{2'} + 3\,\frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\,ddP^{3'} - \frac{1.\,2.\,3.}{n(n-1)(n-2.)}\,d^3P^{4'} = 0$$

$$P^{2'} - 3\,\frac{2}{n-1}\,dP^{3'} + 3\,\frac{2.\,3.}{(n-1)(n-2)}\,ddP^{4'} - \frac{2.\,3.\,4.}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^3P^{5'} = 0$$

$$P^{3'} - 3\,\frac{3}{n-2}\,dP^{4'} + 3\,\frac{3.\,4.}{(n-2)(n-3)}\,ddP^{5'} - \frac{3.\,4.\,5.}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^3P^{6'} = 0$$

- -

- -

$P^{(n-4)'}$

$$P^{(n-4)\prime}-3\frac{n-4}{5}dP^{(n-3)\prime}+3\frac{(n-3)(n-4)}{4.5}ddP^{(n-2)\prime}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.4.5}d^3P^{(n-1)\prime}=0$$

$$P^{(n-3)\prime}-3\frac{n-3}{4}dP^{(n-2)\prime}+3\frac{(n-2)(n-3)}{3.4}ddP^{(n-1)\prime}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}d^3P^{n\prime}=0$$

$$P^{(n-2)\prime}-3\frac{n-2}{3}dP^{(n-1)\prime}+3\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}ddP^{n\prime}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3P^{(n+1)\prime}=0$$

relativa á variavel y; e a huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XVII.

Do meſmo modo ſe achará, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da terceira ordem ſerá precizo, que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ á ſerie de Equaçóes de condiçaõ

$$N^{1\prime}-4\frac{1}{n}dN^{2\prime}+6\frac{1.2}{n(n-1)}ddN^{3\prime}-4\frac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}d^3N^{4\prime}+\frac{1.2.3.4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}d^4N^{5\prime}=0$$

$$N^{2\prime}-4\frac{2}{n-1}dN^{3\prime}+6\frac{2.3}{(n-1)(n-2)}ddN^{4\prime}-4\frac{2.3.4}{(n-1)(n-2)(n-3)}d^3N^{5\prime}+\frac{2.3.4.5}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}d^4N^{6\prime}=0$$

$$N^{3\prime}-4\frac{3}{n-2}dN^{4\prime}+6\frac{3.4}{(n-2)(n-3)}ddN^{5\prime}-4\frac{3.4.5}{(n-2)(n-3)(n-4)}d^3N^{6\prime}+\frac{3.4.5.6}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}d^4N^{7\prime}=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$N^{(n-5)'} - 4\,\frac{n-5}{6}\,dN^{(n-4)'} + 6\,\frac{(n-4)(n-5)}{5.\,6.}\,ddN^{(n-3)'} -$$

$$4\,\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{4.\,5.\,6.}\,d^3N^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3.\,4.\,5.\,6.}\,d^4N^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-4)'} - 4\,\frac{n-4}{5}\,dN^{(n-3)'} + 6\,\frac{(n-3)(n-4)}{4.\,5.}\,ddN^{(n-2)'} -$$

$$4\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.\,4.\,5.}\,d^3N^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\,3.\,4.\,5.}\,d^4N^{n'} = 0$$

$$N^{(n-3)'} - 4\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'} + 6\,\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\,ddN^{(n-1)'} -$$

$$4\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\,3.\,4.}\,d^3N^{n'} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\,d^4N^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel x, e a huma ſerie ſemelhante á reſpeito de cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem em V: e que geralmente falando para que V ſeja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ordem $m-1$, naõ ſendo $m > n$ os coefficientes de dV ſatisfaçaõ á ſerie de Equações de condiçaõ

$$N^{1'} - \frac{m}{n}\,dN^{2'} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)}\,ddN^{3'} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)}\,d^3N^{4'} + \&c. = 0$$

$$N^{2'} - 2\,\frac{m}{n-1}\,dN^{3'} + 3\,\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4'} - 4\,\frac{m(m-1)(m-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^3N^{5'} + \&c. = 0$$

$$N^{3'} - 3\,\frac{m}{n-2}\,dN^{4'} + 6\,\frac{m(m-1)}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'} - 10\,\frac{m(m-1)(m-2)}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^3N^{6'} + \&c. = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$N^{(n-m-1)'} - \frac{(n-m-1)}{1}.\,\frac{m}{m+2}\,dN^{(n-m)'} + \frac{(n-m-1)(n-m)}{1.\,2.}$$

m

$$\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}ddN^{(n-m+1)'} - \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{1.\,2.\,3.}$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+1)}d^3N^{(n-m+2)'} + \&c. = 0$$

$$N^{(n-m)'} - \frac{(n-m)}{1}.\frac{m}{m+1}dN^{(n-m+1)'} + \frac{(n-m)(n-m+1)}{1.\,2.}$$

$$\frac{m-1}{(m+1)}ddN^{(n-m+2)'} - \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+2)}{1.\,2.\,3.}$$

$$\frac{m-2}{m+1}d^3N^{(n-m+3)'} + \&c. = 0$$

$$N^{(n-m+1)'} - \frac{n-m+1}{1}dN^{(n-m+2)'} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.\,2.}ddN^{(n-m+3)'}$$

$$-\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{1.\,2.\,3.}d^3N^{(n-m+4)'} + \&c. = 0$$

relativa á variavel x, e a outra serie semelhante pelo que pertence a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XVIII.

As leis de todas estas series de Equações de condiçaõ, as quaes saõ assaz faceis de notar, comparadas entre si nos mostraõ claramente, que todas as ditas series de Equações se podem contrahir em huma só expressaõ geral

$$N^{(n-k)'} - m\frac{(n-k)}{(k+1)}dN^{(n-k+1)'} + \frac{m(m-1)}{1.\,2.}\frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k}ddN^{(n-k+2)'}$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3.}\frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{(k+1)k(k-1)}d^3N^{(n-k+3)'} +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(k+1)k(k-1)(k-2)}d^4N^{(n-k+4)'}$$

—

$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{(k+1)k(k-1)}$$
$$\frac{(n-k+3)(n-k+4)}{(k-2)(k-3)}d^5N^{(n-k+5)} + \&c.$$

da qual facilmente se derivaõ substituindo por m o expoente da ordem de que V deve ser Fluxaõ exacta augmentado de huma unidade, e por k todos os numeros inteiros desde $n-1$ até $m-1$; isto he, pelo que pertence á variavel x; mas querendo-se as Equações de condiçaõ relativas á variavel y se escreverá P em lugar de N; e semelhantemente se procederá querendo-se as Equações de condiçaõ relativas a outra qualquer variavel.

SECÇAÕ II.

Comparaçaõ das Equações de condiçaõ achadas pelo prezente Methodo com as de Euler *e* Fontaine, *e consequencias que d'aqui rezultaõ.*

§. XIX.

GEralmente fallando pode dizerse, que á proporçaõ que hum methodo analytico he mais universal, crescem os incommodos da sua applicaçaõ aos cazos particulares; e que por consequencia semelhantes methodos saõ mais proprios para d'elles se deduzirem outros mais particulares, dó que pàra se praticarem com preferencia a estes. O que acabo de expor, para se reconhecer se as Funcções Fluxionaes, de qualquer ordem que sejaõ, saõ Fluxões exactas de outras Funcções de alguma ordem inferior, he huma prova d'esta verdade. Elle conduz em todos os cazos particulares a Equações superabundantes, já porque se achem incluidas em algumas das outras das differentes series de condições, que elle mesmo nos dá; já porque sejaõ consequencias necessarias de algumas d'ellas. Com tudo como os Geometras, que tratáraõ este genero de questões

tões por methodos particulares, naõ passaraõ de dar as condições relativas ás Funcções Fluxionaes da primeira ordem, qualquer que seja o numero das variaveis nellas incluidas, e as que pertencem ás da segunda, quando estas naõ involvem mais que duas variaveis, naõ he este hum d'aquelles methodos geraes, que facilmente se possaõ supprir por meio dos particulares, ao menos até ao prezente; e por tanto toda a simplificaçaõ, que se lhe poder dar, se deve julgar de bastante importancia na ordem dos trabalhos analyticos.

§. XX.

A comparaçaõ d'este Methodo com os dos celebres Geometras *Leonardo Euler*, e *Fontaine*, ou por melhor dizer a applicaçaõ d'este methodo ás fórmulas geraes das Funcções das differentes ordens Fluxionaes, que elles consideráraõ, ou podiaõ considerar segundo os seus, nos pode conduzir a simplificalo bastantemente; e por tanto, ainda que possa haver outros meios mais proprios para este fim, em quanto naõ saõ conhecidos, naõ devemos despensarnos de indicar este, mostrando aqui como as Equações de condiçaõ, que aquelles Geometras acharaõ por differentes caminhos, se deduzem das que acabamos de demonstrar, e como por meio d'esta comparaçaõ ou deducçaõ se reconhesse a superabundancia de algumas d'estas.

§. XXI.

Se a Funcçaõ Fluxional proposta V for da primeira ordem, e naõ involver mais que duas variaveis primitivas x, e y: fazendo $n = 1$ em as Equações do §. X, ou $m = n = 1$ em á Equaçaõ generalissima do §. XVIII as nossas Equações de condiçaõ necessarias, para que V seja Fluxaõ exacta, seráõ

$$\overset{1'}{N} - d\overset{2'}{N} = 0$$

$$\overset{1'}{P} - d\overset{2'}{P} = 0$$

Mas nesta supposiçaõ será

$$V = A\,dx + B\,dy$$

e segundo os mencionados Geometras para que V seja Fluxaõ exacta, deverá ser

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

Determinando a Fluxaõ de V, ou de $Ap + Bq$ se tem

$$dV = A\,dp + B\,dq + \left(\frac{dA}{dx}p + \frac{dB}{dx}q\right)dx + \left(\frac{dA}{dy}p + \frac{dB}{dy}q\right)dy$$

e por consequencia tornando a substituir dx em lugar de p, e dy em lugar de q

$$\overset{1'}{N} = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dB}{dx}dy$$

$$\overset{2'}{N} = A$$

$$\overset{1'}{P} = \frac{dA}{dy}dx + \frac{dB}{dy}dy$$

$$\overset{2'}{P} = B$$

valores que substituidos em as nossas duas Equaçoẽs de condiçaõ convertem a primeira em

$$\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy = 0$$

e a segunda em

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dy}\right)dx = 0$$

as

as quaes ambas nos moſtraõ, que para V ſer Fluxaõ exacta deve com effeito ſer

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$$

§. XXII.

Suppondo $V=Adx+Bdy+Cdz$, e procedendo pelo meſmo modo acharemos, que as noſſas Equações de condiçaõ

$$\overset{1'}{N}-d\overset{2'}{N}=0$$

$$\overset{1'}{P}-d\overset{2'}{P}=0$$

$$\overset{1'}{Q}-d\overset{2'}{Q}=0$$

ſe convertem em

$$\left(\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}\right)dy+\left(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}\right)dz=0$$

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)dx+\left(\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dz}\right)dz=0$$

$$\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)dx+\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)dy=0$$

Equações das quaes, por iſſo que devem ſer identicas, e as Fluxões dx, dy, dz naõ entraõ em nenhuma das expreſſões comprehendidas entre os parenthezes, ſe deduzem as ſeguintes Equações de condiçaõ

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}\;;\qquad \frac{dA}{dz}=\frac{dC}{dx}\;;\qquad \frac{dB}{dz}=\frac{dC}{dy}.$$

que ſaõ as meſmas dos ſobreditos Geometras. N'uma palavra, ſuppondo que V contenha hum numero qualquer de variaveis, e procedendo pelo modo indicado, ſe concluirá

o

o Theorema Geral de *Fontaine*: a ſaber „ Que tomando arbitrariamente quaeſquer dois termos de V, por exemplo „ $K\,du$, e $M\,dx$ ſe terá ſempre „

$$\frac{dK}{dx} = \frac{dM}{du}$$

donde ſe ſegue, que ſendo λ o numero das variaveis, o numero das Equações de condiçaõ abſolutamente neceſſarias, para que V ſeja Fluxaõ exacta, ſerá $\frac{\lambda\,(\lambda - 1)}{1.\,2.}$.

§. XXIII.

Se determinarmos as Fluxões ſucceſſivas de $A\,dx + B\,dy + C\,dz +$ &c. ſem ſuppor Fluxaõ alguma conſtante veremos, que em qualquer ordem n, a que chegarmos, os coefficientes de $d^n x$; $d^n y$; $d^n z$; &c. ſeraõ as meſmas quantidades A, B, C, &c, e que os coefficientes de todos os outros termos ſeraõ Fluxões parciaes, ou multiplos de Fluxões parciaes das meſmas quantidades A, B, C &c: donde concluo, que o numero das Equações de condiçaõ abſolutamente neceſſarias, para que huma Funcçaõ Fluxional de qualquer ordem n ſeja Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ da ordem o, he, ſendo k o numero dos ſeus termos, $k + \frac{\lambda\,(\lambda - 3)}{2}$; e que tirando as Equações de condiçaõ $\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}$ relativas aos coefficientes de $d^n x$; $d^n y$; $d^n z$; &c. as outras $k - \lambda$ equações relativas aos outros coefficientes devem ſer expreſſadas naõ ſimpleſmente por Fluxões parciaes dos meſmos coefficientes, como ſaõ aquellas, mas ſim pelos meſmos coefficientes, e por differentes Fluxões parciaes dos primeiros A; B; C; &c.

§. XXIV.

Se reflectirmos porém, que determinando as quantidades

des $N^{1'}$; $P^{1'}$; $Q^{1'}$ &c. devemos ter em os coefficientes dos feus termos todas as Fluxões parciaes de A; B; C; &c. Que determinando as quantidades $N^{2'}$; $P^{2'}$; $Q^{2'}$; &c. os coefficientes dos feus termos devem fer os mefmos que os coefficientes de todos os termos de V, em que fe achar dx, dy; dz; &c. e que por confequencia eftes mefmos coefficientes fe devem achar em $dN^{2'}$; $dP^{2'}$; $dQ^{2'}$; &c. Que femelhantemente em $dN^{3'}$; $dP^{3'}$; $dQ^{3'}$; &c. fe devem achar todos os coefficientes dos termos de V, em que entrar ddx; ddy; ddz &c. &c.; e fe ao mefmo tempo attendermos a que, procedendo d'efte modo, ou feja $n = 2m - 2$, ou $n = 2m - 1$, em chegando ás quantidades $dN^{m'}$; $dP^{m'}$; $dQ^{m'}$ &c. naõ haverá em V mais coefficiente algum, além dos coefficientes das fluxões da ordem n, que fe naõ ache em as exprefsões de $dN^{2'}$; $dN^{3'}$; $dN^{4'}$.... $dN^{m'}$; $dP^{2'}$; $dP^{3'}$; $dP^{4'}$.... $dP^{m'}$; $dQ^{2'}$; $dQ^{3'}$; $dQ^{4'}$.... $dQ^{m'}$; &c. facilmente fe verá, que para V fer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, bafta que os feus coefficientes fatisfaçaõ a metade das Equações de cada ferie do §. X., fendo n numero par, e a metade de todas menos huma, fendo n numero impar > 1; donde fe fegue, que todas as outras nos daraõ condições fuperabundantes ou repetidas: inconveniente de que, ainda depois d'efta fimplificaçaõ, fenaõ fica inteiramente izento.

§. XXV.

Para maior illuftraçaõ de tudo quanto digo em o §. antecedente continuemos a comparar o noffo methodo com o de *Euler*, vifto que *Fontaine* naõ paffou de dar as Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes da primeira ordem, que com muito artificio eftendeo ás ordens fuperiores, e fupponhamos que V feja huma Funcçaõ Fluxional da fegunda, a qual involva fómente duas variaveis primitivas x, e y. Nefte cazo a fórma geral de V he

$$Addx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy$$

As nossas Equações de condição para que V seja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, saõ

$$\overset{1\prime}{N} - \frac{1}{2} d \overset{2\prime}{N} = 0$$

$$\overset{1\prime}{P} - \frac{1}{2} d \overset{2\prime}{P} = 0$$

e segundo Euler (*Instit. Calc. Diff. Pars prior Cap.* 8.) devem ser

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx} \; ; \quad C = \frac{dA}{dx} \; ; \quad D = \frac{dB}{dy} \; ; \quad E = 2\frac{dA}{dy} = 2\frac{dB}{dx}.$$

Determinando a Fluxaõ de V, que reprezentaremos d'esta forma

$$V = Ap' + Bq' + Cp^2 + Dq^2 + Epq$$

teremos

$$dV = \left(\frac{dA}{dx} p' + \frac{dB}{dx} q' + \frac{dC}{dx} p^2 + \frac{dD}{dx} q^2 + \frac{dE}{dx} pq\right) dx +$$

$$(2Cp + Eq)\, ddx + A d^3x$$

$$+ \left(\frac{dA}{dy} p' + \frac{dB}{dy} q' + \frac{dC}{dy} p^2 + \frac{dD}{dy} q^2 + \frac{dE}{dy} pq\right) dy +$$

$$(2Dq + Ep)\, ddy + B d^3y$$

donde se tira

$$\overset{1\prime}{N} = \frac{dA}{dx} ddx + \frac{dB}{dx} ddy + \frac{dC}{dx} dx^2 + \frac{dD}{dx} dy^2 + \frac{dE}{dx} dx\, dy$$

$$\overset{2\prime}{N} = 2C\, dx + E\, dy$$

$$\overset{1\prime}{P} = \frac{dA}{dy} ddx + \frac{dB}{dy} ddy + \frac{dC}{dy} dx^2 + \frac{dD}{dy} dy^2 + \frac{dE}{dy} dx\, dy$$

$$\overset{2\prime}{P} = 2D\, dy + E\, dx$$

valores que substituidos em as nossas Equações reduzem a primeira a

$\Big(\frac{dA}{dx}$

$$\left(\frac{dA}{dx}-C\right)ddx+\left(\frac{dB}{dx}-\frac{1}{2}E\right)ddy+\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right)dy^2+$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}-\frac{dC}{dy}\right)dx\,dy=0$$

e a segunda a

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{1}{2}E\right)ddx+\left(\frac{dB}{dy}-D\right)ddy+\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)dy^2+$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dy}-\frac{dD}{dx}\right)dx\,dy=0.$$

Ora cada huma d'estas Equações deve ser identica, e como naõ entra Fluxaõ alguma em as quantidades comprehendidas entre os parenthezes, a condiçaõ da identidade exige, que seja

$$C=\frac{dA}{dx};\quad \frac{dB}{dx}=\frac{1}{2}E;\quad \frac{dA}{dy}=\frac{1}{2}E;\quad \frac{dB}{dy}=D$$

$$\frac{dD}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dE}{dy};\quad \frac{dC}{dy}=\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}.$$

A primeira d'estas seis Equações de condiçaõ he a segunda de Euler. A segunda, e a terceira combinadas entre si mostraõ ser

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx};\quad \text{e } E=2\frac{dA}{dy}=2\frac{dB}{dx}.$$

que saõ a primeira e quarta condições de Euler: e a quarta he justamente a terceira do mesmo Autor. A quinta, e a sexta saõ simplices consequencias das outras quatro, como he facil de ver; e por tanto naõ se podem considerar como expressando condições destinctas das primeiras.

§. XXVI.

§. XXVI.

Se quizermos, ſegundo os principios de Euler expoſtos em o Capitulo citado, determinar as Equações de condiçaõ, a que devem ſatisfazer os coefficientes de dV, ſendo V huma Funcçaõ Fluxional da terceira ordem, que involva ſómente duas variaveis x, e y, devemos determinar a Fluxaõ da Formula geral das Funcções Fluxionaes da ſegunda ordem, que involvem o meſmo numero de variaveis, ou a Fluxaõ de

$$M\,ddx + N\,ddy + P\,dx^2 + G\,dy^2 + R\,dx\,dy$$

ſubſtituir em lugar de P, Q, e R os ſeus valores tirados das Equações de condiçaõ da meſma Formula geral, e comparar termo por termo a expreſſaõ da ſua Fluxaõ com a Formula geral das Funcções Fluxionaes da terceira ordem, quando contem ſómente duas Fluentes, a qual he

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,dx\,ddx + D\,dy\,ddy + E\,dy\,ddx + F\,dx\,ddy + G\,dx^3 + H\,dy^3 + I\,dx^2\,dy + L\,dx\,dy^2$$

e por meio d'eſta comparaçaõ acharemos, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ordem o deverá ſer

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx};\; C = 3\frac{dA}{dx};\; D = 3\frac{dB}{dy};\; E = 3\frac{dA}{dy};\; F = 3\frac{dB}{dx};$$

$$G = \frac{ddA}{dxdx};\; H = \frac{ddB}{dydy};\; I = 3\frac{ddA}{dxdy};\; L = 3\frac{ddB}{dxdy}.$$

§. XXVII.

Segundo o noſſo methodo as condições a que V deve ſatisfazer ſaõ

$\overset{\prime\prime}{N} =$

$$\overset{1'}{N} - \frac{1}{3} d \overset{2'}{N} = 0$$

$$\overset{1'}{P} - \frac{1}{3} d \overset{2'}{P} = 0$$

nas quaes, para se reconhecer a sua conformidade com as nove achadas em o §. antecedente, se deve substituir por $\overset{1'}{N}$; $\overset{2'}{N}$; $\overset{1'}{P}$; $\overset{2'}{P}$: os seus valores tirados da Formula geral das Funcções da ordem proposta. Para este effeito determinaremos a sua Fluxaõ, e naõ passando dos termos, em que se consideraõ como Fluentes as Fluxões dx, e dy, teremos

$$dV = \left(\frac{dA}{dx} p'' + \frac{dB}{dx} q'' + \frac{dC}{dx} pp' + \frac{dD}{dx} qq' + \frac{dE}{dx} qp' + \frac{dF}{dx} pq'\right.$$
$$\left. + \frac{dG}{dx} p^3 + \frac{dH}{dx} q^3 + \frac{dI}{dx} p^2 q + \frac{dL}{dx} p q^2\right) dx + \left(Cp' + Fq'\right.$$
$$\left. + 3Gp^2 + 2Ipq + Lq^2\right) ddx + \&c.$$
$$+ \left(\frac{dA}{dy} p'' + \frac{dB}{dy} q'' + \frac{dC}{dy} pp' + \frac{dD}{dy} qq' + \frac{dE}{dy} qp' + \frac{dF}{dy} pq'\right.$$
$$\left. + \frac{dG}{dy} p^3 + \frac{dH}{dy} q^3 + \frac{dI}{dy} p^2 q + \frac{dL}{dy} p q^2\right) dy + \left(Dq' + Ep'\right.$$
$$\left. + 3Hq^2 + Ip^2 + 2Lpq\right) ddy + \&c.$$

donde se tira

$$\overset{1'}{N} = \frac{dA}{dx} d^3x + \frac{dB}{dx} d^3y + \frac{dC}{dx} dx\,ddx + \frac{dD}{dx} dy\,ddy$$
$$+ \frac{dE}{dx} dy\,ddx + \frac{dF}{dx} dx\,ddy + \frac{dG}{dx} dx^3 + \frac{dH}{dx} dy^3$$
$$+ \frac{dI}{dx} dx^2 dy + \frac{dL}{dx} dx\,dy^2.$$

$$\overset{2\prime}{N} = C\,ddx + F\,ddy + 3\,G\,dx^2 + 2\,I\,dx\,dy + L\,dy^2.$$

$$\overset{1\prime}{P} = \frac{dA}{dy}\,d^3x + \frac{dB}{dy}\,d^3y + \frac{dC}{dy}\,dx\,ddx + \frac{dD}{dy}\,dy\,ddy + \frac{dE}{dy}\,dy\,ddx + \frac{dF}{dy}\,dx\,ddy + \frac{dG}{dy}\,dx^3 + \frac{dH}{dy}\,dy^3 + \frac{dI}{dy}\,dx^2\,dy + \frac{dL}{dy}\,dx\,dy^2.$$

$$\overset{2\prime}{P} = D\,ddy + E\,ddx + 3\,H\,dy^2 + I\,dx^2 + 2\,L\,dx\,dy.$$

valores que fubftituidos em as noffas Equações convertem a primeira em

$$\left(\frac{dA}{dx} - \frac{1}{3}C\right)d^3x + \left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{3}F\right)d^3y + \left(\frac{2}{3}\frac{dC}{dx} - 2\,G\right)dx\,ddx + \left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{3}\frac{dF}{dy} - \frac{2}{3}L\right)dy\,ddy + \left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{3}\frac{dC}{dy} - \frac{2}{3}I\right)dy\,ddx + \left(\frac{2}{3}\frac{dF}{dx} - \frac{2}{3}I\right)dx\,ddy + \left(\frac{dH}{dx} - \frac{1}{3}\frac{dL}{dy}\right)dy^3 + \left(\frac{1}{3}\frac{dI}{dx} - \frac{dG}{dy}\right)dx^2dy + \left(\frac{2}{3}\frac{dL}{dx} - \frac{2}{3}\frac{dI}{dy}\right)dx\,dy^2 = 0$$

e a fegunda em

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{3}E\right)d^3x + \left(\frac{dB}{dy} - \frac{1}{3}D\right)d^3y + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{3}\frac{dE}{dx} - \frac{2}{3}I\right)dx\,ddx + \left(\frac{2}{3}\frac{dD}{dy} - 2\,H\right)dy\,ddy + \left(\frac{2}{3}\frac{dE}{dy} - \frac{2}{3}L\right)dy\,ddx + \left(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{3}\frac{dD}{dx} - \frac{2}{3}L\right)dx\,ddy + \left(\frac{dG}{dy} - \frac{1}{3}\frac{dI}{dx}\right)dx^3 + \left(\frac{2}{3}\frac{dI}{dy} - \frac{2}{3}\frac{dL}{dx}\right)dx^2dy + \left(\frac{1}{3}\frac{dL}{dy} - \frac{dH}{dx}\right)dx\,dy^2 = 0$$

Donde fe deduzem as feguintes Equações

C = 3

$$C = 3\,\frac{dA}{dx}\;;\quad D = 3\,\frac{dB}{dy}\;;\quad E = 3\,\frac{dA}{dy}\;;\quad F = 3\,\frac{dB}{dx}\;;$$

$$G = \frac{1}{3}\,\frac{dC}{dx} = \frac{ddA}{dx^2}\;;\quad H = \frac{1}{3}\,\frac{dD}{dy} = \frac{ddB}{dy^2}\;;\quad I = \frac{dF}{dx} = 3\,\frac{ddB}{dx^2}\;;$$

$$I = \frac{3}{2}\,\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dC}{dy} = 3\,\frac{ddA}{dxdy}\;;\; I = \frac{3}{2}\,\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\,\frac{dE}{dx} = 3\,\frac{ddA}{dxdy}\;;$$

$$L = \frac{3}{2}\,\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dF}{dy} = 3\,\frac{ddB}{dxdy}\;;\quad L = \frac{dE}{dy} = 3\,\frac{ddA}{dy^2}\;;$$

$$L = \frac{3}{2}\,\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2}\,\frac{dD}{dx} = 3\,\frac{ddB}{dxdy}\;;\; \frac{dI}{dx} = 3\,\frac{dG}{dy}\;;\; \frac{dL}{dx} = \frac{dI}{dy}\;;$$

$$\frac{dL}{dy} = 3\,\frac{dH}{dx}\,.$$

Das quaes as primeiras ſete, e a decima ſaõ juſtamente a 2.ª; 3.ª; 4.ª; 5.ª; 6.ª; 7.ª; 8.ª; e 9.ª das do §. antecedente. Reſta moſtrarmos como as Equações $\frac{dC}{dy} = \frac{dE}{dx} = \frac{dF}{dx}$, que rezultaõ das tres expreſſões de I, e as Equações $\frac{dD}{dx} = \frac{dE}{dy} = \frac{dF}{dy}$, que rezultaõ das tres expreſſões de L ſaõ equivalentes á Equaçaõ $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, ou como eſta ſe deduz d'ellas, e das outras antecedentes.

§. XXVIII.

Se multiplicarmos a primeira d'ellas por dx, e a terceira por dy ſommandoas teremos

$$dA = \frac{1}{3}\,C\,dx + \frac{1}{3}\,E\,dy$$

e ſe multiplicarmos a ſegunda por dy, e a quarta por dx, e as ſommarmos, teremos tambem

$dB =$

$$dB = \frac{1}{3}\,D\,dy + \frac{1}{3}\,F\,dx.$$

Pelo Methodo inverſo das Fluxões será

$$A = \frac{1}{3}\int\left(C\,dx + E\,dy\right);\ \text{e}\ \ B = \int\left(D\,dy + F\,d\right.$$

porém ſe determinarmos a Fluxaõ parcial de A ſupp ſómente y fluente, e a dividirmos por dy; e ſe d minarmos a Fluxaõ parcial de B ſuppondo ſómen fluente, e a dividirmos por dx, teremos

$$\frac{dA}{dy} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{dC}{dy}\,dx + \frac{dE}{dy}\,dy\right);\ \text{e}\ \ \frac{dB}{dx} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{dD}{dx}\,dy + \frac{dF}{dx}\right.$$

mas he $\frac{dD}{dx} = \frac{dE}{dy}$; e $\frac{dF}{dx} = \frac{dC}{dy}$; logo $\frac{dB}{dx} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{dC}{dy}dx + \frac{d}{dy}\right.$

e por conſequencia

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}.$$

As ultimas tres expreſſões achadas pelas noſſas Formul ſaõ conſequencias neceſſarias das precedentes; e por tan to naõ ſe podem conſiderar como condições deſtinctas d'ellas.

§. XXIX.

Seguindo os veſtigios de Euler, da meſma for que em o §. XXVI, acharemos, que ſendo V huma Fun çaõ Fluxional da quarta ordem, e involvendo ſómente da Fluentes primitivas x, e y, iſto he, ſendo

$$V = A\,d^4x + B\,d^4y + C\,dx\,d^3x + D\,dy\,d^3y + E\,dy\,d$$
$$+ F\,dx\,d^3y + G\,ddx^2 + H\,ddy^2 + I\,dx^2\,ddx + L\,dy^2\,d$$
$$+ M\,dx\,dy\,ddx + N\,dx\,dy\,ddy + O\,ddx\,d$$

$+Pdy^2ddx + Qdx^2ddy + Rdx^4 + Sdy^4 + Tdydx^3$
$+Udxdy^3 + Xdx^2dy^2$

para ser Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ da ordem o será percizo, que os seus coefficientes satisfaçaõ ás seguintes Equações

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx};\ C=4\frac{dA}{dx};\ D=4\frac{dB}{dy};\ E=4\frac{dA}{dy};\ F=4\frac{dB}{dx};$$

$$G=3\frac{dA}{dx};\quad H=3\frac{dB}{dy};\quad I=6\frac{ddA}{dxdx};\quad L=6\frac{ddB}{dydy};$$

$$M=12\frac{ddA}{dxdy};\ N=12\frac{ddB}{dxdy};\ O=6\frac{dA}{dy};\ P=6\frac{ddA}{dydy};$$

$$Q=6\frac{ddB}{dxdx};\quad R=\frac{d^3A}{dx^3};\quad S=\frac{d^3B}{dy^3};\quad T=4\frac{d^3A}{dx^2dy};$$

$$U=4\frac{d^3B}{dxdy^2};\quad X=6\frac{d^3A}{dxdy^2}:$$

§. XXX.

Segundo porém o nosso methodo as Equações, a que os coefficientes de dV devem satisfazer, saõ

$$N^{1\prime}-\frac{1}{4}dN^{2\prime}=0$$

$$N^{2\prime}-\frac{2}{3}dN^{3\prime}=0$$

$$P^{1\prime}-\frac{1}{4}dP^{2\prime}=0$$

$$P^{2\prime}-\frac{2}{3}dP^{3\prime}=0$$

e substituindo por $N^{1\prime}; N^{2\prime}; N^{3\prime}; P^{1\prime}; P^{2\prime}; P^{3\prime}$ os seus valores

tirados da Formula geral propoſta, a primeira ſe converterá em

$$\left(\frac{dA}{dx}-\frac{1}{4}C\right)d^4x+\left(\frac{dB}{dx}-\frac{1}{4}F\right)d^4y+\left(\frac{3}{4}\frac{dC}{dx}-\frac{1}{2}I\right)dxd^3x$$

$$+\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dF}{dy}-\frac{1}{4}N\right)dy\,d^3y+\left(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dC}{dy}-\frac{1}{4}M\right)dyd^3x$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}Q\right)dxd^3y+\left(\frac{dG}{dx}-\frac{1}{2}I\right)ddx^2+\left(\frac{dH}{dx}-\frac{1}{4}N\right)ddy^2$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}-3R\right)dx^2ddx+\left(\frac{dL}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dN}{dy}-\frac{3}{4}U\right)dy^2ddy$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}-\frac{3}{2}T\right)dxdyddx+\left(\frac{3}{4}\frac{dN}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dQ}{dy}-X\right)dxdyddy$$

$$+\left(\frac{dO}{dx}-\frac{1}{4}M-\frac{1}{2}Q\right)ddxddy+\left(\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dM}{dy}-\frac{1}{2}X\right)dy^2ddx$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{dQ}{dx}-\frac{3}{4}T\right)dx^2ddy+\left(\frac{dS}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dU}{dy}\right)dy^4+\left(\frac{1}{4}\frac{dT}{dx}-\frac{dR}{dy}\right)dydx^3$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dX}{dy}\right)dxdy^3+\left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}-\frac{3}{4}\frac{dT}{dy}\right)dx^2dy^2=0$$

a ſegunda em

$$\left(C-\frac{4}{3}G\right)d^3x+\left(F-\frac{2}{3}O\right)d^3y+\left(\frac{2}{3}I-\frac{4}{3}\frac{dG}{dx}\right)dxddx$$

$$+\left(N-\frac{4}{3}P-\frac{2}{3}\frac{dO}{dy}\right)dyddy+\left(2Q-\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}\frac{dO}{dx}\right)dxddy$$

$$+\left(\frac{1}{3}M-\frac{4}{3}\frac{dG}{dy}\right)dyddx+\left(4R-\frac{2}{3}\frac{dI}{dx}\right)dx^3+\left(U-\frac{2}{3}\frac{dP}{dy}\right)dy^3$$

$$+\left(3T-\frac{2}{3}\frac{dI}{dy}-\frac{2}{3}\frac{dM}{dx}\right)dx^2dy+\left(2X-\frac{2}{3}\frac{dP}{dx}-\frac{2}{3}\frac{dM}{dy}\right)dxdy^2=0$$

a terceira em

$\Big(\frac{dA}{dy}$

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{1}{4}E\right)d^4x+\left(\frac{dB}{dy}-\frac{1}{4}D\right)d^4y+\left(\frac{3}{4}\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}L\right)dy\,d^3y$$
$$+\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dE}{dx}-\frac{1}{4}M\right)dx\,d^3x+\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dD}{dx}-\frac{1}{4}N\right)dx\,d^3y$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dE}{dy}-\frac{1}{2}P\right)dy\,d^3x+\left(\frac{dG}{dy}-\frac{1}{4}M\right)ddx^2+\left(\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}L\right)ddy^2$$
$$+\left(\frac{dI}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dM}{dx}-\frac{3}{4}T\right)dx^2ddx+\left(\frac{1}{2}\frac{dL}{dy}-3S\right)dy^2ddy$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-X\right)dx\,dy\,ddx+\left(\frac{3}{4}\frac{dN}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dL}{dx}-\frac{3}{2}U\right)dx\,dy\,ddy$$
$$+\left(\frac{dO}{dy}-\frac{1}{4}N-\frac{1}{2}P\right)ddx\,ddy+\left(\frac{dQ}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dN}{dx}-\frac{1}{2}X\right)dx^2ddy$$
$$+\left(\frac{1}{2}\frac{dP}{dy}-\frac{3}{4}U\right)dy^2ddx+\left(\frac{dR}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dT}{dx}\right)dx^4+\left(\frac{3}{4}\frac{dT}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}\right)dy\,dx^3$$
$$+\left(\frac{1}{4}\frac{dU}{dy}-\frac{dS}{dx}\right)dx\,dy^3+\left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dy}-\frac{3}{4}\frac{dU}{dx}\right)dx\,dy^2=0$$

E a quarta em

$$\left(D-\frac{4}{3}H\right)d^3y+\left(E-\frac{2}{3}O\right)d^3x+\left(\frac{2}{3}L-\frac{4}{3}\frac{dH}{dy}\right)dy\,ddy$$
$$+\left(M-\frac{4}{3}Q-\frac{2}{3}\frac{dO}{dx}\right)dx\,ddx+\left(2P-\frac{2}{3}N-\frac{2}{3}\frac{dO}{dy}\right)dy\,ddx$$
$$+\left(\frac{1}{3}N-\frac{4}{3}\frac{dH}{dx}\right)dx\,ddy+\left(4S-\frac{2}{3}\frac{dL}{dy}\right)dy^3+\left(T-\frac{2}{3}\frac{dQ}{dx}\right)dx^3$$
$$+\left(3U-\frac{2}{3}\frac{dL}{dx}-\frac{2}{3}\frac{dN}{dy}\right)dx\,dy^2+\left(2X-\frac{2}{3}\frac{dN}{dx}-\frac{2}{3}\frac{dC}{dy}\right)dx^2dy=0$$

Das quaes ſe deduzem com ſumma facilidade todas as do §. XXIX ; mas que ao meſmo tempo daõ muitas outras ſuperabundantes.

§. XXXI.

§. XXXI.

Se continuassemos a confrontar as Equações de condiçaõ, a que o nosso methodo conduz, com as que o methodo de *Euler* dá para as Formulas das outras ordens, continuariamos a encontrar a mesma conformidade entre os rezultados de hum e outro ; mas tambem continuariamos a observar, que quanto maior for o expoente da ordem fluxional, tanto maior será o numero das Equações superabundantes, a que pelo nosso seremos conduzidos : o que de algum modo autoriza a suspeita, de que elle possa ainda admittir bastante simplificaçaõ.

§. XXXII.

Se reflectirmos, que o numero das Equações particulares, em que se rezolvem as nossas

$$N^{1\prime} - \frac{1}{n} dN^{2\prime} = 0$$

$$P^{1\prime} - \frac{1}{n} dP^{2\prime} = 0$$

&c.

he sempre maior que $k + \frac{\lambda(\lambda - 3)}{1.2}$, e que nellas entraõ todas as Fluxões parciaes primeiras de todos os coefficientes de V, e assim mesmo todos os coefficientes dos termos da mesma Funcçaõ, em que ha Fluxões primeiras de qualquer fluente primitiva, facilmente comprehenderemos, que d'ellas se podem sempre deduzir, ou seja immediatamente, ou seja por meio de eliminações, e do Methodo inverso das Fluxões, todas as Equações de condiçaõ, a que seriamos conduzidos seguindo os principios de Euler, sem que seja necessario conhecer primeiro as Equações relativas aos gráos precedentes.

§. XXXIII.

§. XXXIII.

Querendo por exemplo as Equações de condiçaõ relativas ás Fluxões da quarta ordem das Funcções que involvem sómente duas fluentes, substituindo em as Equações

$$N^{1'} - \frac{1}{n} dN^{2'} = 0$$

$$P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'} = 0$$

os valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $P^{1'}$; e $P^{2'}$; tirados da fórmula gerál das Fluxões da dita ordem acharemos a primeira e terceira das quatro Equações do §. XXX, das quaes procedendo segundo a ordem alfabetica, e fazendo as substituições convenientes tiraremos immediatamente as seguintes Equações

$$C = 4\frac{dA}{dx}; D = 4\frac{dB}{dy}; E = 4\frac{dA}{dy}; F = 4\frac{dB}{dx}; I = 6\frac{ddA}{dx^2};$$

$$I = 2\frac{dG}{dy}; L = 6\frac{ddB}{dy^2}; L = 2\frac{dH}{dy}; M = 12\frac{ddA}{dxdy}; M = 4\frac{dG}{dy};$$

$$N = 12\frac{ddB}{dxdy}; N = 4\frac{dH}{dx}; P = 6\frac{ddA}{dy^2}; P = 2\frac{dO}{dy} - 6\frac{ddB}{dxdy};$$

$$Q = 6\frac{ddB}{dx^2}; Q = 2\frac{dO}{dx} - 6\frac{ddA}{dxdy}; R = \frac{d^3A}{dx^3}; S = \frac{d^3B}{dy^3};$$

$$T = 4\frac{d^3B}{dx^3}; T = 4\frac{d^3A}{dx^2dy}; U = 4\frac{d^3B}{dxdy^2}; U = 4\frac{d^3A}{dy^3}; X = 6\frac{d^3B}{dx^2dy};$$

$$X = 6\frac{d^3A}{dxdy^2}.$$

Nas quaes se achaõ incluidas todas as do §. XXIX menos a 1ª, a 6ª, a 7ª, e a 12ª; porém igualando os dois valores de X, os dois de U, e os dois de T, teremos

$$\frac{d^3A}{dxdy^2}=\frac{d^3B}{dx^2dy};\quad \frac{d^3A}{dy^3}=\frac{d^3B}{dxdy^2};\quad \frac{d^3A}{dx^2dy}=\frac{d^3B}{dx^3};$$

multiplicando a primeira d'eſtas Equações por dx, a ſegunda por dy, ſomando-as, e applicando-lhe o Methodo inverſo das Fluxões teremos

$$\frac{ddA}{dy^2}=\frac{ddB}{dxdy},$$

e multiplicando a primeira por dy, e a terceira por dx ſommando-as, e applicando-lhe o Methodo inverſo das Fluxões teremos

$$\frac{ddA}{dxdy}=\frac{ddB}{dx^2}.$$

Se multiplicarmos a primeira d'eſtas duas novas Equações por dy, e a ſegunda por dx, e as ſommarmos, e lhe applicarmos o Methodo Inverſo das Fluxões teremos por ultimo rezultado

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}.$$

Igualando os dois valores de Q, e os dois valores de P, teremos

$$\frac{dO}{dx}=3\frac{ddA}{dxdy}+3\frac{ddB}{dx^2}=6\frac{ddA}{dxdy}$$

$$\frac{dO}{dy}=3\frac{ddA}{dy^2}+3\frac{ddB}{dydx}=6\frac{ddA}{dy^2}$$

Equações das quaes ſe deduz $dO=6d\frac{dA}{dy}$; e por conſequencia uzando do Methodo inverſo das Fluxões

$$O=6\frac{dA}{dy}=6\frac{dB}{dx}$$

Da

Da mesma sorte igualando os dois valores de N, e os dois valores de L, e procedendo por hum modo analogo se achará

$$H = 3\frac{dB}{dy}.$$

Assim como tambem igualando os dois valores de M, e os dois valores de I, e procedendo da mesma maneira se achará

$$G = 3\frac{dA}{dx},$$

que saõ justamente as Equações que faltavaõ para completar as do §. XXIX.

§. XXXIV.

D'aqui podemos concluir, que uzando sómente da primeira Equaçaõ de cada serie das do §. X podemos em todos os cazos verificar se a Funcçaõ Fluxional proposta V he ou naõ Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ da ordem o: porém esta indagaçaõ por semelhante modo pede de ordinario na prática, sendo $n > 3$, tanta attençaõ, e tantas combinações, que a simplificaçaõ exposta em o §. XXIV, me parece preferivel, e por tanto julgo desnecessario entrar aqui em maior explicaçaõ a este respeito.

§. XXXV.

Até aqui naõ temos supposto, que na Funcçaõ proposta V houvesse Fluxaõ alguma constante; mas havendo-a, nesse cazo para reconhecer se a dita Funcçaõ he ou naõ Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ da ordem o, basta, como adverte M. de Condorcet, que os coefficientes de dV satisfaçaõ ás series de Equações de condiçaõ do §. X relativas ás variaveis primitivas, cujas Fluxões forem tambem Fluentes.

O

O ſobredito Geometra deduz eſta propoſiçaõ como huma conſequencia immediata da analyſe dos quatro primeiros Problemas do ſeu *Calculo Integral*; mas baſta por ventura ſeguir a dita analyſe para ſe conhecer demonſtrativamente a verdade da dita propoſiçaõ? O fim a que por aquella analyſe ſe caminha em o Problema quarto he, ſe naõ me engano, buſcar as relações, que neceſſariamente devem ligar entre ſi as quantidades $N^{1'}$; $N^{2'}$; $N^{3'}$; &c. $P^{1'}$; $P^{2'}$; $P^{3'}$; &c. &c. no cazo de ſer V Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o; mas a ſuppoſiçaõ de huma Fluxaõ primeira conſtante, por exemplo dy, naõ faz que eſta Fluxaõ naõ exiſta em V, como exiſtiria ſe naõ foſſe conſtante, e ſendo $P^{2'} = \frac{dV}{ddy}$ he bem viſivel, que de ſer $ddy = 0$ ſe naõ ſegue ſer $P^{2'} = 0$. Ora nós temos demonſtrado, que ſendo V Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, $P^{2'}$ deve ter com $P^{1'}$ a relaçaõ, que exprime a Equaçaõ $P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'} = 0$; logo parece, que quando ſe determina a Fluxaõ de V com o fim de extrahir d'ella os valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $N^{3'}$; &c. ſe deve proceder a eſte calculo de maneira, que da expreſſaõ de dV ſe poſſaõ tambem extrahir $P^{1'}$; e $P^{2'}$: iſto he; parece, que neſte calculo ſenaõ deve reputar dy como conſtante; mas ſim taõ ſómente na expreſſaõ de $P^{2'}$, fazendo $ddy = 0$; pois que de outra maneira ſe omitiria aquella Equaçaõ $P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'} = 0$, á qual V deve inconteſtàvelmente ſatisfazer, ſe for Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ da ordem o. E moſtra por ventura evidentemente a analyſe de M. de Condorcet a ſuperabundancia d'eſta Equaçaõ?

§. XXXVI.

Ainda que ella naõ ſeja de abſoluta neceſſidade no ca-

cazo de que se trata, com tudo he igualmente verdadeirá, e servirá sempre para abreviar, e simplificar a sobredita indagaçaõ; pois huma vez admitida, em vez de precizarmos verificar todas as Equações de condiçaõ relativas a cada huma das outras Fluentes primitivas, bastará que verifiquemos metade, sendo n numero par, e metade de todas menos huma, sendo n numero impar. A demonstraçaõ d'esta Proposiçaõ se deriva dos mesmos principios expostos em os §§. XXIII, e XXIV; mas para maior clareza, circunstancia que dezejára naõ faltasse jámais em meus escritos, e de que paresse que alguns Geometras fugiraõ de proposito, juntarei hum exemplo, em que procederei por dois differentes caminhos á indagaçaõ, de que se trata.

§. XXXVII.

Seja por exemplo V huma Funcçaõ Fluxional da quarta ordem, que involva sómente duas variaveis, e em que dy seja constante. A sua fórmula geral naõ defirirá da fórmula geral transcrita em o §. XXIX senaõ em naõ ter nenhum dos termos, em que entraõ ddy, d^3y, e d^4y; por tanto será

$$V = Ad^4x + Cdxd^3x + Edyd^3x + Gddx^2 + Idx^2ddx + Mdxdyddx$$
$$+ Pdy^2ddx + Rdx^4 + Sdy^4 + Tdydx^3 + Udxdy^3 + Xdx^2dy^2.$$

e as condições, que determinaõ os coefficientes aqui expressos, seraõ as mesmas do §. XXIX, com a differença de serem todas expressadas em Fluxões parciaes de A; o que se conseguirá substituindo $\int \frac{dA}{dy} dx$ em lugar de B. Por este modo teremos, que as condições necessarias no prezente cazo, para que V seja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, seraõ

$$C = 4\frac{dA}{dx};\ E = 4\frac{dA}{dy};\ G = 3\frac{dA}{dx};\ I = 6\frac{ddA}{dxdx};\ M = 12\frac{ddA}{dxdy};$$

$$P = 6\frac{ddA}{dydy};\ R = \frac{d^3A}{dx^3};\ T = 4\frac{d^3A}{dydx^2};\ U = 4\frac{d^3A}{dy^3};\ X = 6\frac{d^3A}{dxdy^2};$$

$$S = \int \frac{d^4A}{dy^4}\, dx;\ \text{ou.}\ \frac{dS}{dx} = \frac{d^4A}{dy^4}.$$

§. XXXVIII.

Segundo a regra expoſta (§. XXXIII.) as noſſas Equações de condiçaõ ſaõ

$$N^{1'} - \frac{1}{4} dN^{2'} = 0$$

$$N^{2'} - \frac{2}{3} dN^{3'} = 0$$

$$P^{1'} - \frac{1}{4} dP^{2'} = 0$$

as quaes, ſubſtituindo por $N^{1'}$; $N^{2'}$; $N^{3'}$; $P^{1'}$; e $P^{2'}$; os ſeus valores tirados de dV, ſe converteraõ a primeira em

$$\left(\frac{dA}{dx} - \frac{1}{4}C\right)d^4x + \left(\frac{3}{4}\frac{dC}{dx} - \frac{1}{2}I\right)dxd^3x + \left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dC}{dy} - \frac{1}{4}M\right)dyd^3x$$

$$+\left(\frac{dG}{dx} - \frac{1}{2}I\right)ddx^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{dI}{dx} - 3R\right)dx^2ddx + \left(\frac{dP}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dM}{dy} - \frac{1}{2}X\right)dy^2ddx$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dy} - \frac{3}{2}T\right)dxdyddx + \left(\frac{dS}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dU}{dy}\right)dy^4 +$$

$$\left(\frac{1}{4}\frac{dT}{dx} - \frac{dR}{dy}\right)dydx^3 + \left(\frac{3}{4}\frac{dU}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dX}{dy}\right)dxdy^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dx} - \frac{3}{4}\frac{dT}{dy}\right)dx^2dy^2 = 0$$

A ſegunda em

$$\left(C - \frac{4}{3}G\right)d^3x + \left(\frac{2}{3}I - \frac{4}{3}\frac{dG}{dx}\right)dxddx + \left(\frac{1}{3}M - \frac{4}{3}\frac{dG}{dy}\right)dyddx$$

$$+\left(3T - \frac{2}{3}\frac{dI}{dy} - \frac{2}{3}\frac{dM}{dx}\right)dx^2dy + \left(2X - \frac{2}{3}\frac{dP}{dx} - \frac{2}{3}\frac{dM}{dy}\right)dxdy^2$$

$$+\left(4R - \frac{2}{3}\frac{dI}{dx}\right)dx^3 + \left(U - \frac{2}{3}\frac{dP}{dy}\right)dy^3 = 0$$

a terceira em

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{1}{4}E\right)d^4x+\left(\frac{3}{4}\frac{dE}{dy}-\frac{1}{2}P\right)dyd^3x+\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1dE}{4dx}-\frac{1}{4}M\right)dxd^3x$$
$$+\left(\frac{dG}{dy}-\frac{1}{4}M\right)ddx^2+\left(\frac{1dP}{2dy}-\frac{3}{4}U\right)dy^2ddx+\left(\frac{dI}{dy}-\frac{1dM}{4dx}-\frac{3}{4}T\right)dx^2ddx$$
$$+\left(\frac{dR}{dy}-\frac{1dT}{4dx}\right)dx^4+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dy}-\frac{1dP}{2dx}-X\right)dxdyddx+\left(\frac{1dU}{4dy}-\frac{dS}{dx}\right)dxdy^3$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dT}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}\right)dydx^3+\left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dy}-\frac{3}{4}\frac{dU}{dx}\right)dx^2dy^2=0$$

Equações de que ſe tiraõ, como he viſivel, com ſumma facilidade todas as que acima determinamos: advertindo que pela regra de M. de Condorcet ſeria precizo empregarmos todas as Equações relativas á variavel x; e poſto que no prezente cazo eſta ventagem ſeja pouco notavel, ella o ſerá tanto mais quanto maior for o numero das variaveis, que entrarem em V, e quanto mais alto for o expoente da ſua ordem Fluxional.

§. XXXIX.

O Theorema geral reprezentado pelas formulas geraes do §. XVII. abrange em toda a ſua extençaõ a Theorica das Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes, que ſaõ Fluxões exaᶜtas de outra alguma Funcçaõ de qualquer ordem inferior; porém como ha muitas, que naõ o ſendo ſe tornaõ taes logo que ſejaõ multiplicadas por factores convenientes para eſſe effeito, para completar a Theorica geral das Equações de condiçaõ paſſaremos a determinar as condições d'eſte ſegundo genero de Funcções Fluxionaes.

SEC-

SECÇAÕ III.

Das Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes, que naõ sendo Fluxões exactas se podem reduzir a que o sejaõ sendo multiplicadas por Factores convenientes.

§. XL.

SEja $V=0$ huma Equaçaõ Fluxional de qualquer ordem n, e de qualquer numero de variaveis, tal porém que se reconheça naõ ser V Fluxaõ exacta de nenhuma Funcçaõ de ordem inferior, mas que sendo multiplicada por hum factor conveniente P fique sendo Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ B da ordem 0, isto he, fique sendo

$$PV=d^nB.$$

Determinando a Fluxaõ de V temos

$$\begin{aligned} dV = & N^{1\prime}dx + N^{2\prime}dp + N^{3\prime}dp' + N^{4\prime}dp'' + N^{5\prime}dp''' + \&c. \\ & + P^{1\prime}dy + P^{2\prime}dq + P^{3\prime}dq' + P^{4\prime}dq'' + P^{5\prime}dq''' + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

e supondo que seja

$$\begin{aligned} dP = & M^{1\prime}dx + M^{2\prime}dp + M^{3\prime}dp' + M^{4\prime}dp'' + M^{5\prime}dp''' + \&c. \\ & + L^{1\prime}dy + L^{2\prime}dq + L^{3\prime}dq' + L^{4\prime}dq'' + L^{5\prime}dq''' + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

será

$$\begin{aligned} d(PV) = & (PN^{1\prime}+VM^{1\prime})dx + (PN^{2\prime}+VM^{2\prime})dp + (PN^{3\prime}+VM^{3\prime})dp' + \&c. \\ & + (PP^{1\prime}+VL^{1\prime})dy + (PP^{2\prime}+VL^{2\prime})dq + (PP^{3\prime}+VL^{3\prime})dq' + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

por

por tanto devendo ser *PV* Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o os coefficientes de $d(PV)$ devem satisfazer a todas as Equações de condiçaõ do §. X, e assim devemos ter a serie de Equações de condiçaõ

$$\left(N^{1'} - \frac{1}{n} dN^{2'}\right)P - \frac{1}{n} N^{2'} dP + \left(M^{1'} - \frac{1}{n} dM^{2'}\right)V - \frac{1}{n} M^{2'} dV = 0$$

$$\left(N^{2'} - \frac{2}{n-1} dN^{3'}\right)P - \frac{2}{n-1} N^{3'} dP + \left(M^{2'} - \frac{2}{n-1} dM^{3'}\right)V - \frac{2}{n-1} M^{3'} dV = 0$$

$$\left(N^{3'} - \frac{3}{n-2} dN^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2} N^{4'} dP + \left(M^{3'} - \frac{3}{n-2} dM^{4'}\right)V - \frac{3}{n-2} M^{4'} dV = 0$$

- -

$$\left(N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3} N^{(n-1)'} dP + \left(M^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dM^{(n-1)'}\right)V$$
$$- \frac{n-2}{3} M^{(n-1)'} dV = 0$$

$$\left(N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2} N^{n'} dP + \left(M^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dM^{n'}\right)V$$
$$- \frac{n-1}{2} M^{n'} dV = 0$$

$$\left(N^{n'} - \frac{n}{1} dN^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1} N^{(n+1)'} dP + \left(M^{n'} - \frac{n}{1} dM^{(n+1)'}\right)V$$
$$- \frac{n}{1} M^{(n+1)'} dV = 0$$

relativa á variavel x: a serie

$$\left(P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'}\right)P - \frac{1}{n} P^{2'} dP + \left(L^{1'} - \frac{1}{n} dL^{2'}\right)V - \frac{1}{n} L^{2'} dV = 0$$

$$\left(P^{2'}-\frac{2}{n-1}dP^{3'}\right)P-\frac{2}{n-1}P^{3'}dP+\left(L^{2'}-\frac{2}{n-1}dL^{3'}\right)V-\frac{2}{n-1}L^{3'}dV=0$$

$$\left(P^{3'}-\frac{3}{n-2}dP^{4'}\right)P-\frac{3}{n-2}P^{4'}dP+\left(L^{3'}-\frac{3}{n-2}dL^{4'}\right)V-\frac{3}{n-2}L^{4'}dV=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(P^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}dP^{(n-1)'}\right)P-\frac{n-2}{3}P^{(n-1)'}dP+\left(L^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}dL^{(n-1)'}\right)V$$
$$-\frac{n-2}{3}L^{(n-1)'}dV=0$$

$$\left(P^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dP^{n'}\right)P-\frac{n-1}{2}P^{n'}dP+\left(L^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dL^{n'}\right)V$$
$$-\frac{n-1}{2}L^{n'}dV=0$$

$$\left(P^{n'}-\frac{n}{1}dP^{(n+1)'}\right)P-\frac{n}{1}P^{(n+1)'}dP+\left(L^{n'}-\frac{n}{1}dL^{(n+1)'}\right)V$$
$$-\frac{n}{1}L^{(n+1)'}dV=0$$

relativa á variavel y; e huma ferie femelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XLI.

Attendendo porém a que he $V=0$, e $dV=0$; a primeira d'eftas feries fe reduz a

$$\left(N^{1'}-\frac{1}{n}dN^{2'}\right)P-\frac{1}{n}N^{2'}dP=0$$

$$\left(N^{2'}-\frac{2}{n-1}dN^{3'}\right)P-\frac{2}{n-1}N^{3'}dP=0$$

$(N^{3'}$

$$\left(N^{3'} - \frac{3}{n-2} dN^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2} N^{4'} dP = 0$$

- - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - -

$$\left(N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3} N^{(n-1)'} dP = 0$$

$$\left(N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2} N^{n'} dP = 0$$

$$\left(N^{n'} - \frac{n}{1} dN^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1} N^{(n+1)'} dP = 0$$

A segunda a

$$\left(P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'}\right)P - \frac{1}{n} P^{2'} dP = 0$$

$$\left(P^{2'} - \frac{2}{n-1} dP^{3'}\right)P - \frac{2}{n-1} P^{3'} dP = 0$$

$$\left(P^{3'} - \frac{3}{n-2} dP^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2} P^{4'} dP = 0$$

- - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - -

$$\left(P^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3} P^{(n-1)'} dP = 0$$

$$\left(P^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dP^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2} P^{n'} dP = 0$$

$$\left(P^{n'} - \frac{n}{1} dP^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1} P^{(n+1)'} dP = 0$$

e assim semelhantemente todas as outras.

§. XLII.

§. XLII.

Eliminando de todas eſtas Equações $\frac{dP}{P}$, ſe combinaſſemos todos os valores de $\frac{dP}{P}$, que ſe podem d'ellas tirar, teriamos (ſendo λ o numero das variaveis primitivas, que entraõ em V) hum numero $\frac{\lambda n(\lambda n - 1)}{2}$ de Equações, a que os coefficientes de dV ſatisfaraõ todas as vezes que a Funcçaõ V, ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſe poder reduzir a ſer Fluxaõ exacta da ordem fluxional n; porém ſe reflectirmos, que igualando quaeſquer dos ditos valores com cada hum dos outros ſucceſſivamente todas as mais igualdades, que entre eſtes ſe podem eſtabelecer, ſaõ conſequencias neceſſarias d'aquellas, e que por tanto ſe naõ podem contemplar como condições differentes, veremos que o numero total das condições realmente differentes em vez de ſer $\frac{\lambda n(\lambda n - 1)}{2}$ ſerá ſimpleſmente $\lambda n - 1$. A eſcolha d'eſtas $\lambda n - 1$ Equações de condiçaõ rigorozamente differentes tiradas das $\frac{\lambda n(\lambda n - 1)}{2}$, que a analyze nos facilita, he arbitraria; porém ſendo ao meſmo tempo conveniente e elegante que ellas ſejaõ as mais faceis de calcular, e que tenhaõ entre ſi alguma lei de ſucceſſaõ facil de notar, nós as eſcolheremos pela maneira ſeguinte.

$$nN^{(n+1)'}\left(2N^{(n-1)'} - (n-1)dN^{n'}\right) - (n-1)N^{n'}\left(N^{n'} - ndN^{(n+1)'}\right) = 0$$

$$nN^{(n+1)'}\left(3N^{(n-2)'} - (n-2)dN^{(n-1)'}\right) - (n-2)N^{(n-1)'}\left(N^{n'} - ndN^{(n+1)'}\right) = 0$$

$$nN^{(n+1)'}\left(4N^{(n-3)'} - (n-3)dN^{(n-2)'}\right) - (n-3)N^{(n-2)'}\left(N^{n'} - ndN^{(n+1)'}\right) = 0$$

$nN^{(n+1)'}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$nN^{(n+1)'}\left((n-2)N^{3'}-3dN^{4'}\right)-3N^{4'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nN^{(n+1)'}\left((n-1)N^{2'}-2dN^{3'}\right)-2N^{3'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nN^{(n+1)'}\left(nN^{1'}-dN^{2'}\right)-N^{2'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$N^{(n+1)'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)-P^{(n+1)'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(2P^{(n-1)'}-(n-1)dP^{n'}\right)-(n-1)P^{n'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(3P^{(n-2)'}-(n-2)dP^{(n-1)'}\right)-(n-2)P^{(n-1)'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(4P^{(n-3)'}-(n-3)dP^{(n-2)'}\right)-(n-3)P^{(n-2)'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$nP^{(n+1)'}\left((n-2)P^{3'}-3dP^{4'}\right)-3P^{4'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left((n-1)P^{2'}-2dP^{3'}\right)-2P^{3'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(nP^{1'}-dP^{2'}\right)-P^{2'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

&c. &c.

§. XLIII.

Se a Funcçaõ propoſta V naõ ſatisfizer a eſtas Equa-

ções de condiçaõ deveremos examinar ſe multiplicandoa por hum factor conveniente P ſe poderá reduſir a ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem, e como neſte cazo os coefficientes de $d(PV)$ devem ſatisfazer ás condições do §. XIV, applicando-lhe o Theorema por ellas expreſſado, e attendendo a que $V=0$; $dV=0$, e $ddV=0$, acharemos que elles devem ſatisfazer ás ſeguintes ſeries de Equações de condiçaõ, a primeira

$$\left(N^{1'} - 2\frac{1}{n}dN^{2'} + \frac{1.2}{n(n-1)}ddN^{3'}\right)P - 2\frac{1}{n}\left(N^{2'} - \frac{2}{n-1}dN^{3'}\right)dP$$

$$+\frac{1.2}{n(n-1)}N^{3'}ddP = 0$$

$$\left(N^{2'} - 2\frac{2}{n-1}dN^{3'} + \frac{2.3}{(n-1)(n-2)}ddN^{4'}\right)P - 2\frac{2}{n-1}\left(N^{3'} - \right.$$

$$\left.\frac{3}{n-2}dN^{4'}\right)dP + \frac{2.3}{(n-1)(n-2)}N^{4'}ddP = 0$$

$$\left(N^{3'} - 2\frac{3}{n-2}dN^{4'} + \frac{3.4}{(n-2)(n-3)}ddN^{5'}\right)P - 2\frac{3}{n-2}\left(N^{4'} - \right.$$

$$\left.\frac{4}{n-3}dN^{5'}\right)dP + \frac{3.4}{(n-2)(n-3)}N^{5'}ddP = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(N^{(n-3)'} - 2\frac{n-3}{4}dN^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4}ddN^{(n-1)'}\right)P -$$

$$2\frac{n-3}{4}\left(N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3}dN^{(n-1)'}\right)dP + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4}N^{(n-1)'}ddP = 0$$

$$\left(N^{(n-2)'} - 2\frac{n-2}{3}dN^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}ddN^{n'}\right)P -$$

$$2\frac{n-2}{3}\left(N^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dN^{n'}\right)dP+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}N^{n'}ddP=0$$

$$\left(N^{(n-1)'}-2\frac{n-1}{2}dN^{n'}+\frac{n(n-1)}{1.2}ddN^{(n+1)'}\right)P-2\frac{n-1}{2}\left(N^{n'}-\right.$$

$$\left.\frac{n}{1}dN^{(n+1)'}\right)dP+\frac{n.(n-1)}{1.2}N^{(n+1)'}ddP=0$$

relativa á variavel x: a fegunda

$$\left(P^{1'}-2\frac{1}{n}dP^{2'}+\frac{1.2}{n(n-1)}ddP^{3'}\right)P-2\frac{1}{n}\left(P^{2'}-\frac{2}{n-1}dP^{3'}\right)dP$$

$$+\frac{1.2}{n(n-1)}P^{3'}ddP=0$$

$$\left(P^{2'}-2\frac{2}{n-1}dP^{3'}+\frac{2.3}{(n-1)(n-2)}ddP^{4'}\right)P-2\frac{2}{n-1}\left(P^{3'}-\right.$$

$$\left.\frac{3}{n-2}dP^{4'}\right)dP+\frac{2.3}{(n-1)(n-2)}P^{4'}ddP=0$$

$$\left(P^{3'}-2\frac{3}{n-2}dP^{4'}+\frac{3.4}{(n-2)(n-3)}ddP^{5'}\right)P-2\frac{3}{n-2}\left(P^{4'}-\right.$$

$$\left.\frac{4}{n-3}dP^{5'}\right)dP+\frac{3.4}{(n-2)(n-3)}P^{5'}ddP=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(P^{(n-3)'}-2\frac{n-3}{4}dP^{(n-2)'}+\frac{(n-2)(n-3)}{3.4}ddP^{(n-1)'}\right)P-$$

$$\frac{n-3}{4}\left(P^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}dP^{(n-1)'}\right)dP+\frac{(n-2)(n-3)}{3.4}P^{(n-1)'}ddP=0$$

$$\left(P^{(n-2)'}-2\frac{n-2}{3}dP^{(n-1)'}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}ddP^{n'}\right)P-$$

$$2\frac{n-2}{3}\left(P^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dP^{n'}\right)dP+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}P^{n'}ddP=0$$

$$\left(P^{(n-1)'}-2\frac{n-1}{2}dP^{n'}+\frac{n.(n-1)}{1.2}ddP^{(n+1)'}\right)P-2\frac{n-1}{2}$$

$$\left(P^{n'}-\frac{n}{1}dP^{(n+1)'}\right)dP+\frac{n(n-1)}{1.2}P^{(n+1)'}ddP=0$$

relativa á variavel y; e assim semelhantemente a respeito de cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XLIV.

Eliminando d'estas Equações as quantidades ddP; e $\frac{dP}{d}$; e estabelecendo entre os valores de $\frac{dP}{P}$, que d'aqui rezultarem, todas as igualdades rigorozamente differentes teremos as Equações de condiçaõ, a que a Funcçaõ V deve satisfazer todas as vezes que sendo multiplicada por hum factor conveniente se redusir a ser Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem. Mas qual será o numero e a fórma d'estas Equações? O numero das Equações do §. antecedente sendo λ o nnmero das variaveis, e n o expoente da ordem Fluxional he $(n-1)\lambda$; e por tanto havendo de se eliminar ddP, e $\frac{dP}{P}$ paresse, que o numero das Equações de condiçaõ, a que V deve satisfazer, neste cazo deve reduzirse a $(n-1)\lambda-2$; mas se for $\lambda=2$, e $n=2$; será $(n-1)\lambda-2=0$, e com tudo he precizo, que a Funcçaõ proposta satisfaça a alguma condiçaõ.

§. XLV.

Principiemos por examinar este cazo, que á primeira vista parece naõ exigir condiçaõ alguma. Seja pois a Funcçaõ proposta V huma Funcçaõ Fluxional da segunda ordem das

das variaveis x, e y. As Equações que nos devem dar as condições, a que os coefficientes de dV devem satisfazer, saõ

$$\left(N^{1'} - dN^{2'} + ddN^{3'}\right)P - \left(N^{2'} - 2dN^{3'}\right)dP + N^{3'}ddP = 0$$

$$\left(P^{1'} - dP^{2'} + ddP^{3'}\right)P - \left(P^{2'} - 2\,dP^{3'}\right)dP + P^{3'}ddP = 0$$

as quaes por maior brevidade escreveremos d'esta sorte

$$B^{1'}P - C^{1'}dP + D^{1'}ddP = 0$$

$$B^{2'}P - C^{2'}dP + D^{2'}ddP = 0$$

eliminando d'ellas ddP teremos huma nova Equaçaõ

$$\left(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}\right)P - \left(C^{1'}D^{2'} - D^{1'}C^{2'}\right)dP = 0$$

d'aqual substituindo em lugar de ddx, oü ddy o seu valor tirado da proposta, e determinando a süa Fluxaõ, se deduz outra nova Equaçaõ

$$Pd\left(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}\right) + \left(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}\right)dP - \left(C^{1'}D^{2'} - D^{1'}C^{2'}\right)ddP = 0$$
$$- d\left(C^{1'}D^{2'} - D^{1'}C^{2'}\right)dP$$

que para maior simplicidade do calculo escreveremos d'esta sorte

$$B^{3'}P - C^{3'}dP + D^{3'}ddP = 0$$

D'esta se tira

$$ddP = \frac{C^{3'}dP - B^{3'}P}{D^{3'}}$$

valor que substituido nas duas primeiras as reduz a

$$\left(B^{1'}D^{3'} - D^{1'}B^{3'}\right)P - \left(C^{1'}D^{3'} - D^{1'}C^{3'}\right)dP = 0$$

$$\left(B^{2'}D^{3'} - D^{2'}B^{3'}\right)P - \left(C^{2'}D^{3'} - D^{2'}C^{3'}\right)dP = 0$$

e por tanto eliminando por meio d'ellas $\frac{dP}{P}$ teremos a Equaçaõ

$$\left(B^{1'}C^{2'} - C^{1'}B^{2'}\right)D^{3'} - \left(B^{1'}C^{3'} - C^{1'}B^{3'}\right)D^{2'} + \left(B^{2'}C^{3'} - C^{2'}B^{3'}\right)D^{1'} = 0$$

em que ſe involvem as condições, a que a Funcçaõ propoſta V deve ſatisfazer no cazo que, ſendo multiplicada por hum factor conveniente P, ſe poſſa reduzir a ſer Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da primeira ordem.

§. XLVI.

Ora eſte procedimento, naõ ſendo de nenhuma ſorte particular ao cazo propoſto, nos moſtra que, comparando duas a duas todas as Equações do §. XLIII, de tal ſorte que ſe tenhaõ todas as comparações de igualdade realmente differentes, que entre ellas ſe podem eſtabelecer, de cada hum d'eſtes pares de Equações aſſim combinadas ſe póde deduzir huma Equaçaõ de condiçaõ ſemelhante a do §. antecedente; e que por tanto ſendo λ o numero das variaveis, e n o expoente da ordem fluxional da Funcçaõ V, das $(n-1)\lambda$ Equações do §. XLIII ſe tiraráõ $(n-1)\lambda - 1$ Equações de condiçaõ ſemelhantes á do §. precedente, as quaes todas deveráõ ter logar, para que V ſe poſſa reduzir a ſer fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem. Porém ſerá ſempre mais ſimples em todos os cazos em que fôr $(n-1)\lambda > 2$ proceder á eliminaçaõ de ddP, e $\frac{dP}{P}$ pelos methodos da Algebra ordinaria, o que dará as Equações de condiçaõ neceſſarias com menos trabalho, e em menor numero; pois ſeráõ como aſſima diſſemos ſómente $(n-1)\lambda - 2$.

§. XLVII.

§. XLVII.

Suppondo que as variaveis sejaõ só duas x, e y, e escrevendo por mais brevidade as Equações do §. XLIII da fórma seguinte, teremos

$$\overset{1'}{B}P - \overset{1'}{C}dP + \overset{1'}{D}ddP = 0$$

$$\overset{2'}{B}P - \overset{2'}{C}dP + \overset{2'}{D}ddP = 0$$

$$\overset{3'}{B}P - \overset{3'}{C}dP + \overset{3'}{D}ddP = 0$$

\- - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - -

$$\overset{(n-3)'}{B}P - \overset{(n-3)'}{C}dP + \overset{(n-3)'}{D}ddP = 0$$

$$\overset{(n-2)'}{B}P - \overset{(n-2)'}{C}dP + \overset{(n-2)'}{D}ddP = 0$$

$$\overset{(n-1)'}{B}P - \overset{(n-1)'}{C}dP + \overset{(n-1)'}{D}ddP = 0$$

primeira serie de Equações relativa á variavel x, e

$$\overset{1'}{B}_{(1)}P - \overset{1'}{C}_{(1)}dP + \overset{1'}{D}_{(1)}ddP = 0$$

$$\overset{2'}{B}_{(1)}P - \overset{2'}{C}_{(1)}dP + \overset{2'}{D}_{(1)}ddP = 0$$

$$\overset{3'}{B}_{(1)}P - \overset{3'}{C}_{(1)}dP + \overset{3'}{D}_{(1)}ddP = 0$$

\- - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - -

$$\overset{(n-3)'}{B}_{(1)}P - \overset{(n-3)'}{C}_{(1)}dP + \overset{(n-3)'}{D}_{(1)}ddP = 0$$

$\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}$

$$\overset{(n-2)'}{B(1)}\, P - \overset{(n-2)'}{C(1)}\, dP + \overset{(n-2)'}{D(1)}\, ddP = 0$$

$$\overset{(n-1)'}{B(1)}\, P - \overset{(n-1)'}{C(1)}\, dP + \overset{(n-1)'}{D(1)}\, ddP = 0$$

segunda serie de Equaçoẽs relativa á variavel y.

§. XLVIII.

Comparando a ultima Equaçaõ da primeira serie com cada huma das outras da mesma serie : depois com a ultima da segunda , e esta com cada huma das outras da mesma segunda ; e eliminando ddP , teremos as seguintes Equaçoẽs.

$$\left(\overset{(n-1)'}{B}\,\overset{(n-2)'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-2)'}{B}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C}\,\overset{(n-2)'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-2)'}{C}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B}\,\overset{(n-3)'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-3)'}{B}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C}\,\overset{(n-3)'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-3)'}{C}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B}\,\overset{(n-4)'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-4)'}{B}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C}\,\overset{(n-4)'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-4)'}{C}\right)dP = 0$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(\overset{(n-1)'}{B}\,\overset{3'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{3'}{B}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C}\,\overset{3'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{3'}{C}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B}\,\overset{2'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{2'}{B}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C}\,\overset{2'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{2'}{C}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B}\,\overset{1'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{1'}{B}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C}\,\overset{1'}{D} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{1'}{C}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B}\,\overset{(n-1)'}{D(1)} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-1)'}{B(1)}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C}\,\overset{(n-1)'}{D(1)} - \overset{(n-1)'}{D}\,\overset{(n-1)'}{C(1)}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B(1)}\,\overset{(n-2)'}{D(1)} - \overset{(n-1)'}{D(1)}\,\overset{(n-2)'}{B(1)}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C(1)}\,\overset{(n-2)'}{D(1)} - \overset{(n-1)'}{D(1)}\,\overset{(n-2)'}{C(1)}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B(1)}\,\overset{(n-3)'}{D(1)} - \overset{(n-1)'}{D(1)}\,\overset{(n-3)'}{B(1)}\right)P - \left(\overset{(n-1)'}{C(1)}\,\overset{(n-3)'}{D(1)} - \overset{(n-1)'}{D(1)}\,\overset{(n-3)'}{C(1)}\right)dP = 0$$

$\Big(\overset{(n-1)'}{B(1)}$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-4)'} - D_{(1)}^{(n-1)'} B_{(1)}^{(n-4)'}\right)P - \left(C_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-4)'} - D_{(1)}^{(n-1)'} C_{(1)}^{(n-4)'}\right)dP = 0$$

- -

- -

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{3'} - D_{(1)}^{(n-1)'} B_{(1)}^{3'}\right)P - \left(C_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{3'} - D_{(1)}^{(n-1)'} C_{(1)}^{3'}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{2'} - D_{(1)}^{(n-1)'} B_{(1)}^{2'}\right)P - \left(C_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{2'} - D_{(1)}^{(n-1)'} C_{(1)}^{2'}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{1'} - D_{(1)}^{(n-1)'} B_{(1)}^{1'}\right)P - \left(C_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{1'} - D_{(1)}^{(n-1)'} C_{(1)}^{1'}\right)dP = 0$$

das quaes eliminando $\frac{dP}{P}$ se deduzem as seguintes

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{(n-3)'} - \left(B^{(n-1)'} C^{(n-3)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-3)'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{(n-3)'} - C^{(n-2)'} B^{(n-3)'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{(n-4)'} - \left(B^{(n-1)'} C^{(n-4)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-4)'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{(n-4)'} - C^{(n-2)'} B^{(n-4)'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{(n-5)'} - \left(B^{(n-1)'} C^{(n-5)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-5)'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{(n-5)'} - C^{(n-2)'} B^{(n-5)'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

- -

- -

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{3'} - \left(B^{(n-1)'} C^{3'} - C^{(n-1)'} B^{3'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{3'} - C^{(n-2)'} B^{3'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{2'} - \left(B^{(n-1)'} C^{2'} - C^{(n-1)'} B^{2'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{2'} - C^{(n-2)'} B^{2'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'}C^{(n-2)'}-C^{(n-1)'}B^{(n-2)'}\right)D^{1'}-\left(B^{(n-1)'}C^{1'}-C^{(n-1)'}B^{1'}\right)D^{(n-2)'}$$
$$+\left(B^{(n-2)'}C^{1'}-C^{(n-2)'}B^{1'}\right)D^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B^{(n-1)'}C^{(n-2)'}-C^{(n-1)'}B^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}-\left(B^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-1)'}-C^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-1)'}\right)D^{(n-2)'}$$
$$+\left(B^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-1)'}-C^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-1)'}\right)D^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-1)'}-C^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-1)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}-\left(B^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-3)'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-3)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-3)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-3)'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-3)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-4)'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-4)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-4)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-4)'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-4)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-5)'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-5)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-5)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-5)'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-5)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

- -

- -

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{3'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{3'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{3'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{3'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{3'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{2'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{2'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{2'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{2'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{2'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}\right.$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B_{(1)}}\overset{(n-2)'}{C_{(1)}}-\overset{(n-1)'}{C_{(1)}}\overset{(n-2)'}{B_{(1)}}\right)\overset{1'}{D_{(1)}}-\left(\overset{(n-1)'}{B_{(1)}}\overset{1'}{C_{(1)}}-\overset{(n-1)'}{C_{(1)}}\overset{1'}{B_{(1)}}\right)\overset{(n-2)'}{D_{(1)}}$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{B_{(1)}}\overset{1'}{C_{(1)}}-\overset{(n-2)'}{C_{(1)}}\overset{1'}{B_{(1)}}\right)\overset{(n-1)'}{D_{(1)}}=0$$

em que ſe comprehendem todas as condições, á que os coefficientes de dV devem ſatisfazer. Se o numero das variaveis foſſe maior, o procedimento aqui praticado e em o §. antecedente deixaõ bem claramente ver qual he o caminho, que ſe deveria ſeguir para ſe obterem as Equações de condiçaõ, a que os coefficientes de dV deveriaõ ſatisfazer, e por tanto podemos diſpenſarnos de examinar outro algum cazo dos em que V poſſa ſer reductivel a huma Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da primeira ordem.

§. XLIX.

Se depois de ter reconhecido que V naõ ſatisfaz a eſtas Equações de condiçaõ quizermos examinar ſe eſta Funcçaõ pode ſer por outro modo tratada, para que ſe obtenha a ſua Fluente, ſegue-ſe indagar ſe multiplicando-a por hum factor conveniente ſe poderá reduſir a ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem; e como neſte cazo os coefficientes de $d(PV)$ devem ſatisfazer ás condições do §. XVI. applicando-lhe o Theorema por ella expreſſado, e attendendo a que neſte cazo he $V=0$; $dV=0$; $ddV=0$; e $d^3V=0$; acharemos que elles devem ſatisfazer á ſeguinte ſerie de Equações

$$\left(\overset{1'}{N}-3\tfrac{1}{n}d\overset{2'}{N}-3\tfrac{1.2}{n(n-1)}dd\overset{3'}{N}-\tfrac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}d^3\overset{4'}{N}\right)P-$$

$$3\tfrac{1}{n}\left(\overset{2'}{N}-2\tfrac{2}{n-1}d\overset{3'}{N}+\tfrac{2.3}{(n-1)(n-2)}dd\overset{4'}{N}\right)dP+3\tfrac{1.2}{n(n-1)}\left(\overset{3'}{N}\right.$$

$$\left.-\tfrac{3}{n-2}d\overset{4'}{N}\right)ddP-\tfrac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}\overset{4'}{N}d^3P=0$$

$\left(\overset{2'}{N}\right.$

$$\left(N^{2'} - 3\frac{2}{n-1} d N^{3'} + 3\frac{2.3}{(n-1)(n-2)} ddN^{4'} - \frac{2.3.4}{(n-1)(n-2)(n-3)} d^3 N^{5'}\right)P$$
$$-3\frac{2}{n-1}\left(N^{3'} - 2\frac{3}{n-2} dN^{4'} + \frac{3.4}{(n-2)(n-3)} ddN^{5'}\right)dP + 3\frac{2.3}{(n-1)(n-2)}$$
$$\left(N^{4'} - \frac{4}{n-3} d N^{5'}\right)ddP - \frac{2.3.4}{(n-1)(n-2)(n-3)} N^{5'} d^3 P = 0$$

$$\left(N^{3'} - 3\frac{3}{n-2} dN^{4'} + \frac{3.4}{(n-2)(n-3)} ddN^{5'} - \frac{3.4.5}{(n-2)(n-3)(n-4)} d^3 N^{6'}\right)P$$
$$-3\frac{3}{n-2}\left(N^{4'} - 2\frac{4}{n-3} d N^{5'} + \frac{4.5}{(n-3)(n-4)} ddN^{6'}\right)dP + 3\frac{3.4}{(n-2)(n-3)}$$
$$\left(N^{5'} - \frac{5}{n-4} dN^{6'}\right)ddP - \frac{3.4.5}{(n-2)(n-3)(n-4)} N^{6'} d^3 P = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(N^{(n-4)'} - 3\frac{n-4}{5} dN^{(n-3)'} + 3\frac{(n-3)(n-4)}{4.5} ddN^{(n-2)'} -\right.$$
$$\left.\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.4.5} d^3 N^{(n-1)'}\right)P - 3\frac{n-4}{5}\left(N^{(n-3)'} - 2\frac{n-3}{4} dN^{(n-2)'}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-2)(n-3)}{3.4} ddN^{(n-1)'}\right)dP + 3\frac{(n-3)(n-4)}{4.5}\left(N^{(n-2)'} -\right.$$
$$\left.\frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'}\right)ddP - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.4.5} N^{(n-1)'} d^3 P = 0$$

$$\left(N^{(n-3)'} - 3\frac{n-3}{4} dN^{(n-2)'} + 3\frac{(n-2)(n-3)}{3.4} ddN^{(n-1)'} -\right.$$
$$\left.\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} d^3 N^{n'}\right)P - 3\frac{n-3}{4}\left(N^{(n-2)'} - 2\frac{n-2}{3} dN^{(n-1)'} +\right.$$
$$\left.\frac{(n-1)(n-2)}{2.3} ddN^{n'}\right)dP + 3\frac{(n-2)(n-3)}{3.4}\left(N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2} dN^{n'}\right) ddP$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} N^{n'} d^3 P = 0 \qquad \left(N^{(n-2)'}\right.$$

$$\left(N^{(n-2)'} - 3\frac{n-2}{3}dN^{(n-1)'} + 3\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}ddN^{n'} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3N^{(n+1)'}\right)P$$

$$-3\frac{n-2}{3}\left(N^{(n-1)'} - 2\frac{n-1}{2}dN^{n'} + \frac{n(n-1)}{1.2}ddN^{(n+1)'}\right)dP + 3\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}$$

$$\left(N^{n'} - \frac{1}{n}dN^{(n+1)'}\right)ddP - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}N^{(n+1)'}d^3P = 0$$

relativa á variavel x; e a huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas

§. L.

Sendo λ numero das ditas variaveis, o numero total das Equaçőes do §. antecedente ſerá $(n-2)\lambda$, e eliminando d^3P; ddP; e $\frac{dP}{P}$, d'ellas ſe tirará hum numero $(n-2)\lambda-3$ de Equaçőes de condiçaő, que deveraő verificar-ſe, para que a Funcçaő propoſta V, multiplicada por hum factor conveniente P, ſe poſſa reduſir a ſer Fluxaő exacta de outra Funcçaő Fluxional da ſegunda ordem: mas eſta eliminaçaő naő poderá ter lugar pelas regras ordinarias da Algebra ſenaő ſendo $(n-2)\lambda > 3$; pelo que tanto no cazo de ſer $n=3$, e $\lambda=2$; como no cazo de ſer $n=3$, e $\lambda=3$ deveremos recorrer a outro methodo de eliminaçaő como fizemos em o §. XLV.

§. LI.

Porém antes de paſſarmos á expoſiçaő dos differentes modos, porque ſe podem deduſir das Equaçőes precedentes as condiçőes, a que V deve ſatisfazer, para maior facilidade do calculo, ſuppondo que as variaveis ſejaő tres x, y, e z; reprezentaremos as mencionadas Equaçőes pela maneira ſeguinte, devidindo-as em tres ſeries: a primeira

$$B''P - C''dP + D''ddP - E''d^3P = 0$$

$$+\left(D^{1'}E^{1'}_{(1)} - D^{1'}_{(1)}E^{1'}\right)d^3P = 0$$

Equaçaõ que por mais brevidade escreveremos da maneira seguinte

$$B_{(1)}P - C_{(1)}dP + D_{(1)}ddP - E_{(1)}d^3P = 0$$

Comparando agora esta Equaçaõ com cada huma das duas primeiras, de quem ella se derivou, e eliminando d^3P, teremos duas novas Equações.

$$\left(B^{1'}E_{(1)} - E^{1'}B_{(1)}\right)P - \left(C^{1'}E_{(1)} - E^{1'}C_{(1)}\right)dP + \left(D^{1'}E_{(1)} - E^{1'}D_{(1)}\right)ddP = 0$$

$$\left(B^{1'}_{(1)}E_{(1)} - E^{1'}_{(1)}B_{(1)}\right)P - \left(C^{1'}_{(1)}E_{(1)} - E^{1'}_{(1)}C_{(1)}\right)dP + \left(D^{1'}_{(1)}E_{(1)} - E^{1'}_{(1)}D_{(1)}\right)ddP = 0$$

que semelhantemente reprezentaremos por

$$B_{(2)}P - C_{(2)}dP + D_{(2)}ddP = 0$$

$$B^{1'}_{(2)}P - C^{1'}_{(2)}dP + D^{1'}_{(2)}ddP = 0$$

e tornando a substituir em cada huma d'ellas em logar de d^3x ou d^3y o seu valor tirado da proposta, e eliminando ddP passaremos a ter outra Equaçaõ

$$\left(B_{(2)}D^{1'}_{(2)} - D_{(2)}B^{1'}_{(2)}\right)P - \left(C_{(2)}D^{1'}_{(2)} - D_{(2)}C^{1'}_{(2)}\right)dP = 0$$

da qual pela determinaçaõ da sua Fluxaõ deduziremos

$$d\left(B_{(2)}D^{1'}_{(2)} - D_{(2)}B^{1'}_{(2)}\right)P + \left(B_{(2)}D^{1'}_{(2)} - D_{(2)}B^{1'}_{(2)}\right)dP - \left(C_{(2)}D^{1'}_{(2)} - D_{(2)}C^{1'}_{(2)}\right)ddP = 0$$

$$- d\left(C_{(2)}D^{1'}_{(2)} - D_{(2)}C^{1'}_{(2)}\right)dP$$

Equaçaõ que pelas razões e modo até agora praticado reprezentaremos por

$$B_{(3)}P - C_{(3)}dP + D_{(3)}ddP = 0$$

Tirando finalmente d'esta o valor de ddP, e substituindo-o em

em cada huma das duas precedentes de quem ella rezultou, ellas se reduziraõ a

$$\left(B_{(2)}\,D_{(3)} - D_{(2)}\,B_{(3)}\right)P - \left(C_{(2)}\,D_{(3)} - D_{(2)}\,C_{(3)}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{1'}{B}_{(2)}\,D_3 - \overset{1'}{D}_{(2)}\,B_3\right)P - \left(\overset{1'}{C}_{(2)}\,D_{(3)} - \overset{1'}{D}_{(2)}\,C_{(3)}\right)dP = 0$$

Equações das quaes pela eliminaçaõ de $\frac{dP}{P}$ se deduz ultimamente a Equaçaõ

$$\left(B_{(2)}\overset{1'}{C}_{(2)} - C_{(2)}\overset{1'}{B}_{(2)}\right)D_{(3)} - \left(B_{(2)}C_{(3)} - C_{(2)}B_{(3)}\right)\overset{1'}{D}_{(2)} + \left(\overset{1'}{B}_{(2)}C_{(3)} - \overset{1'}{C}_{(2)}B_{(3)}\right)D_{(2)} = 0$$

em que se encerraõ todas as condições, a que V deve satisfazer no cazo de que se trata.

§. LIII.

Sendo $n = 3$, e $\lambda = 3$; as Equações de condiçaõ a que os coefficientes de dV deveráõ satisfazer seráõ:

$$\overset{1'}{B}P - \overset{1'}{C}dP + \overset{1'}{D}ddP - \overset{1'}{E}d^3P = 0$$

$$\overset{1'}{B}_{(1)}P - \overset{1'}{C}_{(1)}dP + \overset{1'}{D}_{(1)}ddP - \overset{1'}{E}_{(1)}d^3P = 0$$

$$\overset{1'}{B}_{(2)}P - \overset{1'}{C}_{(2)}dP + \overset{1'}{D}_{(2)}ddP - \overset{1'}{E}_{(2)}d^3P = 0$$

das quaes eliminando d^3P se tira

$$\left(\overset{1'}{B}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{E}\overset{1'}{B}_{(1)}\right)P - \left(\overset{1'}{C}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{E}\overset{1'}{C}_{(1)}\right)dP + \left(\overset{1'}{D}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{E}\overset{1'}{D}_{(1)}\right)ddP = 0$$

$$\left(\overset{1'}{B}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(2)} - \overset{1'}{E}_{(1)}\overset{1'}{B}_{(2)}\right)P - \left(\overset{1'}{C}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(2)} - \overset{1'}{E}_{(1)}\overset{1'}{C}_{(2)}\right)dP + \left(\overset{1'}{D}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(2)} - \overset{1'}{E}_{(1)}\overset{1'}{D}_{(2)}\right)ddP = 0$$

Equações que escreveremos da maneira seguinte

$$B_{(1)}\,P - C_{(1)}\,dP + D_{(1)}\,ddP = 0$$

$$B_{(2)}\,P - C_{(2)}\,dP + D_{(2)}\,ddP = 0$$

e das quaes pela eliminaçaõ de ddP tiraremos huma nova Equaçaõ

$$\left(B_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} B_{(2)}\right)P - \left(C_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} C_{(2)}\right)dP = 0$$

D'esta, substituindo primeiro em logar de d^3x, d^3y, ou d^3z o seu valor tirado da proposta, e determinando a sua Fluxaõ, deduziremos a seguinte

$$d\left(B_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}B_{(2)}\right)P+\left(B_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}B_{(2)}\right)dP-\left(C_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}C_{(2)}\right)ddP=0$$
$$-d\left(C_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}C_{(2)}\right)dP$$

Equaçaõ que reprezentaremos por

$$B_{(3)}\, P - C_{(3)}\, dP + D_{(3)}\, ddP = 0$$

Comparando agora esta com cada huma das outras duas, de quem ella foi derivada, teremos duas novas Equações

$$\left(B_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} B_{(2)}\right)P - \left(C_{(1)} D_{(2)} - D_{(1)} C_{(2)}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} B_{(3)}\right)P - \left(C_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} C_{(3)}\right)dP = 0$$

das quaes eliminando $\frac{dP}{P}$ se deduz a Equaçaõ final

$$\left(B_{(1)}C_{(2)}-C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(3)}-\left(B_{(1)}C_{(3)}-C_{(1)}B_{(3)}\right)D_{(2)}+\left(B_{(2)}C_{(3)}-C_{(2)}B_{(3)}\right)D_{(1)}=0$$

que encerra todas as condições, a que a Funcçaõ proposta V deve satisfazer no cazo de que se trata.

§. LIV.

Suppondo porém que seja $n > 3$, e por consequencia $(n-2)\lambda > 3$ poderemos eliminar d^3P; ddP; e $\frac{dP}{P}$ simplesmente pelos methodos da Algebra ordinaria, e obter

Equa-

Equações de condiçaõ da mesma fórma; porém mais simpleces que as precedentes: e supposto que a sua determinaçaõ naõ seja deficil, depois do que praticamos em o §. XLVIII, com tudo por terminar quanto respeita ao prezente cazo, e fazer, se he possivel, ainda mais patente a constante analogia do nosso methodo de proceder em todos os cazos, supporemos que seja n hum numero qualquer, e $\lambda = 2$; pois que a grandeza de λ de nenhuma sorte altera o referido methodo. Nesta hypotheze pois as nossas Equações de condiçaõ seráõ as duas primeiras series do §. LI, das quaes eliminando d^3P tiraremos as seguintes Equações

$$\left(B^{(n-2)'}E^{(n-3)'} - E^{(n-2)'}B^{(n-3)'}\right)P - \left(C^{(n-2)'}E^{(n-3)'} - E^{(n-2)'}C^{(n-3)'}\right)dP$$
$$+\left(D^{(n-2)'}E^{(n-3)'} - E^{(n-2)'}D^{(n-3)'}\right)ddP = 0$$

$$\left(B^{(n-2)'}E^{(n-4)'} - E^{(n-2)'}B^{(n-4)'}\right)P - \left(C^{(n-2)'}E^{(n-4)'} - E^{(n-2)'}C^{(n-4)'}\right)dP$$
$$+\left(D^{(n-2)'}E^{(n-4)'} - E^{(n-2)'}D^{(n-4)'}\right)ddP = 0$$

$$\left(B^{(n-2)'}E^{(n-5)'} - E^{(n-2)'}B^{(n-5)'}\right)P - \left(C^{(n-2)'}E^{(n-5)'} - E^{(n-2)'}C^{(n-5)'}\right)dP$$
$$+\left(D^{(n-2)'}E^{(n-5)'} - E^{(n-2)'}D^{(n-5)'}\right)ddP = 0$$

- -

- -

$$\left(B^{(n-2)'}E^{3'} - E^{(n-2)'}B^{3'}\right)P - \left(C^{(n-2)'}E^{3'} - E^{(n-2)'}C^{3'}\right)dP$$
$$+\left(D^{(n-2)'}E^{3'} - E^{(n-2)'}D^{3'}\right)ddP = 0$$

$$\left(B^{(n-2)'}E^{2'} - E^{(n-2)'}B^{2'}\right)P - \left(C^{(n-2)'}E^{2'} - E^{(n-2)'}C^{2'}\right)dP$$
$$+\left(D^{(n-2)'}E^{2'} - E^{(n-2)'}D^{2'}\right)ddP = 0$$

$\left(B^{(n-2)'}\right.$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}\overset{1'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{1'}{B}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}\overset{1'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{1'}{C}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}\overset{1'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{1'}{D}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-2)'}{C}_{(1)}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-2)'}{D}_{(1)}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}\overset{(n-3)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-3)'}{B}_{(1)}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}_{(1)}\overset{(n-3)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-3)'}{C}_{(1)}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}_{(1)}\overset{(n-3)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-3)'}{D}_{(1)}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}\overset{(n-4)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-4)'}{B}_{(1)}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}_{(1)}\overset{(n-4)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-4)'}{C}_{(1)}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}_{(1)}\overset{(n-4)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-4)'}{D}_{(1)}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}\overset{(n-5)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-5)'}{B}_{(1)}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}_{(1)}\overset{(n-5)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-5)'}{C}_{(1)}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}_{(1)}\overset{(n-5)'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{(n-5)'}{D}_{(1)}\right)ddP=0$$

- -

- -

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}\overset{3'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{3'}{B}_{(1)}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}_{(1)}\overset{3'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{3'}{C}_{(1)}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}_{(1)}\overset{3'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{3'}{D}_{(1)}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}\overset{2'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{2'}{B}_{(1)}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}_{(1)}\overset{2'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{2'}{C}_{(1)}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}_{(1)}\overset{2'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{2'}{D}_{(1)}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{1'}{B}_{(1)}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{1'}{C}_{(1)}\right)dP$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(1)}-\overset{(n-2)'}{E}_{(1)}\overset{1'}{D}_{(1)}\right)ddP=0$$

em numero de $2n-5$, e que por mais simplicidade escreveremos como se segue.

$$B_{(1)}P - C_{(1)}dP + D_{(1)}ddP = 0$$

$$B_{(2)}P - C_{(2)}dP + D_{(2)}ddP = 0$$

$$B_{(3)}P - C_{(3)}dP + D_{(3)}ddP = 0$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$B_{(n-5)}P - C_{(n-5)}dP + D_{(n-5)}ddP = 0$$

$$B_{(n-4)}P - C_{(n-4)}dP + D_{(n-4)}ddP = 0$$

$$B_{(n-3)}P - C_{(n-3)}dP + D_{(n-3)}ddP = 0$$

$$B'P - C'dP + D'ddP = 0$$

$$B'_{(1)}P - C'_{(1)}dP + D'_{(1)}ddP = 0$$

$$B'_{(2)}P - C'_{(2)}dP + D'_{(2)}ddP = 0$$

$$B'_{(3)}P - C'_{(3)}dP + D'_{(3)}ddP = 0$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$B'_{(n-5)}P - C'_{(n-5)}dP + D'_{(n-5)}ddP = 0$$

$$B'_{(n-4)}P - C'_{(n-4)}dP + D'_{(n-4)}ddP = 0$$

$$B'_{(n-3)}P - C'_{(n-3)}dP + D'_{(n-3)}ddP = 0$$

§. LV.

Eliminando d'estas Equações ddP teremos as seguintes

$$\left(B_{(1)}D_{(2)} - D_{(1)}B_{(2)}\right)P - \left(C_{(1)}D_{(2)} - D_{(1)}C_{(2)}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(3)} - D_{(1)}B_{(3)}\right)P - \left(C_{(1)}D_{(3)} - D_{(1)}C_{(3)}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(4)} - D_{(1)}B_{(4)}\right)P - \left(C_{(1)}D_{(4)} - D_{(1)}C_{(4)}\right)dP = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B_{(1)}D_{(n-5)} - D_{(1)}B_{(n-5)}\right)P - \left(C_{(1)}D_{(n-5)} - D_{(1)}C_{(n-5)}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(n-4)} - D_{(1)}B_{(n-4)}\right)P - \left(C_{(1)}D_{(n-4)} - D_{(1)}C_{(n-4)}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(n-3)} - D_{(1)}B_{(n-3)}\right)P - \left(C_{(1)}D_{(n-3)} - D_{(1)}C_{(n-3)}\right)dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}D' - D_{(1)}B'\right)P - \left(C_{(1)}D' - D_{(1)}C'\right)dP = 0$$

$$\left(B'_{(1)}D' - D'_{(1)}B'\right)P - \left(C'_{(1)}D' - D'_{(1)}C'\right)dP = 0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(2)} - D'_{(1)}B'_{(2)}\right)P - \left(C'_{(1)}D'_{(2)} - D'_{(1)}C'_{(2)}\right)dP = 0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(3)} - D'_{(1)}B'_{(3)}\right)P - \left(C'_{(1)}D'_{(3)} - D'_{(1)}C'_{(3)}\right)dP = 0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(4)} - D'_{(1)}B'_{(4)}\right)P - \left(C'_{(1)}D'_{(4)} - D'_{(1)}C'_{(4)}\right)dP = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B'_{(1)}D'_{(n-5)} - D'_{(1)}B'_{(n-5)}\right)P - \left(C'_{(1)}D'_{(n-5)} - D'_{(1)}C'_{(n-5)}\right)dP = 0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(n-4)} - D'_{(1)}B'_{(n-4)}\right)P - \left(C'_{(1)}D'_{(n-4)} - D'_{(1)}C'_{(n-4)}\right)dP = 0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(n-3)} - D'_{(1)}B'_{(n-3)}\right)P - \left(C'_{(1)}D'_{(n-3)} - D'_{(1)}C'_{(n-3)}\right)dP = 0$$

das

das quaes eliminando $\frac{dP}{P}$ se deduzem a $2n-7$ Equações, que passo a transcrever

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(3)} - \left(B_{(1)}C_{(3)} - C_{(1)}B_{(3)}\right)D_{(2)} + \left(B_{(2)}C_{(3)} - C_{(2)}B_{(3)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(4)} - \left(B_{(1)}C_{(4)} - C_{(1)}B_{(4)}\right)D_{(2)} + \left(B_{(2)}C_{(4)} - C_{(2)}B_{(4)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(5)} - \left(B_{(1)}C_{(5)} - C_{(1)}B_{(5)}\right)D_{(2)} + \left(B_{(2)}C_{(5)} - C_{(2)}B_{(5)}\right)D_{(1)} = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(n-5)} - \left(B_{(1)}C_{(n-5)} - C_{(1)}B_{(n-5)}\right)D_{(2)} + \left(B_{(2)}C_{(n-5)} - C_{(2)}B_{(n-5)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(n-4)} - \left(B_{(1)}C_{(n-4)} - C_{(1)}B_{(n-4)}\right)D_{(2)} + \left(B_{(2)}C_{(n-4)} - C_{(2)}B_{(n-4)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(n-3)} - \left(B_{(1)}C_{(n-3)} - C_{(1)}B_{(n-3)}\right)D_{(2)} + \left(B_{(2)}C_{(n-3)} - C_{(2)}B_{(n-3)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D' - \left(B_{(1)}C' - C_{(1)}B'\right)D_{(2)} + \left(B_{(2)}C' - C_{(2)}B'\right)D'_{(1)} = 0$$

$(B'_{(1)}$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right) D' - \left(B'_{(1)}C' - C_{(1)}B'\right) D'_{(2)} +$$

$$\left(B'_{(2)}C' - C'_{(2)}B'\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(3)} - \left(B'_{(1)}C'_{(3)} - C'_{(1)}B'_{(3)}\right) D'_{(2)} +$$

$$\left(B'_{(2)}C'_{(3)} - C'_{(2)}B'_{(3)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(4)} - \left(B'_{(1)}C'_{(4)} - C'_{(1)}B'_{(4)}\right)D'_{(2)} +$$

$$\left(B'_{(2)}C'_{(4)} - C'_{(2)}B'_{(4)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(5)} - \left(B'_{(1)}C'_{(5)} - C'_{(1)}B'_{(5)}\right)D'_{(2)} +$$

$$\left(B'_{(2)}C'_{(5)} - C'_{(2)}B'_{(5)}\right)D'_{(1)} = 0$$

- -

- -

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(n-5)} - \left(B'_{(1)}C'_{(n-5)} - C'_{(1)}B'_{(n-5)}\right)D'_{(2)}$$

$$+ \left(B'_{(2)}C'_{(n-5)} - C'_{(2)}B'_{(n-5)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(n-4)} - \left(B'_{(1)}C'_{(n-4)} - C'_{(1)}B'_{(n-4)}\right)D'_{(2)}$$

$$+ \left(B'_{(2)}C'_{(n-4)} - C'_{(2)}B'_{(n-4)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(n-3)} - \left(B'_{(1)}C'_{(n-3)} - C'_{(1)}B'_{(n-3)}\right)D'_{(2)}$$

$$+ \left(B'_{(2)}C'_{(n-3)} - C'_{(2)}B'_{(n-3)}\right)D'_{(1)} = 0$$

em que se comprehendem todas as condiçōes, a que no prezente cazo devem satisfazer os coefficientes de *dV*.

§. LVI.

§. LVI.

O Methodo, porque até aqui temos procedido, deixa ver aſſás claramente o que ſe deve praticar em todos os outros cazos, para ſe obterem as Equações de condiçaõ, a que qualquer Funcçaõ Fluxional *V* da ordem *n* deve ſatisfazer, ſe por ventura poder reduzir-ſe a Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional de qualquer ordem inferior a *n*, ſendo multiplicada por hum factor conveniente: e por tanto naõ devemos encher de mais formulas a preſente Memoria, já aſſás longa, e carregada de expreſsões analyticas: muito principalmente quando raras vezes acontecerá, que as queſtões, a que o methodo das Fluxões he applicavel, conduzam a Equações de ordem ſuperior á ſegunda, nem de mais de tres variaveis. Naõ ſerá porém inutil que advirtamos. I. Que huma vez que ſe tenha reconhecido, que a Funcçaõ propoſta *V*, ſuppoſta da ordem *n*, ſe pode reduzir pela multiplicaçaõ de hum factor conveniente a ſer Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da ordem $n-m$; achada eſta, ſobre ella ſe devem praticar os meſmos exames, para que finalmente ſe poſſa obter a Fluente da ordem o. E II. Que para eſta Fluente ſer completa he precizo, que cada huma das Equações de condiçaõ, em que naõ entrarem Fluxões da ordem *n*, ſeja identica por ſi; e que todas as em que entrarem Fluxões da dita ordem ſe tornem identicas ſubſtituindo-ſe em lugar de huma d'eſſas Fluxões o ſeu valor tirado da Equaçaõ $V=o$. Naõ ſe verificando eſta identidade a Funcçaõ propoſta *V* naõ admitirá Fluente completa; poderá com tudo admitir huma ou mais Fluentes particulares, ſe as noſſas Equações de condiçaõ, a pezar de naõ ſerem identicas, tiverem lugar ao meſmo tempo, que a Equacaõ $V=o$. Em todos os outros cazos a Funcçaõ *V* naõ admitirá fluente nem completa nem particular, e por tanto a Equaçaõ $V=o$ ſerá impoſſivel, iſto he, naõ admitirá Fluente alguma por eſte methodo; o que exprimiremos chamando-lhe imaginaria.

SECÇAÕ IV.

Applicaçaõ das Formulas precedentes ás Equações Fluxionaes de diverſas ordens.

§. LVII.

SEja V huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem, que involva ſómente duas variaveis x, e y; iſto he, ſeja

$$V = A\,dx + B\,dy = 0$$

tal porém que V naõ ſeja Fluxaõ exacta, e ſupponhamos que, ſendo multiplicada por hum factor conveniente P, fique ſendo

$$PV = dZ.$$

Para que eſta ſuppoſiçaõ ſe verifique, será precizo que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ as Equações de condiçaõ do §. XLII., as quaes neſte cazo ſe reduzem ſómente a huma

$$N^{2'}(P^{1'} - dP^{2'}) - P^{2'}(N^{1'} - dN^{2'}) = 0$$

que pela ſubſtituiçaõ dos valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $P^{1'}$; e $P^{2'}$; ſe converte em

$$A\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx - B\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy = 0$$

Equaçaõ, que ſendo devidida por $\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)$, ſe reduz á meſma propoſta

$$Adx + Bdy = 0$$

o que nos moſtra, que naõ ha Equaçaõ alguma Fluxional da primeira ordem, em que entrem ſómente duas variaveis, a qual, ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſe naõ

naõ poſſa reduzir a Fluxaõ exacta; por iſſo que a ſuppoſta condiçaõ he rigoroſamente a meſma Equaçaõ propoſta.

§. LVII.

Sendo $V = Adx + Bdy + Cdz = 0$, e conſervando todas as ſuppoſições do §. antecedente, as Equações de condiçaõ, a que os coefficientes de dV devem ſatisfazer; ſaõ

$$N^{2\prime}(P^{1\prime} - dP^{2\prime}) - P^{2\prime}(N^{1\prime} - dN^{2\prime}) = 0$$

$$P^{2\prime}(Q^{1\prime} - dQ^{2\prime}) - Q^{2\prime}(P^{1\prime} - dP^{2\prime}) = 0$$

as quaes pela ſubſtituiçaõ dos valores de $N^{1\prime}$; $N^{2\prime}$; $P^{1\prime}$; $P^{2\prime}$; $Q^{1\prime}$; e $Q^{2\prime}$ ſe reduzem a

$$A\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right)dz\right) - B\left(\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy + \left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}\right)dz\right) = 0$$

$$B\left(\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right)dx + \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right)dy\right) - C\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right)dz\right) = 0$$

e huma e outra, ſubſtituindo nellas por dy o ſeu valor tirado da propoſta, ſe convertem em

$$A\left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) = 0.$$

§. LIX.

Sendo $V = Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$, as Equações de condiçaõ, a que os coefficientes de dV devem ſatisfazer, para que V poſſa reduzirſe a Fluxaõ exacta ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſaõ

$$N^{2}(P^{1\prime} - dP^{2\prime}) - P^{2\prime}(N^{1\prime} - dN^{2\prime}) = 0$$

$N^{2\prime}$

$$P^{2'}(Q^{1'} - dQ^{2'}) - Q^{2'}(P^{1'} - dP^{2'}) = 0$$

$$Q^{2'}(R^{1'} - dR^{2'}) - R^{2'}(Q^{1'} - dQ^{2'}) = 0$$

as quaes, ſubſtituindo em lugar de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $P^{1'}$; $P^{2'}$; $Q^{1'}$; $Q^{2'}$; $R^{1'}$; e $R^{2'}$; os ſeus valores tirados da Fluxaõ de V, ſe convertem em

$$A\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right) dz + \left(\frac{dD}{dy} - \frac{dB}{du}\right) du\right)$$

$$- B\left(\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right) dy + \left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}\right) dz + \left(\frac{dD}{dx} - \frac{dA}{du}\right) du\right) = 0$$

$$B\left(\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) dx + \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) dy + \left(\frac{dD}{dz} - \frac{dC}{du}\right) du\right)$$

$$- C\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right) dz + \left(\frac{dD}{dy} - \frac{dB}{du}\right) du\right) = 0$$

$$C\left(\left(\frac{dA}{du} - \frac{dD}{dx}\right) dx + \left(\frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy}\right) dy + \left(\frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz}\right) dz\right)$$

$$- D\left(\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) dx + \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) dy + \left(\frac{dD}{dz} - \frac{dC}{du}\right) du\right) = 0$$

e ſubſtituindo por dy na primeira, por dz na ſegunda, e por du na terceira os ſeus valores tirados da Equaçaõ $V = 0$, ellas ſe reduzem a

$$\left(A\left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)\right) dz$$

$$+ \left(A\left(\frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{du} - \frac{dD}{dx}\right) + D\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)\right) du = 0$$

$$\left(A\left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)\right) dx$$

+

$$+\left(B\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)+D\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)\right)du=0$$

$$\left(A\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx}\right)+D\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)\right)dx$$

$$+\left(B\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)+D\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)\right)dy=0$$

Equaçőes, que por iſſo que devem ſer identicas, e que nas quantidades, que ſe achaő entre os parenthezes, naő entraő as Fluxões dx, dy, dz, e du, nos daő as ſeguintes quatro Equaçőes de condiçaő

$$A\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)-B\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)+C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)-B\left(\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx}\right)+D\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx}\right)+D\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)+D\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)=0$$

que rigoroſamente ſe reduzem ás tres primeiras; por quanto a 4.ª ſe deduz das antecedentes multiplicando a 3.ª por B, a 2.ª por C, e a 1.ª por D; tirando o ſegundo producto do primeiro, e ſubſtituindo no reſto em lugar dos ultimos dois termos, que ſaő $DB\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)-DC\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)$, o ſeu valor $DA\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)$ tirado do ultimo producto, e devidindo o reſultado por A.

§. LX.

Se na Formula $Adx + Bdy + Cdz = 0$ do §. LVIII ſuppoſermos $A = 1$; o que equivale a ſuppor toda a Equaçaõ devidida pelo coefficiente do primeiro termo, e que B fica repreſentando o novo coefficiente do ſegundo, e C o novo coefficiente do terceiro: entaõ a Equaçaõ ſeria

$$dx + Bdy + Cdz = 0$$

e a Equaçaõ de condiçaõ, que deverá verificar-ſe, para que ella poſſa reduzir-ſe a Fluxaõ exacta, ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſerá

$$B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} = 0$$

§. LXI.

Fazendo huma ſemelhante ſuppoſiçaõ na Formula do §. LIX, teremos em logar da Equaçaõ allí propoſta

$$dx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$$

e as Equações de condiçaõ, a que os ſeus coefficientes deveráõ ſatisfazer, para que ella poſſa reduzir-ſe a Fluxaõ exacta, ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſeráõ

$$B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} = 0$$

$$B\frac{dD}{dx} - D\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy} = 0$$

$$C\frac{dD}{dx} - D\frac{dC}{dx} + \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} = 0$$

Equações, que ſaõ as meſmas, que M. Fontaine achou por outro muito differente caminho no ſeu primeiro Methodo do Calculo Integral, e que aſſim deduzidas dos principios

de

de M. de Condorcet poderiaõ juntamente com as outras, que por ſemelhante modo hiremos deduzindo nos §§. ſeguintes, tirar ao meſmo Fontaine da duvida, em que parecia eſtar, de ſerem ou naõ eſtes principios ſufficientes para reſolver o Problema, que elle ennuncia na ſua Memoria impreſſa na Collecçaõ da Academia das Sciencias de Pariz no volume do anno de 1767, e para cuja ſoluçaõ convidava Condorcet.

§. LXII.

Sendo $V = Addx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$, e naõ ſendo Fluxaõ exacta de Funcçaõ alguma da ordem 0, mas ſim huma expreſſaõ tal que multiplicada por hum factor conveniente P fique

$$PV = ddZ$$

entaõ ſerá precizo, que os coefficientes de dV ſatisfáçaõ ás Equaçóes de condiçaõ do §. XLII, as quaes neſte cazo ſe reduzem ás tres ſeguintes

$$2N^{3\prime}(2N^{1\prime} - dN^{2\prime}) - N^{2\prime}(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}) = 0$$

$$N^{3\prime}(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}) - P^{3\prime}(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}) = 0$$

$$2P^{3\prime}(2P^{1\prime} - dP^{2\prime}) - P^{2\prime}(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}) = 0$$

Equaçóes, que ſubſtituindo em logar de $N^{1\prime}$; $N^{2\prime}$; $N^{3\prime}$; $P^{1\prime}$; $P^{2\prime}$; e $P^{3\prime}$; os ſeus valores tirados da Fluxaõ de V, ſe convertem em

$$4A\left(\frac{dA}{dx} - C\right)ddx + 4A\left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}E\right)ddy + 4C\left(\frac{dA}{dx} - C\right)dx^2$$

$$+ 4\left(A\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy^2 - 4\left(A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}E\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + C\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)dxdy = 0$$

$$2\Big(A(D - \frac{dB}{dy}) - B(\frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy})\Big) dy - 2\Big(B(C - \frac{dA}{dx})$$

$$- A(\frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx})\Big) dx = 0$$

$$4B\Big(\frac{dB}{dy} - D\Big)ddy + 4B\Big(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{2} E\Big)ddx + 4D\Big(\frac{dB}{dy} - D\Big)dy^2$$

$$+ 4\Big(B(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}) - \frac{1}{2} E(\frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx})\Big)dx^2 - 4\Big(B(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dF}{dy})$$

$$+ \frac{1}{2} E(D - \frac{dB}{dy}) + D(\frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx})\Big) dxdy = 0$$

Devidindo a 1.ª, e a 3.ª por 4, e a 2.ª por 2; ſubſtituindo na 1.ª o valor de *ddx* tirado da propoſta, e na 3.ª o valor de *ddy* tirado da meſma proproſta, ellas ſe converteráõ em

$$\Big(B(C - \frac{dA}{dx}) - A(\frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx})\Big) ddy + \Big(A(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy})$$

$$- \frac{1}{2} E(\frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy}) + D(C - \frac{dA}{dx})\Big) dy^2 - \Big(A(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx})$$

$$- \frac{1}{2} E(C - \frac{dA}{dx}) + C(\frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy})\Big) dxdy = 0$$

$$\Big(A(D - \frac{dB}{dy}) - B(\frac{1}{2} E - \frac{dA}{dx})\Big) dy + \Big(B(C - \frac{dA}{dx})$$

$$- A(\frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx})\Big) dx = 0$$

$$\Big(A(D - \frac{dB}{dy}) - B(\frac{1}{2} E - \frac{dA}{dy})\Big) ddx + \Big(B(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx})$$

$$- \frac{1}{2} E(\frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx}) + C(D - \frac{dB}{dy})\Big) dx^2 - \Big(B(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy})$$

$$- \frac{1}{2} E(D - \frac{dB}{dy}) + D(\frac{1}{2} E - \frac{dB}{dx})\Big) dxdy = 0$$

Equa-

Equações que devendo ser identicas daõ as seguintes seis, a que os coefficientes da proposta devem satisfazer

$$B\left(C-\frac{dA}{dx}\right)-A\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$A\left(D-\frac{dB}{dy}\right)-B\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right)-\frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)+D\left(C-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)-\frac{1}{2}E\left(C-\frac{dA}{dx}\right)+C\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)-\frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)+C\left(D-\frac{dB}{dy}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right)-\frac{1}{2}E\left(D-\frac{dB}{dy}\right)+D\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

das quaes sómente as duas primeiras exprimem condições realmente destinctas; por quanto a terceira e a quinta se obtem, tomando a somma e a differença da Fluxaõ parcial da primeira relativamente a y devidida por dy, e da Fluxaõ parcial da segunda relativamente a x devidida por dx, fazendo em huma e outra das Equações, que por este modo se achaõ, em lugar de $\frac{dA}{dx}$; $\frac{dB}{dx}$; $\frac{dA}{dy}$; $\frac{dB}{dy}$; e $\frac{ddA}{dxdx}$ as convenientes substituições dos seus valores tirados das mesmas duas primeiras. A quarta, e a sexta se obtem substituindo na terceira e quinta em lugar de $\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)$; $\left(C-\frac{dA}{dx}\right)$; $\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)$; e $\left(D-\frac{dB}{dy}\right)$ os seus valores tirados tambem das duas primeiras.

§. LXIII.

Sendo $V = Addx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$, e conservando todas as supposições do §. antecedente; as Equações de condição, a que os coefficientes de dV devem satisfazer, saõ

$$2N^{3\prime}(2N^{1\prime} - dN^{2\prime}) - N^{2\prime}(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}) = 0$$

$$N^{3\prime}(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}) - P^{3\prime}(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}) = 0$$

$$2P^{3\prime}(2P^{1\prime} - dP^{2\prime}) - P^{2\prime}(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}) = 0$$

$$P^{3\prime}(Q^{2\prime} - 2dQ^{3\prime}) - Q^{3\prime}(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}) = 0$$

$$2Q^{3\prime}(2Q^{1\prime} - dQ^{2\prime}) - Q^{2\prime}(Q^{2\prime} - 2dQ^{3\prime}) = 0$$

as quaes substituindo em lugar de $N^{1\prime}$; $N^{2\prime}$; $N^{3\prime}$; $P^{1\prime}$; $P^{2\prime}$; $P^{3\prime}$; $Q^{1\prime}$; $Q^{2\prime}$; e $Q^{3\prime}$ os seus valores tirados da Fluxaõ de V se convertem em

$$4A\left(\frac{dA}{dx} - D\right)ddx + 4A\left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}G\right)ddy + 4A\left(\frac{dC}{dx} - \frac{1}{2}H\right)ddz$$

$$- 4D\left(D - \frac{dA}{dx}\right)dx^2 + 4\left(A\left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right) - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy^2$$

$$+ 4\left(A\left(\frac{dF}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right)\right)dz^2 - 4\left(A\left(\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}G\left(D - \frac{dA}{dy}\right) + D\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dxdy - 4\left(A\left(\frac{dD}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}H\left(D - \frac{dA}{dx}\right) + D\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right)\right)dxdz + 4\left(A\left(\frac{dI}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dydz = 0$$

2

$$2\left(A(E-\frac{dB}{dy})-B(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\right)dy-2\left(B(D-\frac{dA}{dx})\right.$$

$$\left.-A(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\right)dx+2\left(A(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})-B(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})\right)dz=0$$

$$4B\left(\frac{dB}{dy}-E\right)ddy+4B\left(\frac{dA}{dy}-\frac{1}{2}G\right)ddx+4B\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}I\right)ddz$$

$$-4E\left(E-\frac{dB}{dy}\right)dy^2+4\left(B(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx})-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\right)dx^2$$

$$+4\left(B(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\right)dz^2-4\left(B(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}G(E-\frac{dB}{dy})+E(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\right)dxdy-4\left(B(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}I(E-\frac{dB}{dy})+E(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\right)dydz+4\left(B(\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\right)dxdz=0$$

$$2\left(B(F-\frac{dC}{dz})-C(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\right)dz-2\left(C(E-\frac{dB}{dy})\right.$$

$$\left.-B(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\right)dy+2\left(B(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})-C(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\right)dx=0$$

$$4C\left(\frac{dC}{dz}-F\right)ddz+4C\left(\frac{dA}{dz}-\frac{1}{2}H\right)ddx+4C\left(\frac{dB}{dz}-\frac{1}{2}I\right)ddy$$

$$-4F\left(F-\frac{dC}{dz}\right)dz^2+4\left(C(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx})-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\right)dx^2$$

$$+4\left(C(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\right)dy^2-4\left(C(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz})\right.$$

$$+\frac{1}{2}H(F-\frac{dC}{dz})+F(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)dxdz-4\left(C(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz})\right.$$

+

$$+\frac{1}{2}I(F-\frac{dC}{dz})+F(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)dydz+4\Big(C(\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx})$$

$$-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)dxdy=0$$

Devidindo a 1.ª, a 3.ª, e a 5.ª d'eſtas Equações pelo numero 4; e a 2.ª, e 4.ª pelo numero 2; e ſubſtituindo por ddx na 1.ª, por ddy na 3.ª; e por ddz na 5.ª os ſeus valores, tirados da propoſta $V=0$, ellas ſe convertem em

$$\Big(B(D-\frac{dA}{dx})-A(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)ddy+\Big(C(D-\frac{dA}{dx})$$

$$-A(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)ddz+\Big(A(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy})-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})$$

$$+E(D-\frac{dA}{dx})\Big)dy^2+\Big(A(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz})-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})$$

$$+F(D-\frac{dA}{dx})\Big)dz^2-\Big(A(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx})-\frac{1}{2}G(D-\frac{dA}{dx})$$

$$+D(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\Big)dxdy-\Big(A(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx})-\frac{1}{2}H(D-\frac{dA}{dx})$$

$$+D(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})\Big)dxdz+\Big(A(\frac{dI}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy})$$

$$-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})+I(D-\frac{dA}{dx})\Big)dydz=0$$

$$\Big(A(E-\frac{dB}{dy})-B(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\Big)dy-\Big(B(D-\frac{dA}{dx})$$

$$-A(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dx+\Big(A(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})-B(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})\Big)dz=0$$

$$\Big(A(E-\frac{dB}{dy})-B(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\Big)ddx+\Big(C(E-\frac{dB}{dy})$$

$$-B(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)ddz+\Big(B(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx})-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})$$

+

$$+D(E-\frac{dB}{dy})\Big)dx^2+\Big(B(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})$$

$$+F(E-\frac{dB}{dy})\Big)dz^2-\Big(B(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy})-\frac{1}{2}G(E-\frac{dB}{dy})$$

$$+E(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dxdy-\Big(B(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy})-\frac{1}{2}I(E-\frac{dB}{dy})$$

$$+E(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\Big)dydz+\Big(B(\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx})$$

$$-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})+H(E-\frac{dB}{dy})\Big)dxdz=0$$

$$\Big(B(F-\frac{dC}{dz})-C(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\Big)dz-\Big(C(E-\frac{dB}{dy})$$

$$-B(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)dy+\Big(B(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})-C(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dx=0$$

$$\Big(A(F-\frac{dC}{dz})-C(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})\Big)ddx+\Big(B(F-\frac{dC}{dz})$$

$$-C(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\Big)ddy+\Big(C(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx})-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})$$

$$+D(F-\frac{dC}{dz})\Big)dx^2+\Big(C(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})$$

$$+E(F-\frac{dC}{dz})\Big)dy^2-\Big(C(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz})-\frac{1}{2}H(F-\frac{dC}{dz})$$

$$+F(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)dxdz-\Big(C(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz})-\frac{1}{2}I(F-\frac{dC}{dz})$$

$$+F(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)dydz+\Big(C(\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx})$$

$$-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})+G(F-\frac{dC}{dz})\Big)dxdy=0$$

Equações, que devendo ser identicas nos daõ as seguintes

condições expressadas nas 23 Equações, que passamos a transcrever.

$$B\left(D-\frac{dA}{dx}\right)-A\left(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$C\left(D-\frac{dA}{dx}\right)-A\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$A\left(E-\frac{dB}{dy}\right)-B\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$C\left(E-\frac{dB}{dy}\right)-B\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)=0$$

$$A\left(F-\frac{dC}{dz}\right)-C\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)=0$$

$$B\left(F-\frac{dC}{dz}\right)-C\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)=0$$

$$A\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)-B\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)=0$$

$$B\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)-C\left(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)+E\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)+F\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right)-\frac{1}{2}G\left(D-\frac{dA}{dx}\right)+D\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(D-\frac{dA}{dx}\right)+D\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx}\right)+D\left(E-\frac{dB}{dy}\right)=0$$

B

$$B\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)+F\left(E-\frac{dB}{dy}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(E-\frac{dB}{dy}\right)+E\left(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(E-\frac{dB}{dy}\right)+E\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+D\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)+E\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dI}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)+I\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx}\right)+H\left(E-\frac{dB}{dy}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+G\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

das quaes ſómente as ſeis primeiras exprimem condiçõés realmente deſtinctas, por ſerem todas as outras conſequencias derivadas d'ellas, como he facil de ver, principalmente attendendo ao que em circunſtancias ſemelhantes diſſemoś no fim do §. antecedente.

§. LXIV.

Reflectindo em todo o proceſſo dos calculos executados em os dois §.§. precedentes, e attendendo á dependencia reciproca das Equaçóes de condiçaó alli achadas, facilmen-

mente veremos: 1.° Que o nosso Methodo conduz a Equações de condiçaõ superabundantes, o que sería facil de prever depois das refloxões que fizemos, e das conclusões que tirámos em os §.§. XXIII, e XXIV. 2.° Que por huma immediata consequencia das ditas conclusões para se reconhecer se huma Equaçaõ Fluxional qualquer da segunda ordem de duas, ou mais variaveis, em que se naõ suppôs Fluxaõ alguma constante, se póde reduzir a ser Fluxaõ segunda exacta de huma Funcçaõ da ordem o, bastará examinar se ella satisfaz ás Equações de condiçaõ, que na ordem, por que se achaõ escritas nos §.§. LXII, e LXIII, occupaõ os lugares pares; isto he, bastará verificar as Equações

$$N^{3'}(P^{2'} - 2dP^{3'}) - P^{3'}(N^{2'} - 2dN^{3'}) = o$$

$$P^{3'}(Q^{2'} - 2dQ^{3'}) - Q^{3'}(P^{2'} - 2dP^{3'}) = o$$

&c.

3.° Que para o mesmo effeito bastaria tambem verificar sómente as Equações de condiçaõ, que nos mencionados §.§. occupaõ os lugares impares. E 4.° finalmente que supposto por este modo se haja de attender a huma Equaçaõ mais, do que verificando as dos lugares pares, nem por isso o trabalho de cálculo será maior; por quanto basta que nestas Equações se calculem os termos, que deverem ser multiplicados pelas segundas Fluxões das variaveis, que entrarem na Funcçaõ proposta. Por meio d'estas advertencias se achará com summa facilidade, que sendo

$$V = Addx + Bddy + Cddz + Dddu + Edx^2 + Fdy^2 + Gdz^2 + Hdu^2$$
$$+ Idxdy + Kdxdz + Ldxdu + Mdydz + Ndydu + Odzdu = o$$

huma Equaçaõ Fluxional da segunda ordem, e de quatro variaveis, para que se possa reduzir a Fluxaõ segunda exacta de huma Funcçaõ da ordem o, sendo multiplicada por hum factor conveniente para esse effeito, os coefficientes

de

de dV deveraõ ſatisfazer ás ſeguintes 12 Equações de condiçaõ

$$B\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dx}\right) = 0$$

$$C\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2} K - \frac{dC}{dx}\right) = 0$$

$$D\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2} L - \frac{dD}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2} I - \frac{dA}{dy}\right) = 0$$

$$C\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2} M - \frac{dC}{dy}\right) = 0$$

$$D\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2} N - \frac{dD}{dy}\right) = 0$$

$$A\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} K - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

$$B\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} M - \frac{dB}{dz}\right) = 0$$

$$D\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} O - \frac{dD}{dz}\right) = 0$$

$$A\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2} L - \frac{dA}{du}\right) = 0$$

$$B\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2} N - \frac{dB}{du}\right) = 0$$

$$B\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2} O - \frac{dC}{du}\right) = 0$$

que por outro qualquer dos methodos conhecidos ſe naõ poderiaõ obter ſem muito enfadonho trabalho. Seguindo hum procedimento analogo ſe poderaõ determinar, quando ſeja preciſo, as condições relativas ás Equações Fluxionaes

da ſegunda ordem de hum maior numero de variaveis, podendo desde já concluir-ſe, que ſendo p o número das variaveis, ſerá $p - 1$ o numero das Equações dadas pelo noſſo methodo, e $p(p-1)$ o numero total das Equações analogas ás precedentes, que das noſſas ſe derivaõ.

§. LXV.

Se na Equaçaõ Fluxional do §. LXII ſuppoſermos $A = 1$, ella ſe reduzirá a

$$ddx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$$

e as Equações a que ella, conſiderada debaixo d'eſta fórma, deverá ſatisfazer, para que poſſa reduzir-ſe a Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, ſeraõ

$$BC - \frac{1}{2}E + \frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}BE - D + \frac{dB}{dy} = 0$$

§. LXVI.

Semelhantemente ſe na Equaçaõ do §. LXIII fizermos a meſma ſuppoſiçaõ de $A = 1$, as ſeis Equações de condiçaõ, a que a propoſta

$$ddx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

deverá ſatisfazer, para que multiplicada por hum factor conveniente ſe poſſa reduzir a ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, ſaõ

$$BD - \frac{1}{2}G + \frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2} BG - E + \frac{dB}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{2} BH - \frac{1}{2} I + \frac{dB}{dz} = 0$$

$$CD - \frac{1}{2} H + \frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2} CG - \frac{1}{2} I + \frac{dC}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{2} CH - F + \frac{dC}{dy} = 0$$

§. LXVII.

Se na Formula do §. LXII se suppoem dy constante, entaõ, sendo $ddy = 0$, ella se reduz a

$$V = Addx + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$$

e para que possa converter-se em Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, sendo multiplicada por hum factor conveniente para esse effeito, os coefficientes de dV deveráõ satisfazer á primeira das tres Equações de condiçaõ alli expressadas, isto he, deveráõ satisfazer á Equaçaõ

$$2\overset{3'}{N}\left(2\overset{1'}{N} - d\overset{2'}{N}\right) - \overset{2'}{N}\left(\overset{2'}{N} - d\overset{3'}{N}\right) = 0$$

por quanto, naõ se conhecendo o valor de $\overset{3'}{P}$, nenhuma das outras póde ter lugar. Desta se derivaõ pela substituiçaõ dos valores de $\overset{1'}{N}$; $\overset{2'}{N}$; e $\overset{3'}{N}$, e do valor de ddx tirado da proposta as duas seguintes, a que a mesma proposta deve satisfazer.

A

$$A\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right)-\frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)+D\left(C-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)-\frac{1}{2}E\left(C-\frac{dA}{dx}\right)+C\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

Equações que tambem ſe poderiaõ achar ſem dependencia de novos calculos, excluindo das ſeis do §. LXII todas as em que entra a quantidade B, cujo valor neſte caſo ſe ignora.

§. LXVIII.

Semelhantemente ſe na Formula do §. LXIII ſuppoſermos dy conſtante, a Equaçaõ Fluxional alli propoſta ſe reduzirá a

$$V = Addx + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

e para que poſſa reduzir-ſe a Fluxaõ ſegunda exacta de huma Funcçaõ da ordem o, deverá ſatisfazer á primeira, e á ultima das cinco Equações alli expreſſadas; por iſſo que em todas as outras entra $P^{3'}$, quantidade que neſte caſo ſe naõ conhece. Subſtituindo pois em as duas Equações

$$2N^{3'}(2N^{1'}-dN^{2'})-N^{2'}(N^{2'}-2dN^{3'})=0$$

$$2Q^{3'}(2Q^{1'}-dQ^{2'})-Q^{2'}(Q^{2'}-2dQ^{3'})=0$$

os valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $N^{3'}$; $P^{1'}$; $P^{2'}$; $P^{3'}$, e os valores de ddx, e ddz tirados da propoſta, ſe derivaõ as ſeguintes 12 Equações de condiçaõ

$$C\left(D-\frac{dA}{dx}\right)-A\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$A\left(F-\frac{dC}{dz}\right)-C\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)=0$$

A

$$A\left(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)+E\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)+F\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right)-\frac{1}{2}G\left(D-\frac{dA}{dx}\right)+D\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(D-\frac{dA}{dx}\right)+D\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+D\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)+E\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dI}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)+I\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+G\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

a que a mesma proposta deve satisfazer, e das quaes sómente a 1.ª; a 2.ª; a 3.ª; a 5.ª; a 8.ª; e a 10.ª exprimem condições realmente differentes, sendo assim o número d'estas o mesmo que no caso, em que se naõ suppunha Fluxaõ alguma constante.

§. LXIX.

Se na Formula do §. LXVII suppozermos $A=1$; o que equivale a suppôr toda a Equaçaõ devidida pelo coeffi-

 cien-

ciente de ddx, entaõ as duas Equações de condiçaõ alli expreſſadas ſe reduzem a

$$\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx} = 0$$

$$DC - \frac{1}{4}E^2 + \frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy} = 0$$

E ſe na Formula do §. LXVIII fizermos a meſma ſuppoſiçaõ as ſeis Equações alli tranſcritas, que exprimem condições realmente differentes, ſe reduzem a

$$CD - \frac{1}{2}H + \frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}CH - F + \frac{dC}{dz} = 0$$

$$\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dx} = 0$$

$$DE - \frac{1}{4}G^2 + \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dy} = 0$$

$$C\left(\frac{dE}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right) - \frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I - \frac{dC}{dy}\right) + E\left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

$$C\left(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right) - \frac{1}{2}I\left(F - \frac{dC}{dz}\right) + F\left(\frac{1}{2}I - \frac{dC}{dy}\right) = 0$$

e com effeito a Equaçaõ

$$ddx + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

conſiderando y como conſtante, eſtá no caſo do §. LXV; e por tanto como Funcçaõ de x, e z deve ſatisfazer ás primeiras duas Equações das ſeis aqui expreſſadas, conſiderando z como conſtante, eſtá no caſo primeiramente conſiderado neſte meſmo §.; e por tanto como Funcçaõ de x, e y deve ſatisfazer á terceira, e quarta d'eſtas meſmas Equações:

ções: e finalmente considerando x como constante, está no caso do §. LXVII; e por consequencia como Funcçaõ de y, e z deve satisfazer ás duas ultimas.

§. LXX.

A supposiçaõ de huma variavel uniformemente fluente nas Funcções Fluxionaes da segunda ordem, quando pertendemos indagar, se ellas saõ Fluxões exactas de outras Funcções da ordem o, nos despensa, como acabamos de ver, de verificar aquella das nossas Equações de condiçaõ de lugar impar, que he relativa á variavel, cuja primeira Fluxaõ se suppôs constante; mas como no §. LXIV advertimos, que naõ suppondo Fluxaõ alguma constante, a verificaçaõ das nossas Equações absolutamente necessarias se reduz a calcular sómente as Equações, que pela ordem, por que nós as escrevemos, occupaõ os lugares pares, ou a calcular meramente nas que occupaõ os lugares impares os termos, em que deverão entrar Fluxões segundas, fica ao arbitrio do calculador, que tiver de proceder a huma semelhante indagaçaõ sobre huma Funcçaõ Fluxional da segunda ordem, em que se tenha supposto huma primeira Fluxaõ constante, o tratalla neste estado, ou reduzilla primeiro a outra, em que naõ haja Fluxaõ alguma constante. A sua sagacidade, e o uso de calcular lhe dictaráõ nos casos occorrentes o que mais lhe convem para a brevidade dos seus calculos: a nós sómente nos toca expôr em toda a sua generalidade os meios, de que elle póde servir-se em todos os casos imaginaveis.

§. LXXI.

Se a Equaçaõ Fluxional

$$V = Addx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = o$$

que suppomos naõ ser Fluxaõ exacta de Funcçaõ alguma de or-

ordem inferior, poder com tudo reduzir-ſe a Fluxaõ exácta de huma Funcçaõ da primeira ordem, ſendo multiplicada por hum Factor conveniente, entaõ os coefficientes de dV deveráõ ſatisfazer á Equaçaõ

$$\left(B^{1\prime}C^{2\prime}-C^{1\prime}B^{2\prime}\right)D^{3\prime}-\left(B^{1\prime}C^{3\prime}-C^{1\prime}B^{3\prime}\right)D^{2\prime}+\left(B^{2\prime}C^{3\prime}-C^{2\prime}B^{3\prime}\right)D^{1\prime}=0$$

que no §. XLV achamos expreſſar as condiçóes neceſſarias para eſte effeito. Porém a ſua transformaçaõ em Funcçaõ dos coefficientes de dV, e das Fluxões parciaes d'elles, ſobre naõ ſer abſolutamente neceſſaria para o fim indicado, nos conduziria a calculos taõ extenſos, e complicados, que julgamos por melhor omittillos, e ſubſtituir-lhes algumas conſideraçóes geraes, que moſtrando-nos a inutilidade de ſerem praticados por extenſo nos façaõ ao meſmo tempo conhecer, que parte d'eſte trabalho baſtará executar para chegar ao fim propoſto.

Recorrendo ao §. XLV, aonde expozemos a analyſe da noſſa ſoluçaõ do Problema de achar o criterio proprio para reconhecer ſe huma Funcçaõ Fluxional qualquer da ſegunda ordem, que involva duas variaveis, e que naõ ſeja Fluxaõ exacta de nenhuma outra da primeira ordem, ſe póde reduzir a que o ſeja, ſendo multiplicada por hum factor P conveniente para eſſe effeito, facilmente veremos

1.° Que na Equaçaõ

$$\left(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}\right)P-\left(C^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}C^{2\prime}\right)dP=0$$

depois de feita a ſubſtituiçaõ do valor de ddx tirado da propoſta naõ podem exiſtir ſenaõ termos multiplicados por ddy, termos multiplicados por dx^2, termos multiplicados por dy^2, e termos multiplicados por $dxdy$.

2.° Que ſendo P Funcçaõ de x, e y, e naõ entrando em $C^{1\prime}$, $C^{2\prime}$, e dP ſenaõ as Fluxões primeiras de x, e y, os termos multiplicados por ddy ſe naõ comprehendem na parte $\left(C^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}C^{2\prime}\right)dP$ da meſma Equaçaõ; o que he o meſ-

mesmo que dizer, que elles se comprehendem sómente na parte $\left(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}\right)P$.

3.° Que pela natureza do Methodo directo das Fluxões sendo

$$B^{3\prime}=d\left(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}\right)$$

o coefficiente de d^3y em $B^{3\prime}$ será o mesmo que o de ddy em $B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}$.

4.° Que em nenhum dos termos da Equaçaõ

$$B^{3\prime}P-C^{3\prime}dP+D^{3\prime}ddP=0$$

além do primeiro se póde achar d^3y.

5.° Que por consequencia só na parte $\left(D^{2\prime}C^{1\prime}-C^{2\prime}D^{1\prime}\right)B^{3\prime}$ da Equaçaõ final

$$\left(B^{1\prime}C^{2\prime}-C^{1\prime}B^{2\prime}\right)D^{3\prime}-\left(B^{1\prime}C^{3\prime}-C^{1\prime}B^{3\prime}\right)D^{2\prime}+\left(B^{2\prime}C^{3\prime}-C^{2\prime}B^{3\prime}\right)D^{1\prime}=0$$

se podem achar termos, em que entre d^3y.

6.° Que o coefficiente de d^3y na mesma Equaçaõ final será o mesmo que o de ddy em $\left(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}\right)$, só com a differença de se achar multiplicado por $D^{3\prime}$.

7.° Que devendo ser identica a Equaçaõ final, e naõ sendo $D^{3\prime}=0$, o coefficiente de ddy em $B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}$ igualado a cifra deve dar huma das condições, a que a proposta $V=0$ deve satisfazer.

Ora lembrando-nos que he

$$B^{1\prime}=N^{1\prime}-dN^{2\prime}+ddN^{3\prime}$$

$$B^{2\prime}=P^{1\prime}-dP^{2\prime}+ddP^{3\prime}$$

$$D^{1\prime}=N^{3\prime}$$

$$D^{2\prime}=P^{3\prime}$$

e attendendo aos valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $N^{3'}$; $P^{1'}$; $P^{2'}$; e $P^{3'}$, he evidente 1.° Que a Equaçaõ, que resulta de igualar a cifra o coefficiente de ddy na expressaõ $B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}$, exprimirá a relaçaõ, que entre si devem ter todos os coefficientes A, B, C, D, e E da proposta, para que sendo multiplicada por hum factor conveniente, possa reduzir-se a ser Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da primeira ordem. E 2.° Que naõ podendo os coefficientes dos termos da Equaçaõ final do §. XLV expressar outras relações entre os coefficientes dos termos da proposta, e suas Fluxões parciaes, senaõ a já mencionada, ou relações derivadas d'esta, ella expressará a condiçaõ unica, a que a mesma proposta deve satisfazer.

Calculando pois na conformidade d'estas reflexões o coefficiente de ddy em $B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}$ acharemos, que a condiçaõ unica, a que a proposta deve satisfazer, he a que exprime a seguinte Equaçaõ:

$$B^2\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + AB\left(\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - E\right) + A^2\left(D - \frac{dB}{dy}\right) = 0$$

§. LXXII.

Querendo indagar as condições, a que a Equaçaõ

$$V = Addx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

deve satisfazer, para que sendo multiplicada por hum factor conveniente P, se possa reduzir a Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da primeira ordem, entaõ, segundo demonstramos em o §. XLIII, os coefficientes de dV deveráõ satisfazer ás seguintes tres Equações

$$(N^{1'} - dN^{2'} + ddN^{3'})P - (N^{2'} - 2dN^{3'})dP + N^{3'}ddP = 0$$

$(P^{1'}$

$$\left(P^{1\prime} - dP^{2\prime} + ddP^{3\prime}\right) P - \left(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}\right) dP + P^{3\prime} ddP = 0$$

$$\left(Q^{1\prime} - dQ^{2\prime} + ddQ^{3\prime}\right) P - \left(Q^{2\prime} - 2dQ^{3\prime}\right) dP + Q^{3\prime} ddP = 0$$

que por mais brevidade eſcreveremos aſſim:

$$B^{1\prime} P - C^{1\prime} dP + D^{1\prime} ddP = 0$$

$$B^{2\prime} P - C^{2\prime} dP + D^{2\prime} ddP = 0$$

$$B^{3\prime} P - C^{3\prime} dP + D^{3\prime} ddP = 0$$

eliminando primeiro ddP, e ultimamente $\frac{dP}{P}$, d'ellas derivaremos a Equaçaõ unica de condiçaõ

$$\left(B^{1\prime}C^{2\prime} - C^{1\prime}B^{2\prime}\right)D^{3\prime} - \left(B^{1\prime}C^{3\prime} - C^{1\prime}B^{3\prime}\right)D^{2\prime} + \left(B^{2\prime}C^{3\prime} - C^{2\prime}B^{3\prime}\right)D^{1\prime} = 0$$

da qual, calculando ſómente os termos affectos de ddx, ddy, e ddz, ſe deduzem as ſeguintes tres Equações de condiçaõ

$$B^2 \left(D - \frac{dA}{dx}\right) + AB\left(\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - G\right) + A^2 \left(E - \frac{dB}{dy}\right) = 0$$

$$C^{2\prime} \left(E - \frac{dB}{dy}\right) + BC\left(\frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I\right) + B^2 \left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

$$A^2 \left(F - \frac{dC}{dz}\right) + CA\left(\frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dz} - H\right) + C^2 \left(D - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

de que ſe derivaõ neceſſariamente todas as outras, que obteriamos, fazendo por extenſo o cálculo neceſſario para transformar a Equaçaõ achada em Funcçaõ dos coefficientes da propoſta.

§. LXXIII.

Se na indagaçaõ d'eſtas condições quizeſſemos proceder por hum modo analogo, ao que praticamos no §. LXX, entaõ comparando duas a duas as tres Equações

$B^{1\prime}$

$$B^{1'}P - C^{1'}dP + D^{1'}ddP = 0$$

$$B^{2'}P - C^{2'}dP + D^{2'}ddP = 0$$

$$B^{3'}P - C^{3'}dP + D^{3'}ddP = 0$$

deduziriamos d'ellas as ſeguintes tres

$$\left(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}\right)P - \left(C^{1'}D^{2'} - D^{1'}C^{2'}\right)dP = 0$$

$$\left(B^{1'}D^{3'} - D^{1'}B^{3'}\right)P - \left(C^{1'}D^{3'} - D^{1'}C^{3'}\right)dP = 0$$

$$\left(B^{2'}D^{3'} - D^{2'}B^{3'}\right)P - \left(C^{2'}D^{3'} - D^{2'}C^{3'}\right)dP = 0$$

ſubſtituindo na primeira em lugar de ddx o ſeu valor tirado da propoſta $V = 0$, e calculando em $B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}$ o coefficiente de ddy, e igualando-o a cifra teriamos a Equaçaõ

$$B^2\left(D - \frac{dA}{dx}\right) + AB\left(\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - G\right) + A^2\left(E - \frac{dB}{dy}\right) = 0$$

Semelhantemente ſubſtituindo na ſegunda em lugar de ddz o ſeu valor tirado da propoſta, calculando em $B^{1'}D^{3'} - D^{1'}B^{3'}$ o coefficiente de ddx, e igualando-o a cifra teriamos a Equaçaõ

$$A^2\left(F - \frac{dC}{dz}\right) + CA\left(\frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dz} - H\right) + C^2\left(D - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

E finalmente ſubſtituindo na terceira em lugar de ddy o ſeu valor tirado da propoſta, calculando em $B^{2'}D^{3'} - D^{2'}B^{3'}$ o coefficiente de ddz, e igualando-o a cifra teriamos a Equaçaõ

$$C^2\left(E - \frac{dB}{dy}\right) + BC\left(\frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I\right) + B^2\left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

e d'eſte modo obteriamos com menos trabalho do que no

§. ante-

§. antecedente as condições, a que a proposta deve satisfazer.

Se tivessemos seguido os passos, que apontamos no §. XLVI, entaõ bastaria, que substituindo em $B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}$ o valor de *ddx* tirado da proposta, calculassemos os termos, que seriaõ coefficientes de *ddy*, e *ddz*; e que substituindo em $B^{2\prime}D^{3\prime}-D^{2\prime}B^{3\prime}$ o valor de *ddy* tirado da mesma proposta calculassemos os termos, que seriaõ coefficiente de *ddx*, e *ddz*, e que igualassemos cada hum dos ditos coefficientes a cifra. Assim achariamos duas das Equações, que achamos pelos processos antecedentes, e em lugar da terceira achariamos outras duas equivalentes a ella: he verdade que o numero das Equações finaes sería maior; mas nem o numero, nem a fórma das ditas Equações deve ser considerado como motivo de preferencia para a escolha dos diversos caminhos, que o nosso methodo offerece para se reconhecer effectivamente se huma Funcçaõ Fluxional proposta se póde ou naõ reduzir a Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ de ordem inferior a ella. O menor ou maior trabalho de calculo he a unica consideraçaõ, que deve preceder a esta escolha, e naõ he senaõ com o fim de facilitar o acerto na mesma escolha a quem precisar fazer indagações semelhantes em os casos, que nesta Memoria se naõ mencionaõ, que aquí expomos os diversos modos, que mais naturalmente se offerecem para o mencionado fim.

§. LXXIV.

Se na Formula do §. LXXI suppozermos $A=1$, a Equaçaõ de condiçaõ allí expressada se reduzirá a

$$B\left(BC-E+\frac{dB}{dx}\right)+D-\frac{dB}{dy}=0.$$

E se fizermos a mesma supposiçaõ na Formula do §. LXXII as Equações, que no dito §. achámos, se reduziráõ a

$$B\left(BD - G + \frac{dB}{dx}\right) + E - \frac{dB}{dy} = 0$$

$$C\left(CD - H + \frac{dC}{dx}\right) + F - \frac{dC}{dz} = 0$$

$$C^2\left(E - \frac{dB}{dy}\right) + BC\left(\frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I\right) + B^2\left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

§. LXXV.

Continuando a proceder por hum modo analogo ſe poderiaõ achar as Equações de condiçaõ relativas a todos os outros caſos, aquí naõ comprehendidos; mas além de que hum tal proceſſo ſería ſem fim, e que as Equações de condiçaõ, a que ſeriamos conduzidos, ſe achariaõ cada vez mais complicadas, e menos proprias para ſe conſervarem de memoria, ſería trabalho verdadeiramente inutil paſſar mais adiante neſta indagaçaõ, viſto que no eſtado preſente das Sciencias naõ ſerá facil encontrar queſtaõ alguma, que conduza a Equações Fluxionaes de ordem ſuperior á ſegunda, nem de mais de tres variaveis, como já em outro lugar ponderámos. Será com tudo de razaõ, que advirtamos, que quando huma Equaçaõ Fluxional qualquer naõ for Fluxaõ exacta de outra alguma Equaçaõ de ordem inferior, nem ſe poder reduzir a que o ſeja por meio da multiplicaçaõ de hum factor conveniente para eſſe effeito, ſe naõ deve por iſſo concluir, que ella ſeja abſurda em todo o rigor d'eſta expreſſaõ, quero dizer, que ella exprime alguma propriedade imaginária, ou impoſſivel de ſua natureza; mas taõ ſómente, que a ſua Fluente ſe naõ póde achar nem immediatamente, nem por meio do artificio da multiplicaçaõ de hum factor variavel. As conſequencias, que da doutrina expoſta ſe deduzem relativamente á poſſibilidade, e modo de obter eſta qualidade de factores nos caſos, em que d'elles depende a determinaçaõ das Fluentes, ſeraõ o objecto de outra Memoria.

ER-

ERROS DE CALCULO

Que se devem corrigir nesta Memoria.

Na pagina 214 linha ultima em lugar de

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dy}\right) dx = 0$$

deve lêr-se

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) dx = 0$$

Na pag. 243 lin. 3 em lugar de $\frac{n.(n-1)}{1.2} N^{(n+1)} ddP$, deve lêr-se $\frac{n.(n-1)}{1.2} N^{(n+1)'} ddP$.

Na pag. 244 lin. 7 em lugar de $\frac{dP}{d}$, deve lêr-se $\frac{dP}{P}$

Na pag. 251 lin. 24 em lugar de $-3 \frac{1.2}{n(n-1)} ddN^{3'}$, deve lêr-se $+3 \frac{1.2}{n(n-1)} ddN^{3'}$.

Na pag. 253 lin. 8 em lugar de dd, P, deve lêr-se ddP.

Na pag. 260 lin. 11 em lugar de $E^{3'}$, deve lêr-se $E(1)^{3'}$: e na linha 13 em lugar de $E^{2'}$, deve lêr-se $E(1)^{2'}$.

Na pag. 281 lin. 14 em lugar de

$$B\left(H - \frac{dD}{dx}\right) - D\left(\frac{1}{2} O - \frac{dC}{du}\right) = 0$$

deve lêr-se

$$C\left(H - \frac{dD}{dx}\right) - D\left(\frac{1}{2} O - \frac{dC}{du}\right) = 0$$

NB. Naõ se apontaõ alguns erros de Orthografia, que escapáraõ á vigilancia do corrector, por serem de natureza tal, que o leitor facilmente os póde supprir, visto que nenhum d'elles altera nem levemente o discurso.

DES-

DESCRIPÇAÕ

De hum Feto humano monſtruoſo, naſcido em Coimbra no dia 28 *de Novembro de* 1791.

Por Francisco Tavares.

N——— Mãi de muitos filhos, de 36 annos de idade, em Novembro de 1791 julgava-ſe pejada de ſete mezes, parte dos quaes tinhaõ ſido paſſados em baſtante regularidade. Em Agoſto tinha padecido huma hemorragia uterina, de que convaleſceu ſem ajuda de medicamentos, que naõ foſſem a dieta, e deſcanço na cama. Reſtituida aos ſeus trabalhos domeſticos ficou ſempre padecendo huma purgaçaõ côr de café, até que por hum ſubito terror começou a ſentir deſcer o ventre, com frequente vontade de ourinar, pouco movimento do feto, dores pelo ventre, e lombos, por eſpaço de oito dias. Paſſados elles entrou a ſentir verdadeiras dores de parir no dia 28 de Novembro, que ſoffreu por dez, ou doze horas. Ao fim d'ellas chamada a parteira tocando-a, chegou ao feto, o qual pouco tempo depois lançou fóra hum dos pés, logo o outro, e ajudado da parteira finalmente naſceu ſemivivo ſem ſecundinas, havendo precedido á ſahida do pé huma grande cópia de agoas de côr preta. Examinado o feto appareceu da fórma que repreſenta a Fig. I. appreſentando hum grande exomphalo incluido ſómente no peritoneo, taõ adherente pelos lados aos tegumentos communs, que a naõ ſer a natural tranſparencia que o diſtinguia, pareceria ſua continuaçaõ. Mas obſervava-ſe tambem, que os tegumentos ſe limitavaõ n'huma rima continuada até o ſternon por onde ſahia o peritoneo, porém

rém nada cruenta, o que bem indicava, que naõ se formou na occasiaõ do parto. Ao lado direito da origem do exomphalo havia huma excavaçaõ desigual, que no sitio (A) representava hum bordo rijo, e resistente ao cortar, e logo para a parte interior hum forame (*a*) cego, sem passagem para a parte interna, e pouco abaixo no sitio notado com a letra B huma caruncula rubra peciolada por hum pésinho delicadissimo pouco distante do buraco C, o qual pela extensaõ de huma pollegada formava hum sacco de meia pollegada de diametro, cuja superficie interna era rugosa, rubro-rosea, e semelhante á superficie interna do intestino recto: a sua entrada era facil introduzindo o dedo minimo, que naõ encontrava resistencia, senaõ quando o diametro diminuia á distancia de huma pollegada, e por tanto naõ tinha Sphinter. Distinguia-se em D hum ducto, que caminhava por toda a superficie superior do exomphalo para a parte interna, do qual, por meio da pressaõ, se viraõ sahir algumas gottas de sangue. A sua grossura total sería de huma linha pouco mais, ou menos.

Averiguando-se relativamente aos sinaes distinctivos do sexo, nenhuns apparecêraõ; porque afóra de duas producções cutaneas semelhantes a duas verrugas pendentes, marcadas em EE, nada mais se via senaõ as tres pequenas impressões no sitio proprio, mas hum pouco ao lado direito, notadas com as letras *b*, *c*, *d*, das quaes a superior *b* tinha hum muito pequeno forame, que se limitava á distancia de huma linha, sem dar passagem a hum Stillete com que se tentou.

Naõ tinha nem sinal de papillas de mammas: a cabeça era maior do que he ordinario em crianças de sete mezes: os pés retrahidos para o malleolo interno, mostrando as palmas seguidas á parte interna da perna.

Visto pela parte posterior, se via logo hum tumor molle, liso, da côr da pelle no sitio correspondente á ultima vertebra lombar, e principio do osso sacro, da fórma que se vê representado na Fig. II. A.; e proseguindo-se na averi-

riguaçaõ exterior, achou-se naõ ter *anus*, nem bem divisaõ de nadegas.

Pude obter dos pais facilitarem-me a dissecçaõ deste particular monstro, a que procedeu o Lente de Anatomia nesta Universidade o Doutor Joaõ de Campos Navarro de Andrade, na minha presença, na do Doutor Joaõ Joaquim Gramacho da Fonseca, Lente de Aphorismos, e na do Doutor Joaquim Navarro de Andrade, Lente de Instituiçõés Medico-Cirurgicas. Foi ella feita com todo o escrupulo, e attençaõ, e cuidei de desenhar, ainda que toscamente, na natural grandeza cada huma das figuras, que necessarias fôraõ, para dar huma idéa mais justa das particularidades, que se observáraõ.

Abrio-se o sacco do exomphalo (Fig. III.) AAAAA, e appareceu o figado em dous lobos BB repartido, e suspenso pelo ligamento CC de largura de huma linha. O sacco do peritoneo estava adherente pela ametade da parte convexa do figado, e tinha algumas outras irregulares adherencias em varias partes da mesma superficie. O ligamento CC vinha tambem adherir pela parte da espinha do dorso aos intestinos. Immediatamente abaixo dos dous grandes lobos do figado se viaõ os intestinos F, e o estomago E em sufficientemente boa conformaçaõ, e ao seu lado o baço G de huma figura cordiforme acuminada, e de huma consistencia mais dura do que a natural, e faltava de todo o omento, que devia cubrir os intestinos, e faltava o pancreas. O ducto D se foi seguindo, como convinha, e caminhava pela adherencia do peritoneo até ao figado, de fóra para dentro, da direita para a esquerda até se introduzir na substancia do figado superiormente, e no meio da parte gibbosa n'uma grande scissura, qual se vê na Figura IV. letra E, que se terminava por huma ponte C, depois da qual he que começava o ligamento CC (da Fig. III.).

Tiradas as adherencias ditas, o figado parecia sustentado por hum peciolo formado pela veia cava (Fig. V.) D; mas pela parte anterior do diaphragma EE, logo debaixo do

do ſternon. E indagada a parte concava achou-ſe o ſeu lobo de Spigelio dentro n'huma duplicatura do ſacco, e naõ ſe encontrou bexiga do fel. O diaphragma apenas merecia o nome pela diviſaõ das cavidades, ſendo taõ tenue, que pouquiſſimo, ou nada moſtrava da parte muſcular. Tirado o figado, e inteſtinos, abrindo-ſe eſtes pelo ſeu comprimento, ſe levou a abertura até ao buraco C da Fig. I. Eſtavaõ cheios de meconio, que tinha facil ſahida pelo dito buraco com qualquer leve preſſaõ.

Os rins (Fig. VI.) AA cheios de elevações deſiguaes por toda a ſuperficie externa, tinhaõ de particular ſer o direito maior, e mais levantado na extremidade ſuperior, do que o eſquerdo. Hum, e outro com as capſulas renaes BB inferiores a cada hum, mas a eſquerda tripla da direita, e acompanhando toda a parte concava do rim, e ficando-lhe ainda alguma couſa ſuperior: ambas de côr rubro-fuſca. A diſpoſiçaõ dos vaſos renaes regular ſahindo tambem os uretheres (*cc*) do proprio lugar, dos quaes o eſquerdo tinha livre ſahida para o buraco C da Fig. I., e o direito parecia perder-ſe nos tegumentos. Naõ tinha bexiga urinaria, nem cavidade, aonde ſe contiveſſe, como ſe verá logo.

Aberta a cavidade do peito appareceu huma grande glandula thymo A. Fig. V.: os pulmões BB pequenos, e ſolidos, e o coraçaõ C todo da parte direita da cavidade, tocando a ſua ponta a columna vertebral G, e ficando toda a cavidade eſquerda livre, pois que, como ſe vê na Fig. VI., pela inclinaçaõ da eſpinha dorſal em DD a cavidade E vinha a ſer o terço da cavidade F, e por conſequencia incapaz de accommodar hum coraçaõ volumoſo.

Da meſma fórma os vaſos grandes, que ſahem, e entraõ no coraçaõ, eſtavaõ em toda a parte direita, com a differença de que a veia cava ſe adiantava para a parte anterior do diaphragma, onde, como dito fica, o figado era como peciolado por ella: o eſophago, e a trachea da meſma maneira eraõ da parte direita.

O

O volume maior da cabeça convidava á indagaçaõ do eſtado do cerebro; e apenas ſe rompeu a dura meninge ſahíraõ mais de duas onças de hum ſôro limpido, e por tanto ſe ſuſpeitou immediatamente, que ſe havia de verificar o tumor da parte poſterior por ſpina bifida. Rompeu-ſe o tumor, ſahio hum ſemelhante ſôro, mas ſanguinolento; e continuando-ſe a romper longitudinalmente as vertebras, vio-ſe toda a cavidade da columna vertebral do diametro de tres linhas, a medulla ſpinal tenue, como macerada, e occupando apenas hum terço da cavidade, cujo reſto era cheio do meſmo ſôro dito. As ultimas lombares eraõ bifidas.

Eraõ os oſſos innominados inteiramente planos, e verticalmente ſituados. As ultimas vertebras lombares começavaõ a encaminhar-ſe para a parte anterior: aſſim continuava o oſſo ſacro, e terminava o coccyx, como repreſenta a Fig. VII.

A falta de partes genitaes externas, que faz dever contar-ſe eſte monſtro entre os mais raros, puxava a curioſidade para procurallas interiormente. Debalde tudo. A pelve era nenhuma, e afóra dos muſculos, que a forravaõ, apenas ſe via cellular, e ſobre a criſta do illion glandulas bem patentes: de reſto nada mais, que tiveſſe nem a mais remota analogia, ou ſemelhança das partes, que diſtinguem os ſexos.

Paſſadas trinta e tres horas a mãi lançou as ſegundas, que reteve ſem a mais pequena evacuaçaõ de ſangue. Eraõ de natural tamanho, e o ſeu funiculo de quatro pollegadas eſcaſſas de comprimento, e taõ tenue, como he repreſentado na Fig. VIII., e bem correſpondente ao ducto D das Fig. I., III., e IV. As arterias umbilicaes ſe reduziaõ a huma ſó, e a veia era taõ tenue, que com muita difficuldade ſe percebia.

Perſuadido de que a Natureza naõ reconhece limites no modo das ſuas producções, que ella ſabe, e póde variar ao infinito; entrei com tudo na curioſidade de averiguar ſobre a raridade, ou frequencia de monſtros humanos, em

em que junto a huma configuraçaõ exterior pouco irregular á primeira vista se encontrassem tantas irregularidades, como no que fica descripto. Vim por fructo da minha diligencia a conhecer, que nelle havia huma complicaçaõ de muitas das modificações, que classificaõ os monstros por excesso, por defeito, e por situaçaõ mudada de partes; mas revolvendo a immensa lista de monstros para encontrar os analogos, ou semelhantes, de que se conservasse memoria, a pezar de que o grande *Haller* (*Oper. min. Tom. III. Lib. I. de Monstris*, *pag.* 34.) diga: *Sed etiam fetus sexu destitutos, pene, aut vulva, passim referuntur*; eu naõ encontrei esta facilidade, ficando n'uma desproporçaõ infinita os destituidos de sexo, e mesmo os herniosos semelhantes, relativamente aos outros. Basta confrontar as notas do lugar citado, que devem verificar o *passim*, com as que vaõ dispersas por todo o Liv. I., para se vir no conhecimento da desproporçaõ.

De quantos saõ referidos na Academia Real das Sciencias de París desde o anno de 1701 até ao de 1780 saõ sómente os dous descriptos por Mr. *Mery* no anno de 1716, e outro por Mr. *Petit* no mesmo anno, que com este tem alguma analogia, principalmente o ultimo, em que com tudo póde entrar em dúvida, se o appendix, que apparecia ao lado do anus spurio, tendo hum unico corpo cavernoso, e tres musculos, dos quaes dous nasciaõ dos ossos da pube, e hum dahi mesmo, e do coccyx, e deveria haver-se por parte, que em toda a imperfeiçaõ fosse com tudo distinctiva do sexo masculino.

Aproxima-se a este o que descreve *Frederico Hoffmann* (*de morbis fetuum in utero materno*, *num.* 8.) ainda que taõ laconicamente, que naõ dá idéa senaõ do que exteriormente se observava. Este naõ tinha abertura de anus, era sem distinçaõ de sexo, e com huma grande porçaõ de intestinos fóra do corpo. No mesmo paragrafo se faz mençaõ de outros dous monstros por exomphalos com parte das entranhas nelle contidas, mas de sexo conhecido.

Nas *Actas de Compenhague* anno de 1675 *Observ.* 59. lê-se a Historia de hum Feto monstruoso, com a cabeça bem conformada; as pernas voltadas para a parte posterior; corpo immovel; figado de grandeza extraordinaria; intestinos fóra do ventre; sem anus; sem nenhuma apparencia de sexo; mas que na coxa direita tinha huma abertura, que tomáraõ por hum orificio do utero, ou por collo da bexiga.

Mr. *Le Prieur de Lugeris* descreve hum monstro sem distinçaõ sensivel de sexo, mas com hum buraco de quasi seis linhas de diametro, onde deveria estar a parte distinctiva do sexo masculino. (*Journ. des Sçavans ann.* 1690.) E no anno 1696 se descreve outro sem apparencia de sexo, mas sem maior individuaçaõ.

He mais bem descripto o que participou Mr. *Sue* á Academia Real das Sciencias de París no anno de 1746, que naõ tinha nenhuma apparencia de coxas, nem de pernas, e que entre outras particularidades naõ tinha no fim do tronco nenhuma abertura natural, e sómente onde deveriaõ ser as partes da geraçaõ havia hum pequeno appendis produzido pela pelle, debaixo do qual se achou pela dissecçaõ huma pequena bexiga.

Sem nenhumas partes da geraçaõ assim internas, como externas, era o monstro que Mr. *Marrigues* communicou a Mr. *Morand* em Carta de 9 de Novembro de 1758, havendo com tudo ossos innominados no estado natural (*Mem. des Scavans Etrang.* T. IV. pag. 123). Mas que deformidades naõ ha no resto? Era sem coraçaõ, sem pulmões, sem trachea, sem aorta, nada de veia cava, mediastino, nem thymo. Havia pouca extensaõ de abdomen, e parte dos intestinos estava fóra do ventre. Da mesma fórma faltavaõ o estomago, figado, baço, pancreas, capsulas renaes, rins, uretheres, bexiga urinaria, e o cordaõ umbilical era de seis pollegadas.

Dos fetos herniosos somente, isto he, sem fazer cabedal de outra conformaçaõ, tambem naõ he grande a có-

pia.

pia. Além dos já mencionados acha-se nas *Transacções Philosophicas*, ann. 1670, n. 58, art. 3, notado hum Feto de huma figura horrenda com o peito aberto, e os intestinos fóra do ventre.

Nicolau Stenon (*Act. de Compenhague*, ann. 1671, e 1672, *Observ.* 110) vio hum Feto, cujo coraçaõ, figado, ventriculo com o baço adherente, quasi todos os intestinos, e o rim direito estavaõ fóra do thorax, e do abdomen.

Lê-se nas *Ephemerides dos Curiosos da Natureza*, *Dec.* 2, *An.* 6, 1687, *Observ.* 126, outro Feto, cujos intestinos sahiaõ pelo embigo incluido n'uma bolça formada pelo peritoneo: e na *Dec.* 1, *Ann.* 3, *Observ.* 168, acha-se a descripçaõ de outro extremamente monstruoso, sem distinçaõ de sexo, e sem anus, com hum sacco membranoso, e transparente, em que se continhaõ as entranhas thoracicas, e abdominaes. Por hum semelhante sacco membranoso, e transparente se deixavaõ vêr em outro todas as visceras abdominaes (*Eph. N. C. An.* 1688 *Append. Observ.* 45.).

Com todas as entranhas thoracicas, e abdominaes fóra das cavidades, e descubertas acho dous exemplos, hum em *Bonet* (*Observat. Septentrion. T. II. L. IV. Sect.* 9. *Observ.* 29 *in Scholio*), e outro nas *Memorias da Acad. das Sciencias de Paris* no anno de 1746 communicado por Mr. *Chabelard*.

Para evitar a justa censura do célebre Dr. *Joaõ Gregory* Professor d'Edimburgo n'uma das suas sábias *Lições sobre os deveres, e qualificações do Medico*, naõ deixarei de tentar as utilidades, que se podem offerecer neste producto monstruoso para intelligencia de alguma parte da economia animal, e pelo que respeita aos fenomenos da prenhez, e parto, e suas consequencias.

A primeira cousa admiravel foi a copiosa hemorragia uterina, que veio a cessar sem mais remedio do que o descanço, e dieta. Isto parece provar, que se naõ deve em todos os casos da hemorragia precipitar o parto, como muitos aconselháraõ; mas que ao contrario, quando a hemorra-

ragia naõ ameaça perigo evidentiſſimo, ſe deve temporizar, procurando pelos meios mais ſuaves a ceſſaçaõ della.

Em ſegundo lugar he de notar a purgaçaõ de côr de caffé, que parada a hemorragia continuou até o dia do parto. Parece moſtrar eſte ſucceſſo, que os vaſos, que davaõ larga ſahida ao ſangue, naõ chegáraõ a tapar-ſe de todo, e fôraõ deixando ſahir hum fôro ſanguinolento, que imitava a côr do caffé, ſem com tudo dar lugar a deſpego maior da placenta; pois que ainda depois do parto ficou tanto tempo retida ſem evacuaçaõ de ſangue nenhuma abſolutamente.

Daqui meſmo naſce eſpontaneamente outro corollario de naõ ſe dever precipitar temerariamente a extracçaõ das ſegundas, ſe naõ ſeguem immediatamente o feto: e que he preciſo dar tempo a que a Natureza por effeito da contracçaõ do utero as faça ſahir, ſe naõ ha hemorragia muito conſideravel. Corollario taõ recommendado pelos ſabios Parteiros, e nunca executado pelos Cirurgiões faltos de principios, e conhecimentos, a quem muitas vezes ſaõ devolvidas eſtas operações.

Parece provar-ſe a pouca neceſſidade de ligar o cordaõ umbilical da parte da mãi: e que por eſta falta nunca, ou rariſſimas vezes ſe ſeguem hemorragias depois do parto.

E ſendo taõ tenue o cordaõ deſte monſtro, falto de huma das arterias umbilicaes, e a que reſtava taõ delgada, chegando entretanto a huma grandeza regular, parece provar-ſe, que o ſangue da mãi naõ paſſa livremente para o feto, e ſó paſſa hum liquido tenue albuminoſo, do qual o feto pela acçaõ dos ſeus vaſos fórma o ſangue, que pela arteria umbilical ſahe para a placenta; e que no monſtro deſcripto iſto naõ ſuccedia ſómente nos primeiros mezes, mas nos ultimos tambem, contra o parecer de alguns Phyſiologiſtas.

He ultimamente hum dos fenomenos ſuccedidos no parto muito attendivel, e de que ſería difficultoſo dar a expli-

plicaçaõ se a natureza inquirida pela dissecçaõ anatomica naõ a désse; vem a ser: as agoas negras que precedêraõ o parto. Porém deixamos notado, que no sitio do embigo havia hum anus sem sphinter, que com leve pressaõ largava o meconio, e sabemos que he final de se appresentar o feto sentado á sahida do meconio (ainda quando muito bem conformado) pelos simples esforços do utero materno. Que muito pois que, ajuntando-se aos esforços a facil sahida pelo anus monstruoso, as agoas viessem pretas?

Deixo á contemplaçaõ dos Sabios se Mr. *Mery*, nas duas Memorias do anno de 1716 já citadas, e outros que o tem seguido, tem toda a razaõ para negar, que haja exomphalos contidos sómente no peritoneo.

LOXODROMIA DA VIDA HUMANA,

OU

MEMORIA

Em que se mostra, qual seja a carreira da nossa especie pelos espaços da nossa presente existencia.

POR JOSE' JOAQUIM SOARES DE BARROS.

SEmpre a Natureza nas ſuas operações moſtra conſtantes os ſeus motivos, e ſempre na ſua dirrecçaõ ella nos indica os ſeus diverſos empregos, naõ obſtante as differenças que muitas vezes ſe encontraõ em alguns dos ſeus reſultados; pois que eſſas meſmas differenças naõ ſaõ mais que outras tantas confirmações da ſua tendencia primitiva, e dos ſeus primeiros intentos. Se ella obraſſe de outra fórma, ſe a ſua acçaõ foſſe incerta, e fortuita, deſtituidos entaõ os animaes de huma lei geral, e huma regular energia para todos em todo o tempo duravel, neſſe eſtado de ſimultaneos, e encontrados impulſos, e ſem hum inſtincto directorio, e hum principio de huma acçaõ decidida, elles naõ ſeriaõ mais que humas maquinas vertiginoſas, ſempre movidas pelo impeto, e deſtruidas pelas ſuas proprias forças, ou conſervadas pelos acaſos; e os homens em taes circunſtancias, em viſtas taõ arriſcadas, e ſem huma norma invariavel, ſempre á razaõ parallela em diſcurſos acertados, ſe moſtrariaõ ſem remorſo indoceis a todo o preceito, e ſem nenhumas moſtras de agrados para o bello eſplendor da verdade. Em huma ſituaçaõ taõ triſte elles naõ gozariaõ dos grandes beneficios das moradas fixas, e das povoações reguladas, ver-ſe-hiaõ eſpalhados ſobre os eſpaços da terra como animaes ſolitarios,

rios, ſem providencia, ſem conſelho, e ſempre errantes, e deſgraçados. Mas graças á poderoſa Natureza, e áquella illuminada faculdade, que do mais ſublime aſſento lhe foi dada, tudo para nós eſtá mui diverſamente ordenado. Eſſa maõ que perpetuamente nos rege ſem reſiſtencia nos ſeus fins, move a toda a humanidade com hum vigor taõ ſeguro, e regulado como ſempre ſe tem viſto em toda a carreira dos Seculos, ſem que os ſeus grandes deſignios tenhaõ ainda em nada mudado. Tudo ao ſeu dominio ſe ſujeita, ao ſeu Imperio immenſamente dilatado, e com tanta facilidade, que a meſma materia bruta aos ſeus preceitos ſe ajuſta com huma ſubordinaçaõ taõ notavel, como todos os dias o eſtamos vendo nas mais ſeguidas funções de todo o corpo organizado.

Re producçaõ de individuos, e conſervaçaõ de eſpecie, ſaõ da Natureza para todos os viventes os ſeus intuitos mais fixos, as ſuas leis invariaveis, em cuja conſtante obſervancia ella em todo o tempo trabalha, naõ obſtante as excepções forçadas, e tambem as voluntarias que algumas vezes encontra na noſſa meſma contingencia, ou na eſcolha dos motivos, com que a noſſa intelligencia ſe propoem á noſſa natural liberdade.

Naõ he porém do noſſo intento, nem ſería bem proporcionar eſte papel, o ſeguir as longas viſtas com que aqu ella maõ ſempre activa eſtá por toda a parte firmando os ſeus diſignios, immutaveis em hum taõ vaſto theatro. Naõ trataremos pois das razões, com que a natureza nos ſeus largos golpes de viſta ſe modera, e ſe limita no meio da Sociedade; nem diremos aqui nada d'aquellas deſproporções, que ella muitas vezes deſaprova nos empregos da grande familia do Eſtado; nem faremos taõ pouco mençaõ d'aquelles vinculos, aquellas obrigações com que ſe formaõ, e ajuſtaõ as mais importantes correſpondencias na meſma Sociedade; e nem meſmo huma ſó palavra diremoe da efficacia dos effeitos pelas meſmas leis promettidos para as mais certas garantias dos grandes, e populoſos

losos Estados: pois que tudo isto naõ admitte provas taõ manifestas, e taõ claras que ellas se possaõ dispôr, e tratar com aquellas proporcionalidades de calculo, de que especialmente nos servimos neste assumpto que tomamos, só desta fórma reductivel ás considerações deste lugar em toda a extensaõ, que lhe damos. Assim com semelhante espirito trataremos neste papel daquelle constante vigor, aquelle poder sempre vivo, que incessantemente revolve a nossa especie com huma acçaõ sempre ajustada a determinados limites, e a permanentes medidas, aquellas que agora nos servem para fazermos a sua applicaçaõ, naõ só a coizas, de que a Filosofia puramente por curiosidade se agrada, mas tambem com especialidade áquellas, sobre que esta vasta Sciencia se diffunde ainda por maiores espaços, e empregos de utilidade.

Como hum fruto que da sua planta se separa, cahe o homem sobre a terra quando nasce destituido de todo o movimento de providencia, e de toda a acçaõ de conselho nesse tempo da sua maior miseria nos seus dias arriscados. Naõ bastaõ as ternuras dos Pais, os seus activos cuidados para livrar a idade mais innocente dos seus maiores, e mais eminentes estragos. He preciso, que a Natureza receba aquelle tributo, que ella tem determinado, e que ella leve logo comsigo no primeiro anno da vida huma grande parte dos que nascem. Semelhantes sacrificios se vaõ depois repetindo na continuaçaõ de iguaes periodos com menor effeito, naõ ha duvida, em successivas ruinas; porque cada dia vai tomando maior vigor em alentos vitaes aquella acçaõ, que conduz desde os primeiros dias da vida até ao tempo da puberdade, mas essas perdas saõ ainda taõ consideraveis, que he preciso, que a Natureza sem longa perda de tempo se determine a fazer de infinitos innocentes menos frequentes os seus estragos, se ella quer, que a especie dos miseraveis humanos naõ veja o seu fim em poucos dias. Com effeito naquelle tempo, naquella época da puberdade taõ admiravelmente assina-

sinalada se mostra a mesma Natureza como sentida de tantas destruições, e de tal fórma arrebatadas, e se determina a nos dar huma nova faculdade, hum grande, e mui activo poder de reparallas.

D'esta sorte passaõ todos os individuos da nossa especie, que se avançaõ até áquella pasmosa época, o tempo dos seus perigos mais graves, e assim vaõ correndo por huma sorte de trajectoria até tocar naquelle ponto fixo; aquelle alvo onde a Natureza lança a todos os humanos por huma sorte de Ballistica. Lá desse ponto da nossa maior elevaçaõ em forças vitaes, e onde se encontra o *Maximum* da nossa potencia de vida, muda aquella trajectoria de inflexaõ, e toma por huma linha recta o seu curso, durante o espaço de sete annos, desde o termo da puberdade até aos ultimos limites do corpo em longitude. Mui raros saõ os individuos de huma mesma Naçaõ, que na Europa se affastaõ com algumas pequenas differenças deste taõ medido caminho, dessa lei taõ fortemente promulgada, e hoje para nós com a sua sançaõ em proporções taõ claramente conhecidas, e quando essas differenças se encontraõ mais, ou menos consideraveis entre duas, ou mais Nações, todas essas desigualdades saõ pela sabia Natureza, quanto á populaçaõ, de tal fórma com outras de outro genero dispostas e preparadas, que pela sua combinaçaõ todas tendem sempre a hum mesmo equivalente, e a hum geral resultado; pois pela observaçaõ sabemos, que se huns povos se dilataõ nos espaços da vida por maior energia em vitalidade, outros sem tanto vigor para huma mais larga existencia se anticipaõ na época da prolificaçaõ com huma mais prompta fecundidade, compensando assim tudo a Natureza em razões de contingencias, que á nossa primeira vista naõ formaõ mais que diversas sommas de acasos; mas que na realidade naõ saõ mais que os termos, e os limites de diversas ordens de expectações calculadas, e sempre mais, ou menos tendentes ao equilibrio da populaçaõ por caminhos mui diversos, e mui variados gráos de actividade.

Se com femelhantes golpes de vifta olharmos para os trabalhos da Natureza empregados na noffa efpecie com equações taõ notaveis, vella-hemos fempre por todos os lugares da terra occupada em preparar defta forma em reciproca correfpondencia o termo commum da vida com a media expreffaõ da fecundidade. Veremos, que fe por huma parte pela differença do clima hum grande numero de individuos collectivamente confiderados, e como em expreffaõ de maffa, fe anticipa em fecundidade, por outra parte fica logo perdendo em menor duraçaõ de vida, o que na propagaçaõ tinha ganhado em celeridade; e pelo contrario obfervar-fe-ha, que onde o primeiro termo da ferie das gerações principia a retardar, a populaçaó fe compenfa ao mefmo tempo com huma maior expreffaõ de vitalidade, ou huma mais larga potencia de vida. Obfervar-fe-ha tambem, que nefta fórma de equilibrio, a época da fecundidade vai fempre retardando da equinoccial para as vizinhanças do Polo, e que ao contrario ella vai anticipando do Norte para o Sul o tempo daquella data, e afroxando ao mefmo paffo com proporcionados defcontos o poder daquelle agente invifivel, que faz a medida dos noffos dias, e já fe entende, que fe naõ trata aqui de exactas proporções de Geometria, nem de precifas analogias de calculo; mas de huma quafi coincidencia a hum ponto fixo, e de huma mui notavel approximaçaõ aos limites da verdade.

Tudo ifto fe conclue de hum grande numero de obfervações, que fe tem feito fobre efta materia nas maiores, e menores latitudes do Globo, e na maior parte das latitudes intermediarias, cujas obfervações tendem todas a moftrar a uniformidade de femelhantes refultados. Naõ ha duvida, que pela mefma razaõ que effas obfervações concorrem affim taõ ajuftadamente fobre differentes lugagares do Globo, fempre correfpondendo em razaõ reciproca com a dos efpaços da vida á época da fecundidade, por iffo mefmo parece, que effas mefmas épocas deveraõ

mof-

mostrar na direcçaõ do seu assento outro Circulo Maximo com os seus Polos naõ mui distantes da Ecliptica, ou huma linha curva de outra natureza; pois que de outra fórma seria preciso suppôr, que as ditas épocas naõ recebem do differente gráo de calor central nenhuma alteraçaõ sensivel, nem tambem nenhuma notavel differença pela maior, ou menor approximaçaõ dos seus respectivos lugares á linha da congelaçaõ. Mas como naõ he o nosso intento fazer neste escrito maiores indagações a este respeito, bastanos o que temos dito dos pontos essenciaes dessas épocas, para que se possa julgar termos por agora satisfeito ao que era preciso mostrar nesta materia. Naõ deixarei porém de accrescentar, que seria mui conveniente representalla de outra fórma, com outra disposiçaõ, e outro methodo, que até hoje se naõ tem feito, pondo em todas essas épocas o tempo da puberdade, o commum limite da prolificaçaõ, e o termo ordinario da vida nos seus respectivos lugares, segundo os seus meridianos, e os seus parallelos, e referindo-as ao comprimento dos lados de triangulos reduzidos a huma mesma escala. Assim se representaráõ mui facilmente em grande quadro, e debaixo de hum só golpe de vista todas as regularidades, e todas as variações observadas, e poderemos vêr tantas coizas curiosas marcadas sobre o Globo bem conformemente ao que já se tem praticado com outras, as Cartas dos ventos, e das monções, e as que representaõ as variações da Bussola, e o systema do Magnetismo.

Estas especulações assim tratadas seriaõ huma sorte de anatomia comparativa das differentes porções da nossa especie espalhadas com qualidades, e constituições taõ diversas sobre toda a face da terra. Sem taes conhecimentos, sem a noticia do que se passa nos outros povos, sem estas taõ admiraveis relações, que a Natureza estabelece, e determina, o homem he pouco mais de nada, e como se naõ existíra para tantas coizas uteis, que destes conhecimentos se derivaõ, e como hum ponto de luz sem re-

fle-

flexos invisivel, e como em si mesmo escurecido. Sem se saber o que se passa nos outros, que correm na mesma carreira, quaes saõ os nossos passos communs, as nossas perdas, e os nossos riscos. Sem semelhantes principios, sem estas vistas assim terminadas em pontos certos, e sempre fixos, nada se póde saber de hum grande numero de materias mui curiosas, e mui uteis. He preciso sahirmos fóra de nós mesmos, e lançar o pensamento fóra da nossa individual existencia para medirmos pelo que se passa nos outros os nossos mesmos alentos, e as nossas proprias fraquezas nos diversos espaços da vida, e para sabermos onde ha mais que esperar, ou que temer, quaes saõ em diversos tempos os nossos maiores perigos, e quando se devem presentar aquelles, que parecem mais repentinos. Assim por este caminho póde o homem vêr-se a si mesmo, como desde hum ponto brevemente destructivel, e comparar-se com toda a volumosa massa da sua especie espalhada por todos os espaços da terra em existencia sempre fixa.

Desta fórma poderá elle entaõ bem conhecer, naõ aquelles accessos de esperanças, e de riscos nas idades dos particulares, e nas condições dos seus successos respectivos, mas ainda calcular nas revoluções dos grandes Imperios todos os seus pedaços de ruina, quando as causas saõ bem sabidas, naõ só por perdas de batalhas, ou de grandes acontecimentos imprevistos, mas por outras muitas vezes muito maiores, posto que menos promptamente sentidas, como he a falta de actividade, e de industria dos povos, a satisfacçaõ com o puro necessario, e a esperança só no soccorro do dia. A tudo isto chega, a tudo abraça a especulaçaõ da nossa especie calculada nos damnos da nossa mortandade, nas medidas dos nossos perigos, na expectaçaõ de reparallos, na probabilidade de vencellos; em fim a tudo aquillo, em que he preciso applicar o conhecimento das proporções de toda a escala da populaçaõ, aos mais uteis empregos da paz, e ás mais bem medidas providencias da guerra.

Com

Com femelhante conhecimento fe tem adiantado no noffo Seculo a razaõ das Nações mais illuftradas: naõ deixaremos porém de dizer, que efta Filofofia taõ nova, e de tanto bem para a Sociedade, ainda fe naõ acha á proporçaõ das fuas graves confequencias fufficientemente cultivada, e que em muitas occafiões por efta caufa, por menos bem confiderada, e feguida, ou naõ bem ajuftadamente applicada, fe perde muito em adminiftraçaõ publica, e em grandes recurfos do Eftado.

Mas naõ vamos taõ rapidamente fobre tantos objectos diverfos poftos á mefma vifta fobre hum grande quadro, e naõ fupponhamos a refpeito do feu numero, das fuas proporções variadas, e da differença dos feus contraftes tudo o que eftá dito, já de tal fórma conhecido, que para fixar aqui mais a intelligencia naõ feja precifo fobre ifto dizer mais nada. Moftremos com mais alguma demora o efpirito defta nova Filofofia, verfando fobre os feus objectos analogos com mais alguma novidade, e tomemos por fundamentos aquellas obfervações, e aquelles encontros naõ efperados na noffa viagem pelos diverfos efpaços da vida. Moftremos a fua applicaçaõ com alguma novidade a huma doutrina mui notavel, mefmo á fua origem errada, a huma Filofofia myfteriofa, e grandemente decantada nos faftos da maior antiguidade, para que fe veja logo como desde o efcuro véo da quimera chegamos ao tempo da claridade, ao tempo de ouvirmos em fim o que a mefma Natureza falla, deixando no noffo efpirito hum tom de contentamento, naõ fó de pura curiofidade, mas tambem ao mefmo tempo hum numero de inducções mui notaveis; que podem fer applicadas com efperanças mui proveitofas ao ufo da Medicina, e tambem a fervir com algumas utilidades em materia de contingencias calculadas em maior precifaõ de conhecimentos na Logiftica das probabilidades da vida.

Para conveniente preparaçaõ do noffo intento, levemos a noffa recordaçaõ logo de hum golpe de vifta aos

mais remotos fundos da Hiſtoria, e vejamos os *Caldeos* conhecidos entre os mais antigos Filoſofos, occupados em myſterioſas combinações de numeros, e em tirar de taes reſultados a reſpeito de certos tempos da vida os mais triſtes, e terriveis annuncios dos noſſos maiores eſtragos. Alguns ſeculos depois encontraremos Pithagoras, e Plataõ Filoſofos bem conhecidos, de tal forma entregues a ſemelhantes doutrinas, que dellas formavaõ huma boa *parte* dos ſeus ſcientificos principios, donde deduziaõ naõ ſó as razões da harmonia das Esferas, e das Republicas, mas tambem as dos noſſos mais arriſcados tempos da vida por funções da Natureza, e da Fortuna. Os numeros *7*, e *9*, os ſeus quadrados, e os ſeus productos, e as *ſuas* multiplicações por outros numeros, eraõ por aquellas theoricas os mais perigoſos á continuaçaõ da noſſa exiſtencia, e formavaõ aquelles taõ terriveis como famoſos annos climatericos, quando contavamos outros tantos de vida. Com taõ authorizados annuncios intimidáraõ-ſe notavelmente os homens, e as fraquezas do temor ſe eſpalháraõ por toda a parte até quaſi aos noſſos dias com as fraquezas da doutrina, ſem porém ſe vêr certamente niſſo mais nada, que taõ ſómente o que a imaginaçaõ pintava. Deſprezados em fim de huma vez os myſterioſos numeros, e tudo o mais que parecia Romance na Fyſica, apparecêraõ de huma nova forma as regiões, e os eſpaços da vida. Apparecêraõ longas ſeries de obſervações da mortalidade dos dois ſexos, que devemos á celebre Cidade de Breslau, e as primeiras neſte genero. Outras muito mais populoſas Cidades, e Londres principalmente, naõ tardáraõ muito em ſeguir aquelle exemplo com grande eſcrupulo, e vigilancia, ficando porém ſempre aquellas primeiras Liſtas as mais eſtimadas entre todas. Deſte grande numero de obſervações taõ curioſas tirou logo a Logiſtica os elementos das probabilidades da vida; os fundamentos dás rendas; o dás annuidades, e o dás Tontinas, e das mais notaveis Loterias; mas deſſas obſervações naõ ſe deduzio nada a

reſ-

respeito dos annos climatericos, e depois de tantos seculos de ruido ficáraõ inteiramente esquecidos, excepto daquelles Authores, que ainda depois se cançáraõ em impugnallos com huma laboriosa erudiçaõ, e mal empregada critica, sem ao menos suspeitarem, que por meio d'aquellas Listas, e algumas bréves comparações de calculo, poderiaõ logo mui facilmente conhecer o que certamente a este respeito succede no curso da nossa vida, e evitar nesta materia os seus taõ frustrados trabalhos.

Para acabar logo de huma vez o que este assumpto ha tantos seculos tem causado de disputas, determinei-me a consultar a Natureza naquelles seus taõ curiosos arquivos, naquellas observações taõ notaveis, e naõ me foi preciso grande trabalho para alcançar logo a resposta, que buscava. Começando pelo primeiro anno da nossa existencia dividindo pelo numero dos mortos o dos que ficaõ em vida, e continuando assim esta divisaõ até ao ultimo termo da idade mais avançada, que se acha naquellas Listas, pude logo haver desta forma a expressaõ da vitalidade respectiva a todos os annos da vida. Observando entaõ todas as variações desta expressaõ desde o primeiro até ao ultimo termo desta carreira de tanta lida, vim a conhecer os tempos das maiores perdas da nossa especie, os lugares dos seus mais perigosos caminhos, e entaõ encontrei os verdadeiros annos climatericos certamente naõ imaginados, nem ficticios, mas sim aquelles degráos, e decadencias da vida, onde toda a nossa especie vai encontrar com os seus mais arriscados dias, como se pode vêr na Taboa, que ajunto a este escrito, que já com huma obra minha sobre semelhante materia foi impressa em París no Diario Estrangeiro, por assim m'o ter pedido o celebre Abbade Prêvot, primeiro Author dessa obra periodica.

Naõ he pois por combinações de numeros, nem em razaõ dos seus encontros em mysteriosos productos, que a Natureza nos poem naquelles taõ graves perigos, nem tam-

tambem o caminho, que ella nos determina, he nos ſeus decretos de tal forma invariavel, que naõ haja differenças mui notaveis nos intervallos dos tempos, e nas occurrencias dos riſcos. Naõ he poſſivel olhar para eſta materia em toda aquella extençaõ, a que o eſpirito logo alcança, ſem ſahir dos limites da Fyſica, e ſem entrar nos vaſtos, e indeterminados eſpaços da magnifica Ontologia. Mas nem eſte lugar nos permitte excursões taõ deſmedidas, nem a minha confiança he taõ grande, que me atreva a romper por alli novos caminhos. Deixemos o que eſtá para lá do véo para nós ſempre taõ eſcuro, e vejamos taõ ſómente o que para cá nos fica, o que póde ſer examinado, e bem ſeguramente viſto. Vejamos como os annos climatericos, ſendo em qualquer Paiz bem conhecidos por meio de huma ſerie de obſervações dos que annualmente morrem, podem ſer de grande importancia na theorica, e na pratica da Medicina: ſegundo aquella Taboa das minhas obſervações ſobre eſta materia acima referidas, vemos que a paſſagem de 24 para 25 annos he climaterica para a Cidade de Breslau; pois que em vez de hum, de que devêra diminuir a potencia da vida a continuar naquella meſma perda, que ſucceſſivamente em todos os annos antecedentes tinha tido, contados desde o tempo da puberdade, naõ diminue de 1 como devêra diminuir para ſer igualmente ſeguida, mas ſim de 4, 66; decadencia certamente mui notavel neſſe paſſo da vida por ſer maior de 3, 66, que aquella que ſe obſerva em todos os referidos annos precedentes, donde com toda a evidencia ſe conclue, que ha em Breslau huma cauſa certa de conſtante, e regular effeito em maior mortandade naquelle tempo da vida; e daqui por conſeguinte mui facilmente ſe infere, que os perigos das enfermidades, quaesquer que fórem as cauſas, ſaõ entaõ na meſma razaõ maiores, que os de cada hum dos annos, que a precedêraõ, contados incluſivamente desde o primeiro anno da puberdade. E ſe ſe fizerem os meſmos diſcurſos a reſpeito de todas as mais decadencias em

em outros espaços da vida, marcados naquella sobredita Taboa, ver-se-ha, que quanto aos maiores perigos saõ em tudo bem conformes na continuaçaõ dos resultados, e que daqui se tiraõ differentes appreciações, com que deve ser tratada a Doutrina das probabilidades da vida, sobre que agora por me faltar o tempo naõ posso dizer mais nada. Fazendo semelhantes observações nas Listas da mortalidade de Londres, e servindo-me daquellas mesmas investigações sobre a expressaõ da vitalidade, ou potencia da vida, durante o progresso da nossa successiva existencia; vi, que aquelles desfallecimentos, aquellas subitas decadencias, succediaõ da mesma sorte naquella Capital, e que os annos climactericos se manifestavaõ alli igualmente por semelhantes estragos, sem outra differença, que a que se encontra no numero, e na variaçaõ dos degráos da escada da vida, como se póde vêr na folha impressa, que contém a Taboa das observações de Breslau, onde tambem separadamente se acha huma pequena Taboa dos annos climactericos de Londres.

Depois daquellas observações, que mostraõ a existencia dos annos climactericos, era mui facil pensar, que pois havia annos climactericos, e a esta indagaçaõ se applicáraõ varios sugeitos em diversos Paizes da Europa, e particularmente em Suecia, e em França, onde se tem visto serem mais favoraveis para humas idades o mez de Dezembro, e os cinco primeiros do anno, e para outras os do principio do Outono, servindo sempre á idade de 15 annos de termo commum para a comparaçaõ dessas differenças. Se a estas observações, que formaõ a baze de huma especulaçaõ notavel, ajuntarmos as de Sydenham sobre a circulaçaõ das enfermidades periodicas pelos quatro conhecidos espaços do anno, que ordinariamente mostraõ as passagens mais sensiveis dos caractéres do anno fysico, teremos huma nova materia de Fysiologia, certamente muito mais recommendavel, e muito mais digna de ser attendida, que outras tratadas com mui particular cuidado

na profissaõ da Medicina, e que seguramente naõ merecem nenhuma attençaõ em quanto se naõ justificaõ melhor as suas utilidades, como por exemplo, aquella que no tempo de certas fases da Lua tanto escrupuliza na pratica.

Saõ bem evidentemente conhecidos os annos climactericos, e os diversos gráos dos seus perigos, demos agora consolaçaõ a muita gente dizendo, que ha certos tempos na vida, em que a nossa vitalidade recebe huma certa porçaõ de alentos, e naõ corre taõ grandes riscos: a estes espaços da vida, que se poderáõ vêr naquellas referidas Taboas chamei anticlimactericos em razaõ do beneficio. Depois de huma tal consolaçaõ tambem parece bem digno de ser sabido, que esses anticlimactericos se achaõ mais repetidos naquellas povoações, onde em commum he menor a potencia da vida, como se acha marcado nas mencionadas Taboas, e que cada hum poderá logo vêr comparando os resultados destas observações dos annos anticlimactericos com as do termo da idade mais avançada, segundo as sobreditas Listas de Breslau, e de Londres.

Mas depois que se publicáraõ aquellas indagações sobre os annos climactericos, qual he o uso que disto se tem feito, naõ de tudo o que aqui digo, porque quasi tudo agora aqui he novo, mas de algumas couzas a respeito desta materia, e que por meio dessa obra periodica fôraõ logo bem conhecidas? Pelo que até agora tem chegado á minha noticia, tudo se acha como estava, e parece que este assumpto tem passado como couza só de pura curiosidade. Só Mr. *Mobeau* no seu excellente Tratado da populaçaõ da França, impresso alguns annos depois de apparecerem as minhas considerações sobre aquelle assumpto no mencionado Diario, se applicou a dar em alguns lugares daquella sua obra taõ util varias Taboas de observações sobre os mezes, e as Estações climactericas, e em nada mais esta materia se tem adiantado. Bem considero, que se tivesse entaõ tratado dos annos climactericos, como agora aqui faço, mostrando á Fysiologia por este caminho

hum

hum novo auxilio, esta materia naõ ficaria talvez para o bem geral facilmente esquecida; mas quando isto mesmo assim succedêra, tambem naõ me admiraria; pois que estou vendo, que huma das Nações mais illustradas, que tanto se distingue no bem da humanidade em largas especulações, e grandes calculos politicos, ainda para o beneficio, que pode tirar de semelhantes observações, naõ tem dado os primeiros passos. De Inglaterra fallo, e particularmente da sua Capital, onde a nossa especie recebe, mais que em nenhuma outra parte da Europa, os maiores estragos. Alli morre logo no primeiro anno da vida quasi a terceira parte dos que nascem, e nada até hoje se tem praticado para se evitarem perdas taõ graves, naõ parecendo isso de nenhuma forma impossivel.

Fundados sobre taes principios, diremos a respeito desta mesma Naçaõ huma estranha novidade, diremos que por essa causa, por taõ grandes perdas logo nos primeiros annos da vida, ella fica mui diminuta em forças; e que suppostas faculdades iguaes entre essa, e outra qualquer Naçaõ, que se ache com a mesma populaçaõ, sempre ficará da parte da outra Naçaõ a vantagem, que depender do effeito de hum maior numero de individuos empregados em acções do maior vigor. Varias couzas pudéra eu dizer a este respeito, mas tudo reduzirei aos ditos termos necessarios de huma só comparaçaõ. Pelo que ultimamente se tem observado em França se sabe, que ametade da populaçaõ desse Reino se acha de vinte annos para cima, e a outra ametade dos mesmos annos para baixo; e pela Lista da mortalidade de Londres consta, que de 1280 pessoas, que nascem, passados vinte annos já naõ existem mais que 462, isto he, taõ sómente a terça parte dos que vieraõ ao Mundo. Donde he facil de vêr as gravissimas perdas, que teria Inglaterra, se a populaçaõ das outras Cidades, e a dos Campos soffrêra semelhantes estragos. Mas para que esses sejaõ já mui notaveis bastaráõ taõ sómente os de Londres, onde de 800000 pessoas, que nascem, passados vinte annos, faltaõ

faltaõ 553517, numero igual aos dois terços de toda a sua populaçaõ, supposta esta de 800000 almas; em lugar do que París, suppondo-lhe a mesma populaçaõ, aproveita nesse mesmo tempo mais de 150000 pessoas uteis aos empregos da Paz, e da Guerra.

Em fim pelo que manifestámos neste papel, que a populaçaõ de qualquer Paiz he na razaõ directa da potencia de vida, e pelo que agora acabámos de mostrar, podemos seguramente fazer esta insolita proposiçaõ: Que as forças de hum Estado naõ se devem reputar pela sua actual populaçaõ, como até hoje tem calculado todos os Authores de Economia politica, mas sim pelo numero de individuos capazes de o defender, ou de o servir nos empregos de vigor mais uteis: proposiçaõ que para ser admittida como certa, e infallivel naõ he preciso mais que annuncialla.

Naõ tive tempo para acabar esta memoria como eu tinha pensado, e queria; e fica para outra occasiaõ o tratar da Linha Curva das Economias politicas, cuja descripçaõ com as instrucções do seu uso porá logo debaixo de huma simples vista as comparações, e correspondencias mais importantes sobre huma materia taõ util.

NOTA.

Entre os papeis do Sr. José Joaquim Soares de Barros, se naõ achou copia, nem mesmo borraõ algum de Memoria, ou outro qualquer genero de escrito, em que tratasse da Linha Curva, de que falla neste lugar: nem mesmo nos consta, que se achasse apontamento algum seu sobre esta materia.

ME-

TABOA CONSTRUIDA SOBRE AS OBSERVAÇÕES DE BRESLAW

Idades.	Pessoas.	Mortos.	Potencia de vida.	Annos climatericos de	Idades.	Pessoas.	Mortos.	Potencia de vida.	Annos climatericos de	Annos climatericos para a Cidade de Londres.
1	1000	145	6,89		43	417	10	41,70		12 p.ª 13
2	855	57	21,00		44	407	10	40,70		20 p.ª 21
3	798	38	24,00		45	397	10	39,70		24 p.ª 25
4	760	28	27,14		46	387	10	38,70		29 p.ª 30
5	732	22	33,27		47	377	10	37,70		39 p.ª 40
6	710	18	39,44		48	367	10	36,70		75 p.ª 76
7	692	12	57,66		49	357	10	32,37	49 p.ª 50	
8	680	10	68,00		50	346	11	31,42		Anticlimatericos.
9	670	9	74,44		51	335	11	30,46		
10	661	8	82,62		52	324	11	29,46		43 p.ª 44
11	653	7	93,31		53	313	11	28,46	An. anticlimaterico.	47 p.ª 48
12	646	6	107,66	12 p.ª 13	54	302	11	30,20	54 p.ª 55	54 p.ª 55
13	640	6	106,66		55	292	10	29,20		61 p.ª 62
14	634	6	105,66		56	282	10	28,20		70 p.ª 71
15	628	6	104,66		57	272	10	27,20		76 p.ª 77
16	622	6	103,66		58	262	10	26,20		
17	616	6	102,66		59	252	10	25,20		
18	610	6	101,66		60	242	10	24,20		
19	604	6	100,66		61	232	10	23,20		
20	598	6	99,66		62	222	10	22,20		
21	592	6	98,66		63	212	10	21,20		
22	586	6	97,66		64	202	10	20,20		
23	580	6	96,66		65	192	10	19,20		
24	574	7	82,00	24 p.ª 25	66	182	10	18,20		
25	567	7	81,00		67	172	10	17,20		
26	560	7	80,00		68	162	10	16,20		
27	553	7	79,00		69	152	10	15,20		
28	546	7	78,00		70	142	11	12,20	70 p.ª 71	
29	539	8	67,38	29 p.ª 30	71	131	11	11,91		
30	531	8	66,39		72	120	11	10,91		
31	523	8	65,38		73	109	11	9,91		
32	515	8	64,38		74	98	10	8,80		
33	507	8	63,36		75	88	10	7,80		
34	499	9	55,44	34 p.ª 35	76	78	10	6,80		
35	490	9	54,44		77	68	10	6,80		
36	481	9	53,44		78	58	9	6,44		
37	472	9	52,47		79	49	8	6,12		
38	463	9	51,44		80	41	7	5,66		
39	454	9	50,44		81	34	6	5,60		
40	445	9	49,44		82	28	5	7,66	An. anticlimaterico.	
41	436	9	48,44		83	23	3		83 p.ª 84	
42	427	10	42,70	42 p.ª 43	84	20				

MEMORIA

Sobre o Reſtabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento.

POR MANOEL DO ESPIRITO SANTO LIMPO.

POUCAS luzes de Tactica Naval baſtaõ para ſe reconhecer, que a maior difficuldade neſta Arte conſiſte no reſtabelecimento da ordem, depois de mutaçaõ de vento. Se as regras, que haõ de praticar-ſe em taes occaſiões, naõ forem claras, e de facil, e prompta execuçaõ, difficultoſamente deixará de perſiſtir por muito tempo a confuſaõ, da qual reſultará neceſſariamente ou retardaçaõ na expediçaõ, a que ſe deſtina a Armada, ou conſequencia ainda mais funeſta, achando-ſe preſente Armada inimiga de melhor diſciplina. Eſtes inconvenientes haõ de infallivelmente repetir-ſe mais vezes ſe acontecer, que para o reſtabelecimento da formatura, em que mais frequentemente ſe navega, ſe preſcrevaõ regras de ſemelhantes defeitos: eſta formatura he ſem dúvida a Quinta Ordem de Marcha, pois que as primeiras tres difficultaõ a communicaçaõ dos ſignaes por demaſiadamente extenſas, e a quarta exige tempo conſideravel para ſe reduzir á ordem de batalha; e he com effeito para o reſtabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento, que grande parte dos Tacticos tem propoſto manobras longas, vagas, obſcuras, difficeis, e erroneas. Eu moſtrarei na primeira parte deſta Memoria a verdade da ultima aſſerçaõ, accreſcentando as correcções, de que algumas das ditas manobras ſaõ ſuſceptiveis; e exporei na ſegunda os methodos verdadeiramente Geometricos, que propõe Mazaredo para reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha, havendo alarga-

gado o vento; estabelecendo anticipadamente os principios, em que elles saõ fundados, por via de applicaçaõ da Algebra á Geometria, em lugar de usar de simplices construcções geometricas, como o seu Inventor. Por este meio, sem dúvida mais fecundo, acharei facilmente mais verdades que aquellas, de que faz mençaõ o dito Author.

PRIMEIRA PARTE.

MOrogues, cuja authoridade entre os da proffissaõ he bem notoria: Morogues, que se explica menos vagamente, e com mais clareza do que outros, manda manobrar no restabelecimento da Quinta Ordem de Marcha do mesmo bordo, alterada por haver alargado o vento, da maneira seguinte:

I. » Si le vent vient peu de l'arriere (fig. I.),..... » la colomne du vent diminuera de voiles, celle du milieu » conservera sa voilure, & la colomne de sous le vent forcera de voiles. Le premier Vaisseau (A) de la colomne » du vent tiendra le vent; & les têtes (B, C) des colomnes de sous le vent, observant leur distance, viendront insensiblement au lof en se tenant par le travers » du chef de file du vent. Les Vaisseaux de chaque colomne ayant même voilure que le Vaisseau de leur tête, ou » plus-tôt une voilure qui leur procure un sillage égal, se » mettront successivement dans ses eaux. L'ordre rétabli, » on corrigera les distances. »

II. » Mais si le vent vient beaucoup de l'arriere,.... » la colomne du vent mettra en panne (fig. II, III, IV.). » La colomne de sous le vent forcera de voiles dans la » perpendiculaire à la nouvelle ligne du plus-près; & » quand le Vaisseau (C) de la tête de cette colomne relevera le chef de file (A) de la colomne du vent qui sera en panne, à 4 rumbs au vent de la ligne du plus-près, il reviendra tout à fait au lof (D), & sa colom-

» ne

» ne y viendra également au même point, & dans ses eaux.
» La colomne du milieu manœuvrera de la même maniere
» que l'Escadre de sous le vent, observant de ne point
» parvenir au point (E), où son premier Vaisseau doit en-
» tierement venir au lof, avant que la tête de la colomne
» de sous le vent soit elle même parvenue au point, où el-
» le doit serrer le vent; elle fera donc très petites voi-
» les, & mettra même en panne s'il est nécessaire, en at-
» tendant que le chef de file (C) de sous le vent soit
» parvenu au point (G) par son travers, & alors les deux
» colomnes forceront également de voiles au plus-près. En
» fin lorsque les têtes (F, H) des colomnes de sous le
» vent tenant le vent, seront parvenues ensemble dans la
» perpendiculaire du plus-près par le travers du premier
» Vaisseau (A) de la colomne du vent; alors celle-ci fera
» servir dans la ligne de la panne, pour que ses Vaisseaux
» courent largue en se rendant dans les eaux de leur tê-
» te (A) qui tiendra le vent. Par cette manœuvre, qui est
» la moins longue, & la moins confuse qu'on puisse exe-
» cuter, les Vaisseaux ne perdront point au vent, & re-
» prendront aisément leur distance en se relevant. »

Por ventura por se distinguirem entre si as vozes *pouco*, e *muito* ficaõ por isso distinctos os dous casos, que se consideraõ na soluçaõ precedente? E as idéas representadas pelas mesmas duas vozes, naõ se referem ellas a huma unidade, ou grandeza intermedia, que parece offerecer hum terceiro caso? Ou se este terceiro caso se póde comprehender indifferentemente em qualquer dos outros dous, naõ será necessario determinar o limite em augmento do *pouco*, e o limite em diminuiçaõ do *muito*, ao menos para distincçaõ delles?

Talvez se diga que quando se naõ especifica a unidade, a que se refere o pouco, e o muito, se deve entender por termo de comparaçaõ o estado medio, que no caso actual he de cinco quartas. Poderá tambem lembrar, que a figura, a que o Author refere a descripçaõ da manobra

(fig.

(fig. I.), aſſás moſtra, que o pouco naõ paſſa de 15.° Finalmente talvez lembre dizer, que naõ ha inconveniente em ampliar-ſe o muito, e diminuir-ſe o pouco como bem ſe quizer, e que por tanto naõ he indiſpenſavel a determinaçaõ de ſeus limites.

Mas offerecendo-ſe conjecturas taõ diverſas, a qual dellas ſe dará preferencia? A vacillaçaõ ceſſa por algum tempo, achando-ſe em Mazaredo eſtas palavras: *Alargandoſe el viento una cantidad pequeña, que debe entenderſe haſta dos quartas, ò poco màs.* Como porém a ſimples authoridade em couſas de razaõ he de pouco momento, brevemente ſe torna ao primeiro eſtado de dúvida. Com a luz da Geometria deſapparecem por fim as trévas. Ella moſtra, que a manobra mencionada em ſegundo lugar (II.) ſe naõ póde verificar em todas as ſuas partes, comprehendendo-ſe no *muito* quatro quartas; e que he abſolutamente impoſſivel a ſua execuçaõ, querendo-ſe comprehender no meſmo *muito* menos de 45°: conſequentemente vem a ſer quatro quartas o limite em augmento do pouco, e o limite em diminuiçaõ do muito para ſer praticavel a doutrina de Morogues em todas as circumſtancias. Ella moſtra com igual evidencia, que as diſtancias das columnas ſe naõ alteraõ com a dita manobra havendo alargado o vento oito quartas, e que ficaõ diminutas havendo alargado mais ou menos de 90°, naõ obſtante affirmar Mazaredo nos ſeus *Rudimentos de Tactica Naval*, que quando o vento alarga menos de oito quartas ficaõ as diſtancias das columnas com incremento. Paſſemos pois a manifeſtar eſtas verdades.

A figura II. repreſenta a evoluçaõ para o caſo, em que o vento tem alargado oito quartas. Será logo indicada a nova linha de bolina *AI*, ou *DL* pela linha de frente *CBA*; os chefes de fila *B*, *C* ſeguiráõ as ſuas derrotas *BE*, *CD*; e devendo ſer em *D* o angulo *ADH* de 45° pela deſcripçaõ da manobra (II.), e o angulo *CDH* de 90°, ſeraõ os angulos *ADC*, *CAD* de 45° cada hum, e por conſequencia *CD* = *AC*. Mas o angulo *CAH* he de 90°, por de-

quaes o navio *A* lhes demore quatro quartas *AEF*, *ADH* a barlavento da nova linha de bolina. A figura *AHDO* he hum quadrado, cujo lado *AO* he menor que *AC*, e por essa razaõ a nova linha de frente *AH*, ou *IL* tem menor extensaõ que a primitiva *AC*.

Da illustraçaõ precedente se conclue facilmente, que he de absoluta necessidade determinar o *pouco* (I), e o *muito* (II.) da regra de Morogues, e acrescentar o caso intermedio, para que o seu methodo seja praticavel no todo, ou só em parte em quaesquer circunstancias da questaõ actual: devem logo considerar-se os tres casos seguintes:

I. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento menos de quatro quartas.*

II. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de quatro quartas.*

III. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento quatro quartas.*

No primeiro caso, póde manobrar-se como prescreve Morogues para quando o vento alarga pouco; no segundo, como estabelece para quando o vento alarga muito; e no terceiro, da mesma sorte que no segundo, supprimindo-se aquella parte da regra, em que se ordena, que os testas das duas columnas de sotavento naveguem por direcções perpendiculares á nova linha de bolina, sendo seguidos pelos demais navios das mesmas columnas por movimento successivo.

A pezar das precedentes correcções se naõ consegue dar perfeiçaõ ao methodo que Morogues nos propõe. Se o vento alarga entre duas, e quatro quartas, tem os navios das duas columnas de sotavento que correr arcos consideraveis antes de ganharem o travez dos seus correspondentes da columna de barlavento; e se naõ he muito facil conservar os navios em seguimento por hum rumo determinado, como vem advertido no num. 35 do *Compendio de Manobra de Navio*, que dei á luz para instrucçaõ dos Alumnos da Real Academia da Marinha, mais difficil será sem dú-

dúvida conservar regularidade por caminho curvelineo (*). Esta he, certamente, a razaõ, por que Mazeredo naõ estende o *pouco* senaõ a algum tanto mais que duas quartas, ainda que naõ adverte no impossivel que se segue de incluir no *muito* menos de quatro. Será logo mais conveniente manobrar nestas circunstancias como no ultimo dos tres casos, considerados precedentemente; e por tanto deve a questaõ dividir-se, e resolver-se da fórma seguinte.

I. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento naõ mais de duas quartas.*

II. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de quatro quartas.*

III. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de duas quartas, sem passar de quatro.*

No primeiro caso se manobra como determina Morogues para quando o vento alarga pouco. No segundo como prescreve para quando o vento alarga muito. E no terceiro da mesma sorte que no segundo, supprimindo-se parte da manobra, como já fica advertido; isto he: as duas columnas de barlavento atravessaõ; o testa da columna de sotavento cinge o vento, e he seguido por movimento successivo pelos demais navios da sua columna; e quando o dito testa chega a pôr-se pelo travez do chefe de fila da columna do centro, marêa este á bolina, e he seguido pelos demais navios da sua columna por movimento successivo: a columna de barlavento se regúla pelas outras duas, como a do centro se regulou pela de sotavento. As duas columnas de sotavento restabelecem as distancias. [*L'Art des Armées Navales par le P. Hoste*, *Troisieme Partie*, §. V., II., *Remarque* 1.]. Se Morogues que soube, fallando ge-

(*) Considero o horizonte como hum circulo, em cujo centro se acha o navio, e os rumos como outros tantos raios do mesmo circulo: por tanto supponho nulla a curvatura dos arcos, por que caminhaõ os navios, quando seguem o mesmo rumo. Esta supposiçaõ he admissivel no espaço a que se póde estender huma evoluçaõ.

ralmente, diſtinguir no Tratado do P. Hoſte o verdadeiro util do deſneceſſario, o luxo da theorica do indiſpenſavel na prática, deixou de adoptar nas circunſtancias do terceiro caſo eſte modo de manobrar, foi certamente porque ſe perſuadio da generalidade do methodo, que nos propôs para quando o vento alarga *muito* (II.), e naõ por querer eſtender o *pouco* (I.) a quatro quartas; porque tal intenſaõ naõ póde haver ſem ſe reconhecer o impoſſivel que patenteámos, e occultallo depois de reconhecido ſería indeſculpavel.

Naõ ſería tambem deſacerto ſubdividir o ſegundo caſo em tres, attendendo a que nelle tem humas vezes os teſtas das duas columnas de ſotavento que arribar do alinhamento primitivo de bolina das ſuas reſpectivas eſquadras, outras que orçar, e outras em fim em que tem que continuar as ſuas derrotas para ſe dirigirem aos lugares, aonde devem cingir o vento. Deſta ſorte ficaria a queſtaõ dividida como ſe ſegue:

1.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento naõ mais de duas quartas.*

2.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento oito quartas.*

3.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento mais de oito quartas.*

4.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento entre oito e quatro quartas.*

5.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento mais de duas quartas ſem paſſar de quatro.*

No 1.° e 5.° caſo naõ ha que advertir. No ſegundo porém devem os teſtas das duas columnas de ſotavento ſeguir as ſuas derrotas até aos pontos, em que ſe haõ de pôr á bolina na conformidade da regra de Morogues para quando o vento alarga muito (fig. II.).

No terceiro orçaõ os ditos teſtas quanto for o exceſ-

ſo

ſo da quantidade, que o vento tiver alargado, ſobre oito quartas (fig. IV.).

No quarto finalmente devem arribar quanto oito quartas excederem a quantidade, que o vento houver alargado (fig. III.).

Depois de tantas, e taõ neceſſarias correcções, eſtá bem longe de merecer toda a approvaçaõ ſemelhante modo de manobrar. Se o vento alarga naõ mais de duas quartas, tem os navios das duas columnas de ſotavento que caminhar por arcos, antes de ganharem o travez dos ſeus correſpondentes da columna de barlavento; e ſe o vento alarga entre duas e oito quartas, ou mais de oito, ficaõ as diſtancias das columnas diminutas: e ainda que na prática ſeja facil corrigir tal defeito, como affirma Morogues, quando diz: *& reprendront aiſement leur diſtance en ſe relevant* (II.), com tudo em rigoroſa theorica he intoleravel. Além diſſo, a generalidade de huma evoluçaõ he que lhe dá toda a elegancia, a facilidade, e promptidaõ lhe fazem merecer toda a preferencia. No methodo precedente devem conſiderar-ſe ao menos tres caſos, que exigem tres modos diverſos de manobrar: naõ he logo geral. Quando o vento alarga oito quartas, o chefe de fila *C* (fig. II.) de ſotavento tem que caminhar, antes de ſe reſtabelecer a formatura, pelas rectas *CD*, *DL*, cuja ſomma he quaſi igual á extenſaõ das tres columnas; he logo nimiamente vagaroſa a evoleçaõ neſte caſo, como tambem naquelles, em que o vento alargar mais de oito quartas. E ſe o vento alarga quatro quartas, ou entre quatro e oito naõ fica, certamente, expedita; pois que no primeiro caſo tem que correr o chefe de fila *C* (fig. V.) da columna de ſotavento mais de ametade da extenſaõ da Armada, antes do reſtabelecimento da ordem, por ſer o lado *CH* do quadrado *AHCO* maior que ametade do comprimento de huma columna, como he facil de reconhecer, repreſantando por a o comprimento de huma columna, por x o lado do quadrado *AHCO*, e advertindo que a linha de frente *AC* he igual

igual a $\frac{5}{6}a$ [*Tactique Navale de Morogues*, I. *Partie*, *Chap.* II. n. 28.], donde se deduz $x = \frac{5a}{\sqrt{72}}$; e no segundo caso tem que caminhar espaços ainda maiores, chegando estes a ser em algumas circunstancias pouco menores que a extensaõ das tres columnas: naõ tem logo promptidaõ. Este he com-tudo aquelle methodo de que Morogues affirma ser o mais curto, quando diz: *Par cette manœuvre, qui est la moins longue, & la moins confuse qu'on puisse executer*, &c. (II.). Passemos a expôr os de Mazaredo, para que cada hum delles se possa confrontar com as manobras precedentes.

SEGUNDA PARTE.

MAzaredo, que tambem naõ adopta o methodo, que acabei de analysar, naõ por haver conhecido o impossivel que se encontra na manobra em alguns casos, mas taõ sómente pela razaõ de se alterarem por via delle as distancias das columnas, ainda que a alteraçaõ, que ellas soffrem, quando o vento alarga menos de oito quartas, se lhe representasse de huma maneira erronea, nos propõe dous modos de manobrar no restabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, depois de haver alargado o vento, que merecem sem dúvida toda a preferencia. A excellencia de hum delles consiste em caminharem os navios direitamente para os lugares, que haõ de occupar na nova formatura; e os principios, em que ambos se fundaõ, saõ os seguintes:

I. PRINCIPIO.

Caminhando á bolina dous navios em linha de travez, e havendo-se esta alterado por ter alargado o vento, restabelecer-se-ha o dito travez de bolina, em igual distancia, para se na-

ve-

vegar com amuras do mesmo lado, atravessando o navio que se achava a barlavento antes da mudança do vento, e seguindo o outro hum rumo, que diste igualmente da primitiva, e da nova linha de bolina.

Seja *A* (fig. VII.) o navio que estava a sotavento antes da mudança do vento, *B* o de barlavento; *AD*, *BC* o rumo de bolina primitivo perpendicular á linha de travez *AB*; *F* a origem primitiva do vento, e *G* o ponto para onde se suppõe ter elle alargado. Forme-se no ponto *B* da recta *BG* o angulo *CBG* igual a seis quartas, e tire-se do ponto *A* a recta *AD'* parallela a *BC'*: levante-se do ponto *B* a recta *BE* perpendicular a *BC'*, corte-se della a parte *BH* igual a *AB*, e tire-se a recta *AH*.

Sendo por construcçaõ *BC'*, ou *AD'* o novo rumo de bolina, e *BH*, que he igual a *AB*, a nova linha de travez, será *AH* o rumo que deve seguir o navio *A* para restabelecer o travez de bolina com o navio *B*, em distancia *BH*, igual á primitiva *AB*.

Represente *m* a mudança angular do vento *FBG*, ou *ABH*; *x* o angulo *BAH*, ou *AHB*: será $2x + m = 16$ *quartas*, e $x = 8$ *quartas* $- \frac{1}{2}m$. Mas he o angulo $BAD = 8$ *quartas*: logo o angulo *DAH* será igual a 8 *quartas* $-$ (8 *quartas* $- \frac{1}{2}m) = \frac{1}{2}m$, como se queria demonstrar.

COROLLARIOS.

1.° Pelo mesmo methodo poderáõ os navios *A*, *B* restabelecer o travez de bolina, em distancia igual, para navegarem amurados do outro lado, quando o vento houver escaceado. Viraráõ de bordo simultaneamente, suppondo-se que se seguia á bolina rumo opposto ao primitivo, e se acharáõ no caso do *Principio* estabelecido: o navio *B* será eixo do movimento.

2.° Se o vento salta para o outro bordo, e depois de suppor-se, que se navegava á bolina com amuras contrarias, se deva considerar o vento como havendo alargado, po-

dem pelo mesmo methodo os navios *A*, *B* restabelecer o travez de bolina, em distancia igual, para navegarem amurados do outro lado. Supponha-se que se navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, faça-se *A* eixo do movimento, e manobre o navio *B* como manobrou o navio *A* no caso do Principio.

3.° Se o vento salta para o outro bordo, e depois de suppor-se que se navegava á bolina com amuras contrarias, se deva considerar o vento como havendo escaceado, podem os navios *A*, *B* restabelecer pelo mesmo methodo o travez de bolina, em igual distancia, para navegarem amurados do mesmo lado. Viraráõ de bordo simultaneamente, suppor-se-ha que se seguia á bolina rumo opposto ao primitivo, e se acharáõ no caso do Principio demonstrado: o navio *A* será eixo do movimento.

II. PRINCIPIO.

Se dous navios navegarem á bolina naõ em linha de travez, mas sim indo o de barlavento mais adiantado que o de sotavento em alinhamento tal, que forme constantemente o mesmo angulo agudo com a direcçaõ de bolina, que segue o navio de sotavento, e havendo-se este alterado por ter alargado o vento, restabelecer-se-ha o dito alinhamento, ou o dito angulo agudo, em distancia igual, para se navegar com amuras do mesmo lado, atravessando o navio que se achava a barlavento antes da mudança do vento, e arribando o outro [quando naõ seja necessario orçar, ou continuar a mesma derrota] da sua primeira linha de bolina oito quartas, menos o angulo agudo mencionado, e menos ametade da mudança angular do vento.

Seja *B* (fig. VIII.) o navio que estava a barlavento antes da mudança do vento, *A* o de sotavento; *AD*, *BC* o rumo primitivo de bolina, que fórma com o alinhamento *AB* dos dous navios o angulo *BAD* agudo, e o angulo *ABC* obtuso, supplementos entre si; *F* a origem primitiva do vento, e *G* o ponto para onde se suppõe ter elle alarga-

do.

do. Forme-se no ponto *B* da recta *BG* o angulo *C'BG* de seis quartas, e no ponto *B* da recta *BC'* faça-se o angulo *C'BE* igual ao angulo *ABC*: corte-se da recta *BE* a parte *BH* igual a *AB*, e tire-se a recta *AH*.

Sendo por construcçaõ *BC'* o novo rumo de bolina, e estando *BH*, que he igual a *AB*, inclinada sobre *BC'*, como *AB* sobre *BC*, será *AH* o rumo que deve seguir o navio *A* para restabelecer em *H* o seu alinhamento primitivo com *B*, relativamente á linha de bolina, em distancia igual *BH*.

Represente m a mudança angular do vento *FBG*, ou *ABH*; x o angulo *BAH*, ou *AHB*; e r o angulo agudo *BAD*, de que se fez mençaõ no enunciado do Principio actual: será $2x + m = 16$ *quartas*, e $x = 8$ *quartas* $- \frac{1}{2} m$: he logo o angulo $DAH = 8$ *quartas* $- r - \frac{1}{2} m$; como se queria demonstrar.

COROLLARIOS.

1.° A expressaõ do angulo *DAH* indica que o navio de sotavento *A* (fig. IX.) deve orçar, em lugar de arribar, quando os termos negativos $- r - \frac{1}{2} m$ derem huma somma que exceda o valor do termo positivo 8 *quartas*; e tanto quanto for o dito excesso.

2.° Ella mostra igualmente que o navio de sotavento *A* deve continuar a sua derrota primitiva quando $- r - \frac{1}{2} m$ for igual a 8 *quartas*.

3.° Tambem se deduz da mesma expressaõ, que quando r for igual a 8 *quartas* deve orçar o navio de sotavento ametade da mutaçaõ angular do vento; o que concorda com o I. Principio (*).

4.°

(*) Ainda que o primeiro Principio seja hum Corollario do segundo, eu estabeleci aquelle independentemente deste; naõ tanto por imitar Mazaredo, como por ter que deduzir do primeiro alguns Corollarios, dous dos quaes naõ podem verificar-se sempre no segundo Principio, como se adverte no 4.° Corollario, que agora se segue.

4.° Ella mostra com igual clareza, que quando r for maior que 8 *quartas*, deve necessariamente orçar o navio de sotavento, pois que entaõ se verifica, como no Corollario precedente, o que se advertio no 1.° Corollario. Mas na hypothese actual, naõ he sempre praticavel o restabelecimento do alinhamento primitivo dos dous navios pelo methodo prescrito; porque o navio de sotavento naõ póde orçar, para pôr-se em seguimento, mais do que a mudança angular do vento: determinemos pois a condiçaõ dos casos possiveis.

Pelo Corollario primeiro tem que orçar o navio de sotavento a quantidade angular $r + \frac{1}{2}m - 8$ *quartas*: logo $r + \frac{1}{2}m - 8$ *quartas naõ* $> m$, ou r *naõ* > 8 *quartas* $+ \frac{1}{2}m$ he a condiçaõ, que deve verificar-se para que o caso seja possivel.

EXEMPLOS.

Seja $r = 9$ *quartas*, e m = *huma quarta*. Feita a substituiçaõ ter-se-ha 9 *quartas naõ* $>$ 8 *quartas e meia*; o que he absurdo.

Seja $r = 9$ *quartas*, e $m = 10$ *quartas*. Feita a substituiçaõ ter-se-ha 9 *quartas naõ* $>$ 13 *quartas*: he logo possivel.

Seja r *naõ* $> 90°$; será necessariamente r *naõ* $>$ 8 *quartas* $+ \frac{1}{2}m$: he por tanto caso possivel.

5.° Se na mesma expressaõ do angulo DAH (fig. VIII.) suppozermos $r = 0$, o que se verifica quando o navio A for nas agoas do navio B, ter-se-ha $DAH =$ 8 *quartas* $- \frac{1}{2}m$; e por tanto deve entaõ arribar o navio A do seu alinhamento primitivo com B, oito quartas, menos ametade da mutaçaõ angular do vento; o que concorda exactamente com huma das regras, que se costumaõ prescrever nos livros de Tactita Naval, para se restabelecer a Ordem de Batalha da mesma amura, depois de haver alargado o vento.

Estabelecidos pois os dous Principios, e seus Corollarios,

rios, passarei agora a expôr os Methodos de Mazaredo, fazendo anticipadamente huma advertencia.

ADVERTENCIA.

Quando o vento alargar (o que se entende até dez quartas), ou escacear (o que se entende até seis), direi que o vento alargou, ou escaceou no primeiro meio circulo; e quando o vento saltar para o outro bordo, direi que alargou, ou escaceou no segundo meio circulo, conforme o vento se puder considerar como havendo alargado, ou escaceado, suppondo-se, que se navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas. Desta maneira se podem enunciar os diversos casos clara, e distinctamente.

PRIMEIRO METHODO.

O primeiro methodo de Mazaredo, que, ainda que geral na theoria, naõ deve com tudo estender-se na prática a mais de cinco quartas, póde applicar-se, dando-lhe por outra parte a ampliaçaõ possivel, aos quatro casos seguintes.

I. CASO.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento no primeiro meio circulo naõ mais de cinco quartas.

O chefe de fila *A* (fig. X.) da columna de barlavento atravessa, e os demais navios da mesma columna arribaõ *oito quartas, menos ametade da mudança do vento* (Cor. 5.° do II. Princ.), para irem metter-se com *A* na nova linha de bolina *AB*, aonde atravessaõ. Os chefes de fila *C*, *D* das columnas de sotavento restabelecem o travez de bolina com o de barlavento *A*, *seguindo o rumo* CE, DF, *que dista igualmente da primitiva, e da nova linha de bolina* (I. Princ., ou Cor. 3.° do II. Princ.): os demais navios, havendo no-

tado cada hum delles a que rumo lhe demora o eixo da evoluçaõ *A*, como todos ſe achavaõ a ſotavento, antes da mudança do vento, e mais atrazados relativamente ao meſmo eixo, manobraõ huns na conformidade do II. Principio, arribando da ſua primeira linha de bolina *oito quartas, menos o angulo agudo* (*r*), *menos ametade da mudança do vento*; outros orçando *quanto oito quartas forem excedidas pelo angulo agudo* (*r*), *ſommado com ametade da mudança do vento*, ſe o caſo o pedir; advertindo que a arribada, ou a orçada he nulla nas circunſtancias mencionadas no Corollario 2.º do ſegundo Principio. A' medida que os navios vaõ chegando aos ſeus lugares atraveſſaõ, para eſperarem que o cabo de fila *H* da columna de ſotavento chegue a alcançar o ſeu, fazendo força de véla: logo que o conſegue marêaõ todos á bolina com as amuras primitivas.

II. Caso.

Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo alargado o vento no ſegundo meio circulo naõ mais de cinco quartas.

Supponha-ſe que ſe nevegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, e manobre-ſe como no caſo precedente, ſendo eixo da evoluçaõ o Chefe de fila *D* da columna, que eſtava a ſotavento antes da mudança do vento.

III. Caso.

Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo eſcaceado o vento no primeiro meio circulo naõ mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo ſimultaneamente; ſuppõe-ſe que ſe ſeguia á bolina rumo oppoſto com amuras contrarias ás primitivas: e manobre-ſe como no primeiro caſo, ſendo eixo da evoluçaõ o navio *G*, que era cabo de fi-

fila da columna de barlavento, antes de ſe ter virado de bordo.

IV. CASO.

Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura havendo eſcaceado o vento no ſegundo meio circulo naõ mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo ſimultaneamente; ſuppõe-ſe que ſeguia á bolina rumo oppoſto com as amuras primitivas; e manobra-ſe como no primeiro caſo, ſendo eixo da evoluçaõ o navio *H*, que era cabo de fila da columna *DH*, que actualmente ſe acha a barlavento, antes de ſe haver virado de bordo.

ESCOLIO.

Se o vento alarga no primeiro meio circulo menos de quatro quartas, he poſſivel, e poderá ſer conveniente manobrar como ſe diſſe no III. caſo. Se alarga menos de quatro quartas no ſegundo meio circulo he poſſivel, e poderá ſer vantajoſo manobrar como no IV. caſo. Se o vento alargar quatro quartas ſeja no primeiro, ou no ſegundo meio circulo, virando ſimultaneamente de bordo todos os navios, e pondo-ſe todos logo á bolina, ficará a ordem reſtabelecida. Se o vento ſaltar para além da prôa ſeis quartas, baſta mudar de amuras para a ordem ſe reſtabelecer.

Eſte he o methodo mais prompto, que póde imaginar-ſe para ſe reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento naõ mais de cinco quartas; pois que o caminho mais curto entre dous pontos he o rectilineo; e a recta que ſe tirar do lugar, que hum navio occupa no principio de huma evoluçaõ, para o que deve occupar depois della executada, he ſenſivelmente a meſma couſa que o arco de Loxodromia, ou de circulo maximo comprehendido entre os ditos lugares. Eu naõ fiz mais do que dar huma fórma mais regular aos Principios,

pios, em que elle he fundado; pôr em equaçaõ o angulo *DAH* (fig. VII, VIII.) com a sua expressaõ para deduzir facilmente as consequencias que o Author menciona, e outras naõ de menos importancia, como as do 4.°, e 5.° corollario do II. Principio; e dizer de que maneira se estende a applicaçaõ do dito methodo aos casos, em que o vento alarga no segundo meio circulo naõ mais de cinco quartas, como tambem a aquelles, em que o vento escacêa no primeiro, ou no segundo meio circulo naõ mais de huma quarta.

Fiz esta applicaçaõ do primeiro methodo de Mazaredo aos casos, em que o vento escacêa naõ mais de huma quarta em hum, ou outro meio circulo, naõ tanto para se praticar em taes occasiões, como para descrever a manobra, a que algumas vezes se deve dar preferencia alargando o vento entre duas e quatro quartas, ou menos, seja no primeiro, ou no segundo meio circulo, como adverti no Escolio, e para repetir mais vezes, que o dito methodo se naõ deve adoptar quando o vento alarga mais de cinco quartas em qualquer dos meios circulos.

A fig. X. representa distinctamente a evoluçaõ no caso de haver alargado o vento cinco quartas no primeiro meio circulo. O rectangulo *AGHD* indica a formatura primitiva, *AFIB* mostra a ordem restabelecida. A recta *HI*, medida da duraçaõ da manobra, he pouco maior que o comprimento de huma columna. Os navios naõ se confundem nos seus movimentos, e nenhum delles se vê precisado a separar-se do seu rumo para naõ atracar com outros. Naõ succederia porém a mesma cousa querendo-se applicar o mesmo methodo, ainda que geral na theoria, a seis, e mais quartas.

O rectangulo *ALMN* representa a ordem restabelecida, depois da alteraçaõ occasionada por haver saltado o vento para a poppa. A distancia *HM*, que mede o tempo da evoluçaõ, he pouco maior que o comprimento de duas columnas. Mas sería necessario que a materia fosse pe-

ne-

netravel para que alguns navios já atravessados, ou proximos a atravessar nos seus respectivos lugares, naõ obstassem ás derrotas que outros seguem, dirigindo-se para os seus lugares, que se achaõ mais remotos. E querendo-se evitar semelhante inconveniente, proporcionando cada hum dos navios o seu panno á distancia que tem que correr, persistiria sempre constrangimento nos movimentos, confusaõ na evoluçaõ, e risco de abordagens. Para evitar estes inconvenientes se faz indispensavel outro modo de manobrar quando o vento alargar mais de cinco quartas.

SEGUNDO METHODO.

Pelo segundo methodo de Mazaredo se restabelece a Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento, atravessando a columna de barlavento para esperar, que os testas das columnas de sotavento restabeleçaõ o travez de bolina com o chefe de fila da de barlavento, caminhando cada hum delles pelo rumo medio entre a primitiva, e a nova linha de bolina, na conformidade do I. Principio, e sendo seguidos por movimento successivo pelos demais navios das columnas respectivas. Este segundo methodo, ainda que geral, tanto na theorica, como na prática, deve adoptar-se sómente quando o vento alargar mais de cinco quartas, e só pela razaõ de naõ ser entaõ conveniente a prática do primeiro, que he o mais curto de quantos podem imaginar-se. Os quatro casos considerados acima, por occasiaõ do primeiro methodo, offerecem outros quatro ao segundo.

I. CASO.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de cinco quartas no primeiro meio circulo.

A columna de barlavento *AD* (fig. XI.) atravessa; os

testas *B*,*C* das columnas de sotavento caminhaõ (forçando de véla o ultimo *C*) pelo rumo medio *BE*,*CF* entre o primitivo *BG*, *CH*, e novo rumo de bolina *AI*, e saõ seguidos por movimento successivo pelos demais navios das suas columnas *BG*, *CH*; e quando os ditos testas *B*,*C* chegaõ aos pontos *E*, *F*, aonde restabelecem o travez de bolina com o testa *A* da columna atravessada (I. Princ.), cingem todos tres o vento, e saõ seguidos por movimento successivo pelos demais navios das columnas respectivas.

II. CASO.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo alargado o vento no segundo meio circulo mais de cinco quartas.

Supponha-se que se navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, e manobre-se como no caso precedente, sendo eixo no restabelecimento do travez de bolina dos tres chefes de fila *A*, *B*, *C*, o testa *C* da columna, que estava a sotavento antes da mudança de vento.

III. CASO.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo escaceado o vento no primeiro meio circulo mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo simultaneamente: suppõe-se que se seguia á bolina rumo opposto com amuras contrarias ás primitivas; e manobra-se como no primeiro caso, sendo eixo no restabelecimento do travez de bolina dos tres novos chefes de fila *D*, *G*, *H*, o testa *D*, que era cabo de fila da columna de barlavento antes de se ter virado de bordo.

IV.

IV. CASO.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo escaceado o vento no segundo meio circulo mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo simultaneamente; suppõe-se que se seguia á bolina rumo opposto com as amuras primitivas; e manobra-se como no primeiro caso, sendo eixo no restabelecimento do travez de bolina dos tres novos chefes de fila *D*, *G*, *H*, o testa *H*, que era cabo de fila da columna *CH*, que actualmente se acha a barlavento, antes de se haver virado de bordo.

ESCOLIO.

Se o vento salta para a pôppa, como entaõ se póde considerar o vento como havendo alargado no primeiro, ou no segundo meio circulo, manobrar-se-ha como no I., ou no II. caso, conforme for conveniente. Se salta para a prôa, póde manobrar-se como no III., ou IV. caso, pois que entaõ se póde considerar o vento como havendo escaceado no primeiro, ou no segundo meio circulo.

Ainda que fiz applicaçaõ do segundo methodo de Mazaredo ao terceiro, e ao quarto caso, em que o vento se suppõe haver escaceado mais de huma quarta em hum, ou outro meio circulo, naõ he minha intençaõ preferir a prática delle em taes circumstancias, assim como a naõ tive de adoptar o primeiro methodo, quando o appliquei aos casos, em que o vento se suppoz ter escaceado naõ mais de huma quarta em qualquer dos meios circulos: a manobra que prescreve Morogues para se restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, alterada por haver escaceado o vento [*Tactique Navale*, *I. Partie*, *Chap. IX. n.* 80.], he assaz facil, e prompta, naõ obstante haverem-se de restabelecer os travezes dos navios correspondentes, e as distancias

cias

cias das columnas tornadas diminutas. Só tive por fim principal apontar os casos, em que se podem adoptar, sem inconveniente, os ditos methodos, os quaes prefiro ás regras, que referi na Primeira Parte desta Memoria, por prescreverem manobras, que tem os caracteres, que constituem huma evoluçaõ perfeita, quaes saõ *Facilidade*, *Exacçaõ*, *Promptidaõ*, *Generalidade*.

Com effeito no primeiro methodo de Mazaredo ha *facilidade*; porque cada navio segue hum rumo determinado, sem que vá confundir-se com outros navios, alargando o vento naõ mais de cinco quartas, que he o caso em que elle he adoptado. Ha *exacçaõ*; porque as distancias das columnas naõ saõ alteradas. Ha *promptidaõ*, e a maior que he possivel; porque os navios caminhaõ direitamente para os lugares, que haõ de occupar na nova formatura. He *geral* na theoria; e na prática só está sujeito a inconveniente, e naõ a impossivel absoluto, quando o vento alarga mais de cinco quartas.

O segundo methodo de Mazaredo tem *facilidade*, naõ só porque os navios seguem determinado rumo, mas tambem porque basta, que cada hum dos testas das columnas tenha cuidado em caminhar exactamente pelo rumo devido, pois que os demais navios das columnas respectivas vaõ metter-se nas suas agoas por movimento successivo. Tem *exacçaõ*; porque as distancias das columnas naõ saõ alteradas. Tem *promptidaõ*: elle he pelo menos mais curto, do que aquelle que prescreve Morogues para quando o vento alarga muito, se o vento alargar mais de cinco quartas, que he o caso em que elle he adoptado. He *geral* tanto na theoria, como na prática, ainda que se naõ adopte quando o vento alarga naõ mais de cinco quartas, por se dar entaõ preferencia ao primeiro como mais expedito.

Finalmente naõ póde obstar ao primeiro methodo de Mazaredo dizer-se, talvez, que para elle ser excluido da prática basta a obrigaçaõ, que se impõe aos Officiaes, de terem sempre presentes os rumos, a que lhes demoraõ, ou

ou devem demorar os eixos da evoluçaõ *A, D, H, G* (fig. X.), assim como tambem os termos da expressaõ 8 *quartas* — *r* — $\frac{1}{2}$ *m*, de que nem todos poderáõ fazer uso. Porque além de bastarem olhos para se distinguir na bussola a que rumos demoraõ os objectos, e de ser facil de traduzir em linguagem vulgar a dita expressaõ, como se vê no primeiro caso das applicações do sobredito methodo; pelas sábias providencias de S. MAGESTADE na creaçaõ de duas Academias de Marinha, e pelo zelo, que anima todo o Corpo da nossa Marinha Real, podem seguramente contar-se tantas pessoas versadas nas Mathematicas como Officiaes.

OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS, E METEOROLOGICAS

Feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1784

POR BENTO SANCHES DORTA.

ESTE he o quarto anno, que assiduamente observo os fenomenos, que a athmosfera d'este Paiz nos offerece. Neste anno faltaõ as observações do mez de Janeiro, por ainda existir o mesmo obstaculo, que obrigou a naõ se observar o mez de Dezembro do anno de 1783, de cuja causa eu naõ sou culpado: com tudo este anno he mais aventajado pelas observações do Barometro, as quaes se naõ fizeraõ nos tres annos preteritos, pelo motivo de naõ haver este instrumento na Collecçaõ d'elles, que me foi entregue por ordem de S. Magestade em Janeiro de 1781.

Logo que recebi o Barometro, comecei a ter conta com a variaçaõ do pezo da athmosfera; e ainda que esta seja pequena, como ordinariamente succede na Zona torrida, com tudo he muito frequente; e por este motivo vejome obrigado a alterar o plano de observações, que tinha adoptado, isto he, de observar d'aquí em diante oito vezes cada dia, em lugar de sete como pratiquei até agora.

Este Barometro he de huma nova construcçaõ do Senhor Joaõ Jacintho de Magalhães, Correspondente d'esta Academia, o qual na verdade excede em muito aos até agora usuaes: e ainda que o seu verdadeiro objecto seja para medir alturas, eu o consagrei a Meteorologia. Naõ me canço em fazer a sua descripçaõ, pelo ter feito o seu sábio inventor no Tractado, que publicou em Londres no anno de 1779; e só me compete declarar, que este Ba-

rometro he composto de duas escalas huma Franceza, e outra Ingleza, e que eu me sirvo da primeira.

Neste anno succedêraõ fenomenos incomparaveis com os dos mais annos. Nos mezes de Setembro, Outubro, e Novembro subsistio huma nevoa, ou vapor mui denso, que nos occultou de dia o Sol, de noite as Estrellas; de maneira que havendo nestes tres mezes 48 Eclipses dos Satellites de Jupiter visiveis neste Meridiano, eu naõ pude lograr mais de tres no fim de Setembro. Este nevoeiro muitos dias foi humido, lançando hum continuo orvalho; e quando deixava de orvalhar, sempre os Hygrometros indicavaõ grande humidade na athmosfera, e esta tornava-se de côr avermelhada.

No dia 11 do mez de Agosto pelas 7^h da noite formou-se da parte do S. O. hum negrume, e depois de formado começou a inflammar-se, e ao mesmo tempo ouvíraõ-se horriveis trovões: a isto seguio-se chover saraiva em grande quantidade, cujas pedras eraõ do tamanho de amendoas. Toda a noite continuou em chover, e trovejar: na mesma occasiaõ cahíraõ nesta Cidade algumas materias incendiadas, porém gozámos a felicidade de naõ causarem damno.

A 19 do mesmo mez ás 10^h da manhã começou a chover, e continuou sem descanço pelo espaço de 38^h. A 22 o Ceo esteve coberto, e pelas 7^h. $45'$ da noite, principiou todo o Hemisferio a incendiar-se, e tomou huma côr semelhante a hum ferro em braza; e assim permaneceu por tempo de $30'$, no fim dos quaes começou a desvanecer-se pouco a pouco, até total extinçaõ.

Os dias 16, 17, e 18 de Setembro fôraõ notaveis, naõ só pelo muito que choveu continuamente, pois começando ás 8^h da manhã no dia 16, findou no dia 19 ás 4^h da madrugada, completando 68^h; mas pela grande elevaçaõ do mar, pois subio mais do seu ordinario treze palmos: o vento era N. e N. O. A Lua achava-se no

Equi-

Equinoccio ascendente, quero dizer no Signo de Libra em 14° até 26°.

A 5 de Outubro ás 7ʰ da noite tornou a athmosfera a accender-se, como a 22 de Setembro, com a differença que ao passo, que se augmentava a inflammaçaõ, relampejava com maior força, e aceleraçaõ: ás 10ʰ trovejou rijamente em cima d'esta Cidade, e choveu. O Barometro conservou-se todo este tempo na altura de 28 Pol. 4 Lin.

A 15 de Dezembro o mar ao tempo da sua primeira enchente subio mais tres palmos do seu ordinario: o Barometro estava na altura de 28 Pol. 4 Lin., 82: o vento era S.: A Lua achava-se em 3° 28′ do Signo de Aquario; dia e meio pouco mais ou menos antes do seu Perigeu.

O maior calor, que aqui soffremos annunciado no Thermometro de Fahrenheit, foi de 94° (Tab. II.) no dia 9 de Fevereiro ás 2ʰ da tarde: o Ceo estava coberto, e o vento corria de O. Excedeu ao do anno passado em 4° $\frac{1}{2}$.

Até agora ainda o mesmo Thermometro me naõ mostrou gráo de frio, pois he certo que o gráo 55 nesta escala annuncia o temperamento medio do ar, isto he, onde naõ ha calor, nem frio, e toma-se como cifra a respeito do calor: isto posto, no dia 12 de Julho ás 4ʰ, e 6ʰ da manhã vimos o Mercurio estacionar-se a 55°. (Tab. II.) O Ceo achava-se cheio de nuvens, e o vento assoprava de O. O anno de 1783 foi o menor calor de 59°, logo se tivemos mais do que o anno passado 4° $\frac{1}{2}$ de calor, a Natureza nos recompensou dando-nos tambem 4° de mais frio.

A differença do maximo ao minimo calor he 39°.

Foi o calor medio de todo o anno 73°, 72 resultado de 1ϕ005 observações, ou tres cada dia: mas o mesmo calor medio tambem foi de 73°, 6 resultado de 2ϕ345 observações, ou sete cada dia. (Tab. II. e III.)

O

O calor medio da manhã 71°, 1: da tarde 75°, 18.

No tempo, em que se observou, sempre o maior calor foi ás 4^h da tarde (Tab. III.)

As irregularidades, que este anno vimos no Thermometro, as demonstramos nas tres linhas curvas *AB*, *CD*, e *EF*, que mostra a estampa, que vai aqui inclusa. O eixo das curvas, ou as Abscisas mostraõ o tempo, e as Ordenadas a altura: a primeira e maxima ordenada de Fevereiro vai dividida em gráos para servir d'escala.

Nestes onze mezes do anno houveraõ 43 dias claros, 151 variaveis, 90 nublados, 50 cobertos, 48 de relampagos sem se ouvirem trovões, 40 de trovoada, 133 de chuva, 133 de nevoa, 4 de Aurora Austral, e 12 de Luz Zodiacal. (Tab. IV.)

A quantidade d'agoa, que choveu (Tab. V.) foi $50^{Pol.}$ $1^{Lin.}$, 4. Dezembro he o mez, em que mais choveu, Fevereiro o de menos chuva.

A vaporaçaõ (Tab. V.) chegou a $17^{Pol.}$ $8^{Lin.}$, 4. Dezembro foi o mez de maior vaporaçaõ, Agosto o de menos.

A chuva excedeu a vaporaçaõ em $32^{Pol.}$ $3^{Lin.}$

O vento dominante de manhã foi variavel, e N.O.; de tarde S.E. quasi constante. (Tab. VI.)

A trovoada deixou-se ouvir a 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, e 15 de Fevereiro; a 8, 10, e 11 de Março; a 12, e 13 de Abril; a 4, 5, 22, e 31 de Julho; a 12 de Agosto; a 6, 7, 11, e 13 de Setembro; a 3, 5, 28, e 30 de Outubro; a 14, 19, 20, 21, e 22 de Novembro; a 1, 2, 13, 22, 24, 26, 27, e 31 de Dezembro.

A Aurora Austral appareceu a 7, e 25 de Julho; a 10 de Agosto, e a 30 de Dezembro: a de 25 de Julho, e 10 de Agosto foraõ mui luminosas, as outras com luz fraca.

Luz Zodiacal vio-se a 22 de Fevereiro; a 20 de Abril;

a 11, e 18 de Maio; a 6, 13, 15, 16, e 19 de Julho; a 7 de Agoſto; a 30 de Setembro, e a 31 de Outubro.

O maior calor medio, que concorreu com os pontos Lunares, (Tab. VII.) foi no 2.° quarto, e no 2.° Oitante. O menor no Perigeu, e 1.° Oitante. O maior numero de dias chuvoſos no Equinoccio aſcendente, e Luniſtico Auſtral, o menor no 1.° quarto, Apogeu, e 4.° Oitante.

Vento dominante SE. em todos os pontos Lunares. (Tab. VII.)

Nos cinco mezes, que obſervei o Barometro (Tab.I.) chegou a ſua maior altura a $28^{Pol.}\ 7^{Lin.}$, 6; a media $28^{P.}\ 3^{L.}$, 24; a menor a $27^{Pol.}\ 10^{Lin.}$, 7.

Differença da maxima á minima altura $8^{Lin.}$, 9

A maior declinaçaõ Oriental da Agulha-magnetica foi de 6° 57′, a 8 de Março ás 4^{h} da tarde: o Ceo eſtava coberto, e chovia: o Thermometro achava-ſe em 83°, e o vento aſſoprava do SE. (Tab. IX.)

A menor foi de 6° 23′ a 31 de Outubro ás 6^{h} da manhã: o Ceo nublado: o Thermometro em 75°: o vento N.

Declinaçaõ media de todo o anno 6° 37′ 54″, reſultante de 1ɸ005 obſervações: mas a meſma declinaçaõ tambem foi de 6° 37′ 42″, reſultante de 2ɸ345 obſervações. (Tab. X.)

Declinaçaõ media da manhã (Tab. IX.) 6° 35′ 59″: ao meio dia 6° 38′ 53″: de tarde 6° 38′ 1″.

No dia 14 de Outubro a Agulha-magnetica perdeu o ſeu equilibrio inclinando-ſe para o Pólo do Sul. Naõ determinei o angulo, que fazia com o horizonte, pela falta de inſtrumento competente; pois o naõ ha na Colleçaõ, que ſe me confiou. &c.

Obſer-

Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter, feitas com hum Oculo achromatico de Dolond *de* 17 *pollegadas de foco, que augmenta os objectos quasi* 70 *vezes.*

Anno 1784	Satellites.	Tempo verdadeiro. Hor. Min. Seg.	Circunstancias das observações.
Março. 29	2.°	16 2 40 Im.	Ceo pouco sereno, o Planeta ondeando por causa de algum vapor.
Abril. 3	3.°	15 9 12 Im.	. . . . pouco sereno, e muito Luar.
Maio. 9	1.°	14 19 17 Im.	. . . . muito cheio de vapores; as faxas do Planeta naõ se percebiaõ.
9	3.°	14 56 50 Em.	Idem.
23	1.°	18 6 12 Im.	Ceo pouco sereno, porém as faxas do Planeta bem visiveis.
25	2.°	13 7 4 Im.	. . . . muito sereno.
Junho. 8	1.°	16 18 53 Im.	Idem.
17	1.°	12 39 14 Im.	Idem.
24	1.°	14 31 2 Im.	Idem.
26	2.°	12 48 46 Im.	Ceo pouco sereno.
28	3.°	15 18 44 Im.	Ceo pouco sereno.
Julho. 3	1.°	10 51 13 Im.	Idem.
3	2.°	15 24 28 Im.	Ceo sereno.
17	1.°	14 37 12 Im.	. . . muito sereno, as faxas do Planeta bem distintas.
19	1.°	9 5 20 Im.	. . . pouco sereno, o Planeta ondeando por causa dos vapores da athmosfera, e da pouca altura acima do horizonte.
21	2.°	9 54 22 Im.	. . . muito sereno, as faxas do Planeta bem vizives.
24	1.°	16 30 55 Im.	Idem.
26	1.°	10 58 47 Im.	Ceo pouco sereno. . .
Agosto. 9	1.°	14 48 15 Im.	. . . muito sereno, as faxas do Planeta percebiaõ-se perfeitamente.
10	3.°	15 20 22 Im.	Idem.
11	1.°	9 17 0 Im.	Ceo pouco sereno.
11	2.°	17 46 12 Im.	Ceo pouco sereno.
15	2.°	7 5 20 Im.	. . . sereno.
27	1.°	9 54 18 Em.	. . . sereno, o Satellite sahio mui proximo do Planeta.
Setemb. 26	1.°	12 13 22 Em.	. . . sereno, o Planeta bem claro.
28	1.°	6 42 44 Em.	Idem.
30	2.°	15 3 17 Em.	Ceo muito pouco sereno.

Anno 1784	Satellites.	Tempo verdadeiro. Hor. Min. Seg.	Circumstancias das Observações.
Dezẽbr. 3	3.°	8 5 35 Im.	. . . sereno, as faxas do Planeta bem visiveis.
3	3.°	11 18 40 Em.	... pouco sereno, Plan. mal terminado.
6	1.°	7 30 36 Em.	... sereno, porém muito vento, que fazia tremer o Oculo.
29	1.°	7 36 19 Em.	. . . muito sereno.
Eclipse do Sol observado, antes do seu Occaso 23'			
Fever. 20	Principio do Eclipse.	5 51 14	Esta determinaçaõ naõ he muito exacta, por estar o Sol muito proximo do Horizonte.
Observaçaõ do Eclipse parcial da Lua.			
Março. 6	Principio do Eclipse.	11 22 5	O Ceo estava semeado com muitas nuvens.
	Fim do Eclipse.	13 44 10	. . . . .
	Fim da penumbra.	13 48 0	Naõ observei macula alguma, por causa de muitas nuvens.

Em 8 de Janeiro de 1784 ás 9^h da noite descobri por casualidade á vista simples hum Cometa entre as Estrellas γ do Pavaõ, e α do Tocano, igualmente distante de huma, e outra, tendo passado de dia pelo Meridiano: eu continuei a vêllo até o dia 25 do dito mez. A sua cauda me pareceu ser pouco mais ou menos de 6°.

Eu achava-me neste tempo distante desta Cidade 12 legoas, sem instrumento algum capaz de poder determinar a sua verdadeira posiçaõ: porém recolhendo-me depois, o observei nas noites de 22, 23, 24, e 25; e o comparei com a Estrella β da Baleia. Eu reservo para outra occasiaõ tratar destas observações.

Ha quem affirme nesta Cidade ter visto este Cometa no dia 1. de Janeiro ás 3^h da manhã; de que eu naõ fico por fiador: mas sendo isto assim podemos colligir, que já apparecia em Dezembro de 1783.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

FEVEREIRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	78°,16	80°,5	81°,66	.	1,5	Nublado, e trovões.
2	Var.	S.	79,16	81.	81,66	.	0,75	Variavel, e trovões.
3	Var.	S.	78,66	80.	82,83	0,3	0,75	Nub. trov., e orvalho.
4	Var.	S. E.	79,33	82,5	83,33	.	1	Var., e trovões.
5	N. O.	S. E.	83,41	88,25	89,41	.	1,5	Var., e relampagos.
6	Var.	Var.	83,75	87.	86.	.	1,5	Nub., e trovões.
7	Var.	Var.	80,66	83.	83,33	0,2	1	Var., trov., e orvalho.
8	N.	S. E.	82,66	89.	90,66	.	2	Nub., e trovões.
9	Var.	O.	85,16	89,5	92,16	.6	2,5	Var., trov., e chuva.
10	S.	Var.	78,66	78.	77,5	1,25	.	Cob., e chuva.
11	Var.	S.	73,83	75.	74,25	1	.	Idem.
12	Var.	S.	74,16	75.	74,83	10	.	Cob., relamp., e chuva.
13	Var.	S. E.	74,16	76.	77,66	0,3	0,8	Nub., relamp., e orvalho. A Lua com ſua corôa.
14	N.	S. E.	77,5	79.	80,5	.	1	Var., e relampagos.
15	Var.	S. E.	78,5	80.	82.		1,5	Var., e trovões.
16	N.	S. E.	78,16	81,5	83,33	.	1,4	Nub., e relamp.
17	Var.	S. E.	79,16	83.	84	.	2	Clar., e relamp.
18	N. O.	S. E.	80.	82,5	83,66	.	1,8	Clar., e nevoa.
19	Var.	S. E.	79,66	81,5	83,16	.	1,7	Nub., e nevoa.
20	Var.	S. E.	78,66	80,5	83.	.	1,8	Idem.
21	N. O.	S. E.	78,75	81,5	83,16	.	2	Nub., e relamp.
22	N. O.	S. E.	79,33	83.	86,66	.	2	Clar., e relamp. Luz-Zodiacal 3h 30′ da madrugada.
23	N. O.	S.	81,66	84.	84,33	1	1,8	Var., relamp., e chuva.
24	Var.	S. E.	79,16	81.	81,16	3	0,6	Idem.
25	N. O.	S. E.	76,33	77.	77,33	0,4	0,5	Idem.
26	N. O.	S. E.	74,16	75.	75,16	0,2	0,5	Nub., e orvalho.
27	Var.	S. E.	74.	74.	74.	.	0,6	Nub.
28	Var.	S. E.	72,16	74,5	74,33		1	Clar.
29	N.	S. E.	73,33	74,5	79.	.	0,8	Idem.

Buſſola no dia 2, 6° 45′ 50″; no dia 8, 6° 40′; no dia 13, 6° 36′ 27″. no dia 16, 6° 41′ 23″; no dia 25, 6° 32′ 33″; e no dia 30, 6° 30′.

DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	73,5	77.	79,5	.	0,8	Nub., e nevoa.
2	N. E.	S. E.	76,83	80.	83.	.	1,5	Var., e nevoa.
3	Var.	S. E.	77,66	81,5	85,16	.	1,5	Var., e relampagos.
4	Var.	S. E.	78,83	84.	84,5	.	2	Nub., e nevoa.
5	Var.	S. E.	79,33	82.	85.	.	2	Var., e nevoa.
6	Var.	S. E.	79.	82,5	85,83	.	2,4	Nub. nevoa, e relampagos.
7	N. E.	S. E.	82,33	85.	86,33	.	2,5	Nub., e nevoa.
8	Var.	S. E.	81,58	83.	83.	2	1	Nub. trovões, e chuva.
9	Var.	S. E.	79,33	81.	82,33	.	1,5	Var. nevoa, e relampagos.
10	N. O.	S. E.	78,66	80.	81,33	1	1	Var. trovões, e chuva.
11	N. E.	S.	78,66	80.	81,5	7	0,3	Cob. trovões, e chuva.
12	Var.	L.	75,83	76.	76.	5	.	Cob., e chuva.
13	S. E.	S. E.	75,33	77.	77.	4	.	Var., e chuva.
14	N. E.	S. E.	76,33	78.	78,66	.	0,5	Nub., e nevoa.
15	L.	S. E.	75,66	76,5	77,33	0,4	0,6	Cob., e orvalho.
16	N.	S.	76,83	79,5	78,33	4	.	Var., e chuva.
17	Var.	S. E.	73,66	76.	77,33	0,2	0,6	Var., e orvalho.
18	L.	S. E.	75,16	77.	76,66	.	1	Nub., e nevoa.
19	L.	S. E.	75.	77.	78.	.	1	Clar.
20	Var.	S. E.	72,66	76.	78.	.	0,5	Clar., e nevoa.
21	L.	S. E.	73,5	76.	77,66	.	1	Var.
22	N.	S. E.	74,33	77.	76,66	.	0,4	Nub., e nevoa.
23	L.	Var.	73,66	77.	77,5	.	0,3	Var., e nevoa.
24	N.	S. E.	75,16	77.	76.	0,3	0,3	Cob., e orvalho.
25	N. E.	S. E.	74.	76,25	76,66	.	0,4	Var.
26	Var.	S. E.	73,66	77.	78,66	1,5	0,3	Cob., e orvalho.
27	Var.	L.	74,16	77.	79,83	.	1	Nub., e nevoa.
28	N.	S. E.	75.	79.	80,66	.	1,5	Var.
29	N.	S.	74,33	78,5	79,16	.	1	Idem.
30	N.	S. E.	74,66	78.	79,5	.	0,8	Idem.
31	Var.	S. E.	74.	77,5	78,66	.	0,6	Clar.

Bussola no dia 2, 6° 32′; no dia 8, 6° 41′ 17″; no dia 15, 6° 34′ 53″. no dia 25, 6° 40′ 20″; no dia 26, 6° 34′; e no dia 30, 6° 38′ 37″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

ABRIL de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	N. O.	74,5	78.	80.	.	1,5	Nub., e nevoa.
2	O.	S. E.	77.	78.	78,33	.	0,5	Nub.
3	N. O.	S. O.	72,33	76,5	77,83	.	0,5	Var.
4	Var.	S.	72,82	76.	77,5	.	0,3	Idem.
5	N. O.	S.	71,83	74.	75,33	.	0,3	Var., e nevoa.
6	N. O.	S. E.	72,66	75.	76,66	4	0,2	Var., e chuva.
7	Var.	S. E.	73.	74.	75,66	1	0,2	Idem.
8	Var.	S. E.	74.	76,5	77.	0,4	0,3	Idem.
9	N. O.	S. E.	74,33	78.	79,16	.	0,7	Nub.
10	Var.	S. E.	75,66	78,5	80,66	.	1	Idem.
11	Var.	S. E.	77.	78,5	79,66	.	1,5	Var., e nevoa.
12	N. O.	S. E.	76,83	80.	82,33	2	1,5	Var., trovões, e chuva.
13	Var.	S. E.	77,33	79.	77.	2	.	Idem.
14	Var.	S. E.	73,33	76.	76,16	0,5	0,2	Var., e chuva.
15	Var.	S. E.	73,8	75,5	77,85	.	0,5	Var.
16	Var.	S. E.	75,33	78.	80,33	.	0,5	Var., e relampagos.
17	Var.	S. E.	77,58	81.	82,83	.	1	Clar., nevoa, e relampagos.
18	Var.	S. E.	77,83	81.	82,66	.	1	Clar., e relampagos.
19	Vár.	Var.	78.	80,5	83,5	.	1,5	Clar.
20	N. O.	Var.	78,16	82.	84,33	.	1,5	Nub., e relampagos. Luz-Zodiacal muito forte.
21	N. O.	S. E.	80,75	85.	85,83	1	2	Clar., relamp., e chuva.
22	N. O.	S. E.	78,83	80.	80.	2	.	Cob., chuva, e relamp.
23	Var.	S. E.	78,33	80.	80,66	.	0,4	Var.
24	N. O.	S. E.	79,33	80,5	81,33	.	0,6	Nub., e nevoa.
25	Var.	Var.	79,33	83.	83,16	.	1	Idem.
26	Var.	S.	77,33	79.	77,66	4,5	.	Var., e chuva.
27	N. O.	S. E.	73,5	76.	76.	.	0,2	Nub.
28	Var.	Var.	74,8	75.	75,66	1,5	.	Nub., e chuva.
29	N. O.	O.	72,66	75.	76,66	7	.	Idem.
30	N. O.	O.	72,5	73,75	74,16	1,5	.	Var., e chuva.

Buſſola no dia 3, 6° 32′ 40″; no dia 5, 6° 40′ 33″; no dia 6, 6° 34′ 23″. no dia 25, 6° 42′ 7″; no dia 27, 6° 36′ 20″; e no dia 30, 6° 41′ 20″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MAIO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	N. O.	O.	71.	73.	74,66	0,5	.	Var., e chuva.
2	N.	S. E.	70,66	73,5	75.	.	0,3	Clar., e nevoa.
3	Var.	S.	73.	76,5	78.	.	0,4	Clar.
4	N.	Var.	72,33	76,5	80,16	2.	.	Var., e chuva.
5	Var.	S. O.	69,5	70.	68,5	8	.	Cob., e chuv.
6	Var.	Var.	66,75	68.	69,33	0,7	0,2	Var., e chuv.
7	Var.	Var.	67.	68.	71,33	.	0,3	Nub.
8	Var.	Var.	69,16	71,5	73.	.	0,3	Var.
9	Var.	S. E.	69,91	73.	74,33	.	0,4	Var. A Luá com sua corôa.
10	Var.	S. E.	69,66	72,5	74,66	.	0,4	Clar.
11	N. O.	S.	69,5	72.	73,33	.	0,3	Var. Luz-Zodiacal.
12	N. O.	S. E.	67,83	70.	72,66	.	0,3	Var.
13	S.	S. O.	67,66	69.	69.	3,6	.	Cob., e chuv.
14	S.	S. O.	67.	68.	69,66	0,5	0,2	Idem.
15	Var.	Var.	66,66	69,5	72.	.	0,2	Var.
16	N. E.	S.	69.	72.	72.	0,6	0,3	Var., e alguns orvalhos.
17	Var.	S.	69,5	71.	71,25	.	0,2	Var.
18	Var.	S. E.	69.	71.	72.	.	0,3	Var. Luz-Zodiacal.
19	Var.	S. E.	71,16	71,5	72.	2,5	.	Cob., e chuv.
20	Var.	S. E.	66,66	68.	69,33	.	0,2	Var.
21	N. O.	S. E.	64,16	68.	69.	1	0,2	Var., e chuv.
22	N. O.	S.	67,16	69.	70,66	1	0,2	Idem.
23	N. O.	Var.	67,16	69.	71,16	.	0,2	Nub., e nevoa.
24	Var.	S. E.	67.	69.	71,5	.	0,3	Var., e nevoa.
25	N. O.	S. E.	67.	69,5	72.	.	0,2	Idem.
26	N. O.	S. E.	69.	70,5	71.	0,4	0,2	Var., nev., e orvalho.
27	N. O.	S. E.	70,5	73.	74,16	.	0,3	Nub., e nevoa.
28	Var.	S. E.	72,83	76.	76,83	.	0,4	Nub.
29	N. O.	S. E.	71,66	72,5	74,33	.	0,3	Var.
30	N. O.	S. E.	69,5	70,5	71,66	.	0,3	Idem.
31	O.	S. O.	66,33	69,5	70,33	.	0,3	Clar., e nevoa.

Bussola no dia 1°, 6° 37′ 27″; no dia 10, 6° 45′ 40″; no dia 13, 6° 37′ 13″. no dia 19, 6° 42′ 37″; no dia 29, 6° 35′ 3″; e no dia 31, 6° 38′ 20″.

DIARIO METEOROLOGICO.

JUNHO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	S. O.	O.	67,5	68.	70.	1	0,2	Variavel, nevoa, e chuva.
2	S. O.	S.	66.	68.	70,33	.	0,2	Variavel.
3	Var.	Var.	64,5	68.	70,66	.	0,2	Var., e nevoa
4	Var.	S. E.	65.	69.	71,33	.	0,1	Clar.
5	Var.	S. E.	64,16	68.	69,33	.	0,2	Idem.
6	N. O.	S. E.	64,66	68.	70,66	.	0,3	Idem.
7	N. O.	S. E.	63,66	67,75.	71.	.	0,3	Clar., e nevoa.
8	N.	S. E.	70,16	74.	79,33	.	0,3	Clar. A Lua com sua corôa Luminosa.
9	N. O.	N. E.	73.	75.	80.	.	0,5	Clar.
10	N. O.	N. E.	74.	78.	80,66	.	1,5	Idem.
11	Var.	S. E.	75,66	77.	75.	10	.	Var. nevoa, e chuva.
12	S. O.	S. O.	68,66	66,5	65,33	2	.	Cob., e chuva.
13	S. E.	L.	65,83	67.	67,66	.	0,3	Var.
14	Var.	Var.	66,83	68.	71,16	.	0,2	Nub.
15	Var.	S. E.	66,5	69,5	71,83	.	0,5	Nub., e nevoa.
16	N. O.	Var.	66,66	70.	73,33	.	0,5	Clar., e nevoa.
17	N. O.	Var.	66,5	69,5	73,33	.	0,4	Idem.
18	N. O.	S. E.	71,16	70.	73,33	.	0,5	Nub.
19	N. O.	S. E.	70.	74.	74,33	.	0,5	Clar.
20	N. O.	S. O.	70,33	74.	73,66	6	0,2	Var., e chuva.
21	N. O.	N. O.	68,66	68,5	69,66	.	0,2	Var.
22	N.	S.	66,66	67,5	70.	.	0,2	Idem.
23	Var.	Var.	65.	67,5	69,75	1,5	.	Var., nevoa, e chuva.
24	N. O.	S.	67.	70.	67.	0,4	0,1	Cob., e alguns orvalhos.
25	Var.	S. E.	63,33	65.	66,25	.	0,2	Var.
26	Var.	Var.	63,	64,5	67.	.	0,3	Nub., e nevoa.
27	N. O.	S. E.	63,5	68.	71,33	.	0,3	Clar., e nevoa.
28	Var.	S. E.	65,16	69.	72.	.	0,3	Var., e nevoa.
29	N. O.	S. O.	69,33	69.	68,66	11	.	Cob., nevoa, e chuva.
30	N. E.	S. E.	66.	66.	67.	2	.	Cob., e chuv.

Bussola no dia 3, 6° 34′ 37″; no dia 4, 6° 42′ 13″; no dia 8, 6° 37′ 57″. no dia 13, 6° 44′ 27″; no dia 19, 6° 35′ 20″; e no dia 23, 6° 49′ 20″.

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S. O.	66°,33	68°,25	73°,33	0,6	0,3	Var. com algum orvalho.
2	O.	S. O.	65,83	66.	66.	.	0,2	Var.
3	Var.	Var.	62,5	65.	65,83	.	0,2	Var. A Lua com corôa.
4	Var.	Var.	62,16	66.	72.	6	0,3	Nub., nevoa, e fortissima tormenta de trovões, chuva, e vento.
5	Var.	S. O.	66.	66.	66.	3	.	Cob., trovões, e chuva.
6	O.	S. E.	62,5	64,5	66.	.	0,2	Var. Luz-Zodiacal.
7	Var.	Var.	58.	62,5	67,66	.	0,3	Clar., e nevoa. Aur. Austral bem resplandecente.
8	Var.	S. E.	60,5	64.	68,5	.	0,2	Clar., nevoa, e relampagos.
9	N. O.	S. E.	62,16	70.	72,66	.	0,2	Clar., e nevoa.
10	Var.	S. O.	68,16	70.	70,33	.	0,2	Var.
11	S. O.	S. O.	64,16	68.	70.	.	0,2	Cob.
12	Var.	L.	57,83	64.	66.	.	0,1	Var.
13	Var.	S. E.	59,5	66.	67,66	.	0,3	Clar. Luz-Zodiacal.
14	Var.	S. E.	60.	66,5	69,33	.	0,3	Clar.
15	N. O.	N. E.	63,66	70,5	75.	.	0,3	Clar. Luz-Zodiacal muito luzente.
16	Var.	S. E.	64,66	70.	73.	.	0,4	Var. Luz-Zodiacal.
17	N. O.	N. O.	69.	71.	74,66	.	0,5	Var., e nevoa.
18	N. O.	S.	68,33	72,5	74.	.	0,5	Idem.
19	Var.	S. E.	68,33	73.	75,33	.	0,5	Var. Luz-Zodiacal.
20	N. O.	N. O.	69,5	73.	77,66	.	0,5	Var.
21	N. O.	N.	73,66	76.	80,33	.	0,8	Nub.
22	Var.	N. O.	74.	75.	73,66	6	.	Var., trovões, e chuva.
23	S. O.	S. E.	70,33	71.	73,33	.	0,2	Var., e chuva.
24	Var.	S. E.	66,66	69.	71,66	.	0,4	Var.
25	N. O.	N. E.	65.	72.	76.	.	0,4	Nub., e nevoa. Aur. Aust.
26	Var.	Var.	72,66	76.	81,33	.	1	Nub., e nevoa.
27	Var.	O.	72,33	68.	70.	4	.	Cob., e chuva.
28	O.	S. O.	63,83	66,5	64,66	1	0,4	Var., e chuva.
29	Var.	S.	62.	64.	67.	3	.	Var., e chuva. Neste dia houve huma grande maré.
30	Var.	S. E.	59,5	66,5	71.	.	0,4	Var., e nevoa.
31	Var.	Var.	69,33	70.	71,16	2	0,2	Var., trovões, e chuva.

Bussola no dia 2, 6° 36′ 27″; no dia 5, 6° 45′ 27″; no dia 7, 6° 48′ 20″; no dia 14, 6° 36′; no dia 24, 6° 34′ 37″; no dia 26, 6° 40′ 40″; e no dia 29, 6° 34′ 16″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

AGOSTO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	O.	S.	65,5	67.	66,33	3	.	Var., e chuva.
2	O.	S. O.	61.	64,5	64.	4	.	Idem.
3	Var.	S. O.	61,33	65.	64.	3	.	Cob., e chuva.
4	Var.	L.	61,66	64,5	65,66	.	0,2	Nub.
5	Var.	S. E.	61,66	65.	65,66	.	0,2	Clar.
6	Var.	S. E.	61,16	69.	69.	.	0,3	Idem.
7	N. O.	Var.	65.	68.	72,33	.	0,2	Var. Luz-Zodiacal muito luzente. A Lua com sua coröa.
8	Var.	S. O.	69.	70.	70,83	0,5	.	Var., e chuva.
9	Var.	Var.	68,91	69.	69,33	0,4	0,2	Idem.
10	Var.	S. E.	64,16	70.	71.	.	0,2	Clar., e nev. Aur. Aust.
11	N. O.	S.	65,33	72.	73,33	.	0,2	Var. Fallarei d'este dia em outra parte.
12	Var.	S. O.	69,5	72.	70,33	10	.	Var., e chuva.
13	Var.	S. E.	66.	67.	66,66	0,5	.	Var., e chuva.
14	Var.	S.	60.	66.	68.	.	0,2	Var.
15	N. O.	S. E.	60,66	65.	68.	.	0,3	Clar.
16	N. O.	S. E.	65,83	73.	71,66	.	0,3	Clar., e nevoa.
17	Var.	S. E.	68,66	71.	72.	.	0,3	Var., e nevoa.
18	Var.	N.	72,16	74.	77.	.	0,5	Var., nev., e relampagos.
19	Var.	S. O.	72,66	71.	69.	3	.	Var., e chuva.
20	S. O.	S. O.	64,66	65.	64.	8	.	Cob., e chuva.
21	L.	S.	62,5	64.	63.	2	.	Idem.
22	Var.	Var.	62,66	63,5	64,13	3,5	.	Idem.
23	Var.	L.	66,66	71,5	69,66	.	0,2	Var.
24	N.	Var.	66,33	72.	73.	0,8	0,3	Var., e chuva.
25	Var.	Var.	71.	72.	72,25	.	0,1	Var., e nevoa.
26	Var.	Var.	69,66	72,5	73,66	.	0,3	Var., e nev. A Lua com sua corôa amarella, descorado.
27	Var.	N.	73,66	80,5	77.	.	0,3	Idem.
28	S. O.	S. E.	73,58	74.	73,66	.	0,2	Var.
29	Var.	S.	68,83	70,5	71,83	.	0,2	Idem.
30	Var.	S. E.	69,83	71,25	73.	.	0,2	Idem.
31	N. E.	S. E.	70,33	71,5	75.	.	0,3	Idem.

Bussola no dia 3, 6° 40′ 20″; no dia 8, 6° 33′ 33″; no dia 13, 6° 32′ 27″; no dia 23, 6° 38′ 23″; e no dia 28, 6° 33′ 27″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

SETEMBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	71.	73.	74,66	.	0,2	Nub., e nevoa.
2	Var.	Var.	70,83	73.	76,08	.	0,3	Idem.
3	N. O.	S. E.	72,66	74,5	75,5	.	0,3	Nub.
4	Var.	Var.	71,5	75.	76.	.	0,4	Var.
5	N. O.	S. E.	73,5	75,5	75,58	.	0,4	Nub.
6	N. E.	Var.	73,5	74.	74,83	1	0,3	Var., trovões, e chuva.
7	Var.	Var.	72.	72.	71.	10	.	Cob., trov., e chuv.
8	Var.	S. E.	68,66	69.	68,5	4	.	Cob., nevoa, e chuv.
9	S. O.	Var.	67,33	68.	67,83	5		Idem.
10	Var.	Var.	66,5	67.	66,5	2,5		Idem.
11	Var.	S. E.	64,5	64,5	64,16	7		Cob., trovões, e chuv.
12	N. O.	S. E.	64,83	69.	71.	0,5	0,3	Var., nev., relamp., e orv.
13	Var.	Var.	70,5	71.	71,16	2,5		Cob., nev., trov., e chuv.
14	Var.	S.	66,33	66.	65,66	0,3	0,2	Var., e nevoa, e orvalho.
15	Var.	S. O.	63,33	64,5	65.	0,2	0,2	Idem.
16	N. E.	S. E.	63.	63.	62.	17,5	.	Nev. todo o dia, com seu orvalho.
17	Var.	N. O.	61.	62.	62,33	5	.	Idem.
18	Var.	L.	62,5	64.	63,33	17	.	Idem.
19	Var.	S. E.	63.	65.	64,33	2	.	Idem.
20	L.	S. E.	63,5	66.	65,16	.	0,1	Nub.
21	Var.	S. E.	61,33	67,5	68.	.	0,2	Clar.
22	N. O.	S. O.	71,33	72,5	71,16	3	.	Nub., nevoa, e chuva.
23	Var.	S. E.	66,66	70,5	67,83	0,5	.	Nev. todo o dia, e orvalho.
24	L.	L.	66,66	68.	69.	2	.	Idem.
25	N. O.	O.	69,16	70,5	72,33	2	.	Cob., nevoa, e chuva.
26	Var.	S. E.	69.	70.	70,83	.	0,2	Var., e nevoa.
27	Var.	S. E.	68,66	71,5	72,33	.	0,2	Nub., e nevoa.
28	Var.	S. E.	69,83	71,5	72,33	.	0,3	Idem.
29	Var.	S. E.	69,66	72,5	74,33	.	0,5	Var.
30	Var.	Var.	70,16	75,5	79,16	.	1	Nub. Luz-Zodiacal.

Bussola no dia 1, 6° 35′ 10″; no dia 7, 6° 40′ 50″; no dia 14, 6° 38′; no dia 18, 6° 36′ 47″; no dia 26, 6° 43′ 13″; e no dia 28, 6° 40′ 7″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

OUTUBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	73.	80.	83,33	.	0,5	Nub.
2	Var.	S. E.	74,33	76.	77,16	.	0,3	Nub., nevoa, e relampag.
3	Var.	S.	74,16	75.	73,66	3,5	.	Cob., nev., trov., e chuva.
4	S. E.	L.	66,66	68,5	68.	.	0,3	Cob., e nevoa.
5	Var.	S. E.	67,33	71.	71,33	2,5	.	Nub., nev., trov., e chuv.
6	S. E.	O.	71,16	73.	72.	1	.	Var., nev., relamp. e chuv.
7	Var.	S. E.	68,5	69,5	68,66	0,5	.	Cob., nevoa, e orvalho.
8	Var.	S. E.	69.	71.	71,33	.	0,3	Nub., e nevoa.
9	Var.	S. E.	70,66	73,5	76.	.	0,3	Idem.
10	N. O.	S. E.	73,66	77.	76,66	.	0,4	Nub., nev., e relamp.
11	N. O.	S. E.	76,33	77.	77.	0,5	.	Var., nev., relamp., e chuv.
12	S. O.	S. O.	73.	74.	72,83	3	.	Cob., nevoa, e chuva.
13	S.	S.	69,5	71.	70.	0,3	.	Var., nevoa, e orvalho.
14	Var.	S.	69,5	70.	68,41	4,7	.	Cob., nevoa, e chuva.
15	N. O.	S. E.	69,83	71.	72.	0,8	0,3	Var., nev., relamp., e chuv.
16	N. O.	S. E.	69.	73.	73,16	0,2	0,3	Var., nev., relamp., e chuv.
17	Var.	S. E.	70,16	73.	75,16	0,2	0,2	Idem.
18	Var.	Var.	74,33	85.	78,38	8	.	Idem.
19	Var.	S. O.	64,66	66.	65,62	0,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
20	Var.	Var.	64,66	65,5	66.	.	0,2	Var., e nevoa.
21	Var.	S. E.	64,66	68.	67,92	.	0,3	Idem.
22	N. O.	S.	67.	69,5	70,5	.	0,3	Nub., e nevoa.
23	Var.	S. E.	67,83	71,5	71,75	.	0,3	Var., e nevoa.
24	Var.	S. E.	68,33	72.	74,37	.	0,3	Idem.
25	Var.	S. E.	71,33	73.	74,6	.	0,4	Nub., e nevoa.
26	Var.	Var.	72	74.	75,5	.	0,4	Idem.
27	N. O.	Var.	70,83	75,25	77,56	.	0,4	Idem.
28	N. O.	Var.	75,16	80,5	79.	8	.	Var., nev., trov., e chuv.
29	Var.	Var.	73.	74,5	74,19	.	0,4	Var., e nevoa.
30	S. O.	S. E.	73,5	75,25	76,87	.	0,4	Nub., nev., trov. ao longe.
31	Var.	S. E.	75,58	77,5	79,12	.	0,5	Var., e nev. Luz-Zodiacal.

Bussola no dia 1, 6° 40′; no dia 11, 6° 45′ 13″; no dia 16, 6° 33′ 23″; no dia 22, 6° 37′ 35″; no dia 28, 6° 35′ 8″; e no dia 31, 6° 30′ 7″.

DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	76,33	79.	80.	.	1	Var., e nevoa.
2	Var.	Var.	76,33	78,5	79,25	.	0,8	Nub., e nevoa.
3	Var.	S. E.	76,66	78.	79,62	.	1	Nub., nev., e relampagos.
4	N. O.	Var.	77,33	81,25	80,25	0,3	1,2	Var., nevoa, relampagos, e orvalho.
5	Var.	S. E.	78.	80.	80,75	.	1	Var.
6	Var.	S. E.	76,5	79,5	79,5	.	1	Nub., e relampagos.
7	Var.	S.	75.	76,5	76.	0,4	0,8	Var., nevoa, e orvalho.
8	Var.	S.	73,66	74.	74,65	2	.	Cob., nevoa, e chuva.
9	Var.	S. E.	74,33	75.	75.	2,5	.	Var., nevoa, e chuva.
10	L.	S. E.	74,5	76,5	78,9	4	1	Var., e nevoa.
11	Var.	Var.	77,33	79.	78,75	24	.	Var., nevoa, e chuva.
12	Var.	Var.	76.	77,5	78.	2,5	.	Var., e chuva.
13	N. O.	N. O.	75.	78.	81.	0,5	1,5	Var., relamp., e orvalho.
14	N. O.	N. O.	78,83	82.	82.	1	0,8	Var., trovões, e chuva.
15	Var.	S. E.	78,16	81.	82,12	.	2	Nub., nevoa, e relamp.
16	Var.	S. E.	77,16	78,5	80,22	0,6	1	Var., nevoa, e orvalho.
17	N. O.	S. E.	76,66	78,5	80,62	.	2	Var., nev., e relampagos.
18	Var.	S. E.	79,58	83.	85,5	.	2,5	Idem.
19	Var.	S. E.	82,75	88.	86,12	2	.	Var., trovões, e chuva.
20	Var.	S. E.	81,5	85.	85,12	11	.	Idem.
21	N. O.	S. E.	80,33	82.	82,44	5	.	Idem.
22	Var.	S.	79,91	81,5	81.	16	.	Idem.
23	Var.	S. E.	76,83	78.	78.	0,7	1	Var., e chuva.
24	Var.	S. E.	75,33	78.	80,87	.	1,5	Var., e nevoa.
25	Var.	Var.	79.	79.	77,12	5	.	Cob., nevoa, e chuva.
26	Var.	Var.	73,33	73.	73.	0,2	0,3	Idem.
27	Var.	S. E.	71,16	74.	76,25	.	0,5	Nub.
28	Var.	S. E.	74,16	77.	77,12	2	.	Var., nevoa, e chuva.
29	Var.	S. E.	71,33	73,75	74,12	0,7	0,4	Idem.
30	N. O.	S. E.	72.	73.	75.	4	.	Idem. O mar muito luminoso.

Bussola no dia 1, 6° 31′ 10″; no dia 5, 6° 29′ 2″; no dia 19, 6° 37′ 12″; no dia 25, 6° 32′ 25″; e no dia 30, 6° 35′.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

DEZEMBO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
			°	°	°			
1	Var.	S. E.	73,83	76.	78,37	0,5	1	Nub., trovões, e chuva.
2	N. O.	Var.	76,41	77,5	78.	30	.	Var., trovões, e chuva.
3	Var.	Var.	74,83	76.	76,5	0,4	0,5	Var., e chuva.
4	N. O.	S. E.	70,16	75,5	77.	.	1	Nub.
5	N. O.	S. E.	71,5	75.	77,37	.	1	Nub., e nevoa.
6	N. O.	S. E.	74,66	78.	78,12	.	0,8	Clar.
7	N. O.	S. E.	75,66	79.	80.	.	1	Nub.
8	Var.	S. O.	78,16	79.	79,5	.	0,8	Cob., e nev. O mar ſummamente luminoſo.
9	N. O.	S. E.	77,5	79.	80,22	.	1,5	Var., e nevoa.
10	Var.	S. E.	76,66	79.	80,76	.	1,6	Nub., e nevoa.
11	N. O.	S. E.	76,33	80.	81.	.	2	Nub.
12	Var.	S. E.	77,5	81.	80,75	0	2,5	Var.
13	Var.	S. O.	79,83	82.	81,75	42	.	Var., trovões, e chuva.
14	Var.	S. O.	67,83	69.	68,75	7	.	Cob., e chuva.
15	Var.	S.	66,66	67,5	67.	2	.	Idem.
16	Var.	S. E.	64,5	68.	69,62	.	0,4	Nub.
17	Var.	S. E.	66,83	69.	71,37	.	1	Idem.
18	N.	S. E.	70,16	73.	74,75	0,3	0,8	Var., e orvalho.
19	N.	S. E.	72,83	76.	78,25	.	1,5	Var., e relampagos.
20	Var.	S. E.	76,33	78,5	79,12	0,5	1	Var., nev., e orvalho.
21	N. O.	S. E.	76,5	79.	81,12	.	1,5	Nub., e relampagos.
22	N.	S. E.	80,33	84.	84.	.	2	Nub., e trovões. A Lua com ſua coròa.
23	N.	S. E.	81,16	83,5	83.	.	2	Var., e relampagos.
24	Var.	Var.	79,83	82.	81,9	.	2	Var., e trovões ao longe.
25	Var.	S. E.	78,5	79,5	81,05	.	1,5	Nub., nevoa, e relamp.
26	N. O.	S. E.	78,16	80,5	82,5	5	.	Nub., trovões, e chuva.
27	N. O.	S. E.	79,83	84.	84,75	0,6	3	Var., trovões, e chuva.
28	N. O.	S. E.	80.	83.	83,5	.	2,5	Var.
29	N. O.	S. E.	76,33	80.	80,5	.	3	Idem.
30	Var.	S. E.	76,16	79.	81,5	0,3	3	Nub., nevoa, e orvalho. Aur. Auſt. O mar muito luminoſo.
31	N. O.	S. E.	80,83	87.	85,2	0,6	3	Var., trovões, e chuva.

Buſſola no dia 5, 6° 39′ 15″; no dia 9, 6° 36′; no dia 18, 6° 34′ 13″; no dia 21, 6° 38′ 20″; e no dia 31, 6° 33′ 47″.

BA-

BAROMETRO.

TABOA I.	Elevaçaõ maxima.	Elevaçaõ minima.	Elevaçaõ media.	Elevaçaõ da manhá.	Elevaçaõ ao meio dia.	Elevaçaõ da tarde.
	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.
Agosto	28 6,1	28 1, 1	28 4,33	28 4,53	28 4,53	28 4,21
Setembro.	28 7,6	28 0,75	28 3,97	28 4,14	28 3,95	28 3,77
Outubro.	28 6	27 11, 6	28 3,53	28 3,61	28 3,59	28 3,39
Novembro.	28 4,8	27 10, 7	28 1, 7	28 1,81	28 1,78	28 1,52
Dezembro.	28 5,9	27 11, 2	28 2,68	28 2,87	28 2,65	28 2,52

THERMOMETRO.

TABOA II.	Calor maximo	Calor minimo.	Calor medio do mez.	Calor medio da manhá.	Calor medio ao meio dia.	Calor medio da tarde.
Fevereiro.	94°	71°,5	80°,25	78°,35	80°,69	81°,71
Março.	87	71	78,21	76,07	78,68	79,87
Abril.	86,5	70,5	77,67	75,64	78,18	79,19
Maio.	80,5	63	70,76	68,87	71	72,41
Junho.	82	62,5	69,46	67,29	69,47	71,63
Julho.	82	55	68,47	65,37	68,63	71,32
Agosto.	80,5	58	68,54	66,44	69,39	69,81
Setembro.	80,5	58	69,73	67,75	69,51	69,96
Outubro.	85	62	72,44	70,61	73,25	73,47
Novembro.	88,5	68	78,13	76,51	78, 6	79,28
Dezembro.	88	61	77, 4	75,86	77,55	78,36

Ca-

Calor medio de duas em duas horas.

TAB. III.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 hor. da manhã.	12 hor. da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	do dia.
Fevereiro.	77°,43	78°,17	79°,47	80°,69	81°,65	82°,25	81°,27	80°,17
Março.	75,1	76,01	77,15	78,68	79,7	80,37	79,67	78,1
Abril.	74,8	75,4	76,66	78,18	79,06	79,41	79,08	77,51
Maio.	68,3	68,72	69,58	71.	72.	72,79	72,48	70,7
Junho.	65,8	66,8	67,95	69,47	70,9	71,9	71,31	69,17
Julho.	64,25	64,9	67,14	68,73	70,71	72,56	71,35	68,58
Agosto.	65,3	66,08	68,03	69,39	69,45	70,41	69,53	68,31
Setembro.	67.	67,47	68,78	69,51	70.	70,2	69,53	68,93
Outubro.	69,96	70,51	71,8	73,25	73,62	73,76	73,23	72,4
Novembro.	75,77	76,77	77,5	78,6	79,37	80,2	79,26	78,3
Dezembro.	74,3	75,21	76,56	77,55	79,12	79,22	78,88	77,36

Número dos dias.

TABOA IV.	Claros.	Variaveis	Nublados.	Cobertos.	Relampagos.	Trovões.	Chuva.	Nevoa.	Aurora Austral.	Luz Zodiacal.
Fevereiro.	5	11	10	3	12	9	10	3	*	1
Março.	3	14	9	5	4	3	10	14	*	*
Abril.	5	13	10	2	6	2	12	6	*	1
Maio.	5	15	7	4	*	*	11	7	*	2
Jnnho.	12	9	5	4	*	*	9	12	*	*
Julho.	6	16	6	3	1	4	9	9	2	5
Agosto.	5	20	1	5	1	1	11	6	1	1
Setembro.	1	7	10	12	2	4	18	21	*	1
Outubro.	*	14	11	6	10	4	13	29	*	1
Novembro.	*	19	8	3	7	5	19	19	*	*
Dezembro.	1	13	13	3	5	8	11	7	1	*

Quantidade de chuva, e vaporação.					Ventos dominantes.		
TABOA V.	Chuva.		Vaporação.		TABOA VI.	Manhá.	Tarde.
	Pol.	Lin.	Pol.	Lin.			
Fevereiro.	2	3,65	3	1,8	Fevereiro.	Variavel.	S. E.
Março.	2	5,4	2	9,3	Março.	Var.	S. E.
Abril.	2	7,4	1	8,9	Abril.	Var., e N. O.	S. E.
Maio.	5	3,2	0	7,2	Maio.	Var., e N. O.	S. E.
Junho.	3	3,9	0	8	Junho.	Var.	Var.
Julho.	2	5,6	0	9,3	Julho.	Var.	Var.
Agoſto.	4	7	0	4,9	Agoſto.	Var.	Var., e S. E.
Setembro.	8	2	0	5	Setembro.	Var.	Var., e S. E.
Outubro.	3	3,7	0	6,8	Outubro.	Var.	S. E.
Novembro.	8	0,4	1	9,8	Novembro.	Var.	S. E.
Dezembro.	8	9,2	3	7,4	Dezembro.	Var.	S. E.

Influencia correſpondente aos pontos Lunares.

TABOA VII.	Calor medio.	Ventos dominantes.							
Pontos Lunares.		N.	N. E.	N. O.	S.	S. E.	S. O.	L.	O.
	°								
Lua em conjunção.	73,32	5	5	18	13	28	3	8	2
Lua em oppoſição.	74,16	5	6	15	8	19	8	6	13
I. Quarto.	73,83	9	7	15	4	29	4	4	7
II. Quarto.	75,5	6	10	27	6	24	1	1	3
Apogeu.	73,46	10	6	20	5	36	3	2	4
Perigeu.	72,58	4	9	18	8	38	2	4	5
Luniſtico Auſtral.	73,64	1	7	20	3	32	2	13	7
Luniſtico Boreal.	74,45	8	1	17	5	28	4	14	1
Equinoccio aſcendente.	72,96	6	3	10	16	24	13	2	5
Equinoccio deſcendente.	74,02	12	8	14	12	33	*	5	3
I. Oitante.	72,91	8	6	25	6	22	5	5	2
II. Oitante.	74,45	6	4	16	7	26	3	6	19
III. Oitante.	73,71	3	*	22	8	34	8	10	3
IV. Oitante.	73,14	5	4	23	7	24	6	7	3

Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA VIII.	Numero dos dias.									
Pontos Lunares.	Claros.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relampagos.	Trovões.	Chuva.	Nevoa.	Aurora Auſtral.	Luz-Zodiacal.
Lua em conjunçaõ.	3	5	1	2	*	*	4	4	*	*
Lua em oppoſiçaõ.	*	5	4	2	*	3	5	6	*	*
I. Quarto.	*	5	6	*	1	1	2	4	1	*
II. Quarto.	2	7	2	*	3	2	4	4	*	2
Apogeu.	1	8	2	1	*	2	2	4	*	*
Perigeu.	3	6	3	*	1	1	4	6	*	*
Luniſtico Auſtral.	3	5	3	1	1	2	6	4	*	*
Luniſtico Boreal.	2	3	4	2	2	2	3	5	*	*
Equinoccio aſcendente.	2	5	2	2	*	1	7	6	*	*
Equinoccio deſcendente.	3	8	1	*	4	1	3	4	*	*
I. Oitante.	*	5	4	2	2	*	4	4	*	*
II. Oitante.	*	9	2	1	1	3	5	5	*	*
III. Oitante.	1	3	6	2	*	2	4	4	1	*
IV. Oitante.	2	3	3	3	3	*	2	5	*	1

Declinaçaõ Oriental d'Agulha-Magnetica.

TABOA IX.	Declinaçaõ maxima.	Declinaçaõ minima.	Declinaçaõ media do mez.	Declinaçaõ media da manhã.	Declinaçaõ media do meio dia.	Declinaçaõ media da tarde.
	° ′	° ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
Fevereiro.	6 55	6 25	6 38 16	6 35 59	6 41 28	6 37 20
Março.	6 57	6 27	6 36 30	6 34 16	6 38 34	6 36 39
Abril.	6 52	6 28 30″	6 38 34	6 37 29	6 39 43	6 38 29
Maio.	6 52	6 34	6 39 55	6 39 21	6 41 3	6 39 22
Junho.	6 55	6 33	6 41 53	6 41 16	6 42 39	6 41 43
Julho.	6 52	6 30 30	6 39 19	6 38 58	6 39 31	6 39 28
Agoſto.	6 43	6 27	6 35 26	6 35 46	6 35 19	6 35 13
Setembro.	6 48	6 33	6 39 27	6 39 10	6 39 54	6 39 16
Outubro.	6 46	6 23	6 36 43	6 35 5	6 37 54	6 38 11
Novembro.	6 39	6 26	6 33 43	6 32 42	6 33 59	6 34 28
Dezembro.	6 46	6 31	6 37 13	6 35 50	6 37 47	6 38 1

De-

Declinação media de duas em duas horas.

TAB. X.	6 horas da manhá.	8 horas da manhá.	10 horas da manhá.	12 horas da manhá.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	do dia.
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
Fever.	6 35 57	6 37 21	6 38 7	6 41 28	6 39 27	6 37 11	6 35 0	6 37 47
Março.	6 33 19	6 34 12	6 35 17	6 38 34	6 37 25	6 36 34	6 35 48	6 35 54
Abril.	6 37 28	6 37 24	6 37 15	6 39 43	6 39 8	6 38 48	6 38 30	6 38 20
Maio.	6 39 33	6 39 42	6 38 41	6 41 3	6 40 14	6 39 22	6 38 38	6 39 36
Junho.	6 41 6	6 41 36	6 41 3	6 42 39	6 41 52	6 41 22	6 40 44	6 41 29
Julho.	6 38 48	6 39 10	6 38 55	6 39 31	6 39 35	6 39 44	6 38 58	6 39 14
Agoſto.	6 36 4	6 36 2	6 35 14	6 35 19	6 35 5	6 35 25	6 35 7	6 35 28
Setemb.	6 39 7	6 39 20	6 38 59	6 39 54	6 39 46	6 39 22	6 39 20	6 39 24
Outubr.	6 32 6	6 34 42	6 35 15	6 37 54	6 39 7	6 38 5	6 37 9	6 36 20
Nov.	6 32 58	6 32 14	6 33 7	6 33 59	6 34 31	6 34 38	6 34 26	6 33 46
Dez.	6 35 27	6 36 2	6 36 23	6 37 47	6 38 12	6 38 15	6 37 53	6 37 26

OBSER-

OBSERVAÇÕES
ASTRONOMICAS, E METEOROLOGICAS

Feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1785.

POR BENTO SANCHES DORTA.

Resumo das Taboas das Observações.

1 O Temperamento d'este anno, he quente, e humido: elle he notavel pela athmosfera se conservar tantas noites incendiada, principalmente em quasi todo o mez de Setembro: e pelas muitas nevoas permanentes de dia e de noite; havendo mezes, em que naõ pude descobrir Planetas, e Estrellas: de modo, que nos ultimos quatro mezes, havendo visiveis neste Meridiano 53 Eclipses dos Satellites de Jupiter, só observei 12.

2 O maior calor, que indicou o Thermometro de Fahrenheit, foi de 90° duas vezes neste anno: a 1.ª no primeiro dia de Fevereiro pelas 2^h da tarde, estando o Ceo com algumas nuvens; e o vento correndo do N. E.: a 2.ª no dia 17 de Dezembro ás 4^h da tarde; o Ceo achava-se nublado; o vento assoprava do S. E. Este grão de calor he menor 4°, do que o anno preterito.

No dia 14 de Outubro ás 3^h da tarde, expuz o Thermometro aos raios directos do Sol, e annunciou 114.°

3 O menor calor annunciado no mesmo instrumento he de $52°\frac{1}{2}$; no dia 3 de Julho ás 6^h da manhã: o Ceo estava coberto com huma espessa nevoa; o vento vinha do N. O. Este he o maior frio, que tem aqui havido, depois que me occupo nestas observações.

A differença do maximo ao minimo he de $37^\circ \frac{1}{2}$. Esta differença he menor, que a do anno passado $1^\circ \frac{1}{2}$.

4 O calor medio chegou a $75^\circ,22$, somma de 2920 observações, ou 8 cada dia. Excedeu o do anno passado de $1^\circ,62$.

5 Foi o calor medio da manhã $72^\circ,88$: ao meio dia $75^\circ,1$: da tarde $76^\circ,2$.

Em todos os mezes d'este anno, exceptuando Novembro, e Dezembro sempre o maior calor do dia foi ás 4^h da tarde: e nos mencionados mezes ás 2^h.

As tres linhas curvas *AB*, *CD*, *EF* da estampa inclusa, deixaõ bem claramente vêr as variedades do calor que aquí soffremos. As Abcisas mostraõ o tempo, as Ordenadas a altura : a primeira vai dividida em gráos para servir de peti-pé.

6 A maior elevaçaõ do Mercurio no Barometro, foi observada de $28^{Pol.}\ 7^{Lin.},35$; a 23 de Agosto á meia noite : o Ceo estava com sua nevoa, o Thermometro mostrava 73°: o vento vinha do S. E.

7 A menor elevaçaõ foi de $27^{Pol.}\ 10^{Lin.}$; a 25 de Outubro ás 4^h da tarde : o Ceo estava nublado : o Thermometro em 75° : o vento era S. O.

A differença entre as alturas extremas do Azougue he de $9^{Lin.},35$.

8 A altura media do Barometro resultado de 2920 observações, ou 8 cada dia foi de $28^{Pol.}\ 2^{Lin.},96$.

9 A elevaçaõ media da manhã he de $28^{Pol.}\ 3^{Lin.},1$; ao meio dia $28^{Pol.}\ 3^{Lin.},03$; da tarde $28^{Pol.}\ 2^{Lin.},83$.

10 Neste anno houveraõ dias serenos 69 ; variaveis 146 ; nublados 87 ; cobertos de todo 63 ; de relampagos naõ se ouvindo trovões 47 ; de trovoada ao longe e ao perto 38 ; de chuva 150 ; de nevoas seccas, e molhadas 111 ; de Auroras Austraes 3 ; em fim de Luz-Zodiacal 9.

11

11 Choveu mais neste anno, dó que em nenhum dos antecedentes, que se observáraõ, sendo a altura total da chuva 55 Pol. 0 Lin.,63. Março foi o mez de mais chuva, Agosto de menos.

Na noite de 12 de Março choveu notavelmente, pois no espaço de $3^h \frac{1}{4}$ chegou a sua altura a 4 Pol. 2 Lin.

12 A vaporaçaõ chegou a 35 Pol. 2 Lin.,29: Janeiro foi o mez de maior vaporaçaõ, Junho da menor.

A chuva excedeu á vaporaçaõ 19 Pol. 8 Lin.,34.

13 O Vento da manhã foi muitas vezes Variavel, e outras N. O.; de tarde dominou S. E. menos em Junho, e Setembro.

14 Ouvíraõ-se trovões a 1, 3, 4, 9, 11, 16, e 17 de Janeiro; a 1, 2, 7, 10, 11, e 25 de Fevereiro, a 5, e 30 de Março; a 20 de Junho; a 8, 9, 10, e 18 de Setembro; a 13, 24, 25, e 29 de Outubro; a 4, 6, 13, 14, 15, 19, 20, 22, e 27 de Novembro; a 2, 3, 9, 16, e 24 de Dezembro.

15 Houve neste anno 3 Auroras Austraes, e summamente radiantes, e todas no mez de Agosto a 20, 29, e 31: a de 29 começou muito luminosa, e espalhando-se por todo o Hemisferio, o incendiou de tal maneira, que todo elle parecia em fôgo: os Planetas que entaõ se achavaõ no Horizonte pareciaõ como ferro em braza: principiou esta Aurora ás $2^h\ 25'$ da manhã, findou com o dia. A' noite tornou a incendiar-se o Hemisferio todo; mas a sua inflammaçaõ em menor gráo do que a da manhã. A 31 do mesmo mez á $1^h\ 28'$ da manhã começou a apparecer a Aurora Austral muito avermelhada, e augmentando-se pouco a pouco, chegou a formar como huma grande fogueira na altura de 30° pouco mais ou menos; e assim se conservou por tempo de 20': depois foi diminuindo de inflammaçaõ, e acabou totalmente ás $2^h\ 20'$. O Ceo estava muito obscurecido por toda a mais parte; porém

rém summamente tranquillo, pois naõ corria o menor vento.

Naõ houve só estes meteoros igneos; outro fenomeno muito mais admiravel pela sua raridade vi no Ceo no dia 15 de Fevereiro ás 6^h 10' da manhã: consistia este em hum arco Iris correndo do S. O. ao N., todo de huma vivissima côr vermelha, sem mistura de outra alguma côr: durou até ás 6^h 25'; depois tomou as mais côres do arco Iris ordinario. O Ceo achava-se ao mesmo tempo semeado de barras purpureas, e o intervallo do Ceo, que havia entre estas, parecia sanguineo.

16 Observou-se a Luz-Zodiacal a 22 de Janeiro; a 15, e 16 de Abril; a 5, e 8 de Junho; a 31 de Julho; a 23 de Setembro; a 1 de Outubro; e a 8 de Novembro. A de 15 de Abril, e 5 de Junho fôraõ muito brilhantes, as outras pouco luzentes.

17 A influencia da Lua nos seus pontos observados, a respeito do maior gráo de calor, teve lugar no Lunistico Boreal, e Perigeu: e o menor no II. Quarto. Pelo que pertence á elevaçaõ do Barometro, concorreu a maxima no I. Quarto, e I. Oitante: a minima no II. Oitante.

18 A Lua em todos os pontos concorreu com a chuva quasi igualmente, exceptuando o I. Quarto, pois este ponto foi, em que menos choveu.

19 Treze vezes se offereceu neste anno a Lua aos meus olhos com sua corôa: humas brancas, outras alguma cousa amarellas: neste fenomeno excedeu aos mais annos, que tenho observado; porque no anno de 1784 vi 7; no de 83 vi 6; e no de 82 vi 5.

20 A maior declinaçaõ Oriental, que se observou na Agulha-Magnetica este anno foi de 6° 46' no dia 19 de Dezembro ao meio dia: o Ceo estava coberto; o Barometro achava-se na altura de $27^{Pol.}\ 11^{Lin.},4$; e o Thermometro em 78°: o vento assoprava S.

21

21 A menor declinaçaõ foi de 6° 20′ duas vezes neſte anno: a 1.ª no dia 28 de Janeiro ás 6^h da manhã: achava-ſe o Ceo nublado, o Barometro na elevaçaõ de 28 Pol. 3 Lin.,1; o Thermometro annunciava 80°: o vento corria de L.: a 2.ª a 2 de Junho ás 2^h da tarde, tempo em que o Ceo eſtava coberto, e chovia: o Barometro na altura de 28 Pol. 5 Lin.,3; o Thermometro 71°,5: o vento vinha de L.

A differença da maior declinaçaõ, á menor he de 26′.

22 A declinaçaõ media de todo o anno ſomma de 2920 obſervações he de 6° 34′. Parece conſtante ir ſendo a declinaçaõ da Agulha menor neſte Meridiano.

23 Foi a declinaçaõ media da manhã 6° 35′ 4″: ao meio dia 6° 34′ 58″: da tarde 6° 34′ 26″.

Eis-aquí agora as variedades da athmosfera desde 18 de Abril de 1784, até 18 de Abril de 1785, na Ilha da Trindade ſituada na Latitude Auſtral de 20° 30′: e na Longitude approximada de 348° 25′ contados da Ponta mais Occidental da Ilha do Ferro, a qual Ilha nós povoámos no principio do anno de 1783.

Dias nublados 270; cobertos 76; variaveis 25; chuvoſos 124; e por conſequencia nem hum ſó dia houve claro.

Na noite do 1.° de Março de 1785 ſentíraõ-ſe dous tremores de terra, com direcçaõ ſegundo pareceu do Occidente para o Oriente; o 1.° ás 9^h; e o 2.° mais ſenſivel ás 9^h 20′: ambos inſtantaneos.

No dia 26 do meſmo mez de Março pela tarde deſcarregou-ſe ſobre a Ilha huma tromba d'agoa.

Eſtas obſervações communicou-m'as hum Official de Artilheria d'eſta Praça, que eſteve de guarniçaõ neſta Ilha todo eſte tempo.

Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter, feitas com hum Oculo achromatico de Dolond de 17 pollegadas de fóco, que augmenta os objectos quasi 70 vezes.

Anno 1785		Satellites.	Tempo verdadeiro. H. M. S.		Circunstancias das Observações.
Abril.	25	3.°	16 42 58	Im.	Ceo sereno.
Maio.	26	2.°	15 26 12	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta visiveis: havia Luar claro.
	28	1.°	16 9 51	Im.	Idem.
	31	3.°	15 33 52	Em.	Ceo muito sereno.
Junho.	4	1.°	18 2 6	Im.	. . . . pouco sereno.
	13	1.°	14 23 2	Im.	. . . . muito sereno.
Julho.	6	1.°	14 27 40	Im.	. . . . pouco sereno.
	13	3.°	15 24 28	Em.	. . . . muito sereno.
	13	1.°	16 20 31	Im.	Idem.
	20	3.°	16 47 46	Im.	Ceo sereno.
	20	1.°	18 13 35	Im.	Idem.
Agosto.	5	1.°	16 30 11	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta bem distinctas.
	5	2.°	17 30 13	Im.	Idem.
	6	4.°	15 28 52	Im.	Idem.
	6	4.°	17 34 21	Em.	Idem.
	7	1.°	10 58 27	Im.	Ceo muito pouco sereno, as faxas do Planeta mal se percebiaõ.
	14	1.°	12 53 58	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta visiveis.
	21	1.°	14 49 20	Im.	Idem.
	23	4.°	11 43 19	Em.	Idem.
	23	2.°	12 8 24	Im.	Idem.
	25	3.°	12 58 11	Im.	Idem.
	25	3.°	15 26 37	Em.	Idem.
	28	1.°	16 44 54	Im.	Idem.
Setembro.	1	3.°	16 59 34	Im.	Ceo pouco sereno.
	6	1.°	13 10 9	Im.	Idem.
	13	1.°	15 6 55	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta percebiaõ-se perfeitamente.
	22	1.°	11 32 47	Im.	Idem.

Anno

Anno 1785		Satellites.	Tempo verdadeiro. H. M. S.	Circunſtancias das Obſervações.
Outubro.	1	1.°	7 58 33 Im.	Ceo ſereno. O Satellite muito proximo do Planeta. Duvidoſa.
	10	1.°	6 35 15 Em.	Ceo pouco ſereno, e forte crepuſculo.
	12	2.°	9 19 46 Em.	Ceo pouco ſereno, as faxas do Planeta naõ ſe diviſavaõ. Duvidoſa.
	26	2.°	14 35 16 Em.	Ceo muito ſereno, as faxas do Planeta bellamente viſiveis.
Novembro.	5	3.°	7 46 56 Em.	Ceo ſereno.
Dezembro.	2	1.°	8 57 34 Em.	Ceo pouco ſereno. Duvidoſa.
	25	1.°	9 2 56 Em.	Ceo ſereno.
	25	3.°	9 33 45 Im.	Ceo pouco ſereno.

O tempo verdadeiro d'eſtas obſervações, e de todas as dos outros annos paſſados, he determinado pelas alturas correſpondentes, tomadas tres dias conſecutivos: a ſaber, antes do dia da obſervaçaõ, no dia da obſervaçaõ, e no dia depois da obſervaçaõ. A Pendula he excellente, porém ella padece alterações bem ſenſiveis, por cauſa da continua variedade da athmosfera, pelo que pertence ao calor; influindo muito na dilataçaõ dos metaes.

Naõ tendo eu eſte anno de 1785, outras Ephemerides por onde me guiaſſe nas meſmas obſervações, mais do que o *Connoiſſance des temps*; e vendo que no ſeu annuncio do Eclipſe do Sol a 9 de Fevereiro, ſó o fazia viſivel na Africa, e Aſia; procurei ſaber ſe tambem o ſeria neſte Meridiano; e com effeito depois de ſe ter calculado graficamente com toda a exactidaõ, achou-ſe ſer tambem aquí viſivel.

Eis-aquí a ſua determinaçaõ.

Principio do Eclipſe do Sol a 9 de Fevereiro ás 7^h $9'$ da manhã.

Meio . . . . ás 8^h $10'$ da . . .

Fim . . . . ás 9^h $26'$ da . . .

Grandeza . . . . 10^d $40'$

Eu me diſpuz a obſervar eſte Eclipſe ao Oculo do Quadrante, ſeguindo o conſelho de Mr. de la Lande §. 2485: cujas obſervações ſaõ as ſeguintes.

Obſer-

Observações do Eclipse do Sol no dia 9 de Fevereiro de 1785.

Tempo verdadeiro. H.	M.	S.	
			O principio do Eclipse naõ foi visto, por estar o Céo com huma espessa nevoa.
7	40	47	Passagem do limbo precedente do Sol ao fio vertical do oculo do Quadrante.
7	42	0	..... da 1.ª ponta da Lua ao fio horizontal.
7	42	10	..... da 1.ª ponta da Lua ao fio vertical.
7	42	53	..... do limbo superior do Sol ao fio horizontal.
7	47	46	Principio da Immersaõ de huma grande mancha do Sol.
7	48	0	Passagem do limbo seguinte da Lua ao fio vertical.
7	48	0	..... da 2.ª ponta da Lua ao fio horizontal.
7	48	24	Immersaõ total da mancha do Sol.
7	52	0	Passagem do limbo precedente do Sol ao fio vertical.
7	52	22	..... da 1.ª ponta da Lua ao horizontal.
7	53	12	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.
7	54	31	..... do limbo inferior do Sol ao horizontal.
7	58	4	..... do limbo seguinte do Sol ao vertical.
7	58	4	..... da 2.ª ponta da Lua ao vertical.
7	58	57	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
7	59	27	..... da 1.ª ponta da Lua ao vertical.
8	0	5	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.
8	1	30	..... do limbo superior da Lua ao horizontal.
8	1	41	..... do limbo superior do Sol ao horizontal.
8	18	12	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	18	45	..... do limbo superior da Lua ao horizontal.
8	19	0	..... da 1.ª ponta da Lua ao horizontal.
8	19	25	..... da 2.ª ponta da Lua ao vertical.
8	20	32	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	21	12	..... do limbo inferior do Sol ao horizontal.
8	21	25	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.
8	23	27	..... do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	23	47	..... do limbo inferior do Sol ao horizontal.
8	24	16	..... do limbo inferior da Lua ao horizontal.
8	24	22	..... do limbo precedente da Lua ao vertical.

Naõ se observou o fim do Eclipse, porque o Ceo tornou a cobrir-se de nevoa espessa, como no principio.

Todos os limbos, de que observei as passagens verticaes, e horizontaes, saõ apparentes, porque o oculo do Quadrante inverte os objectos.

De-

Determinaçaõ da differença de Longitude de Lisboa ao Rio de Janeiro, pelas Observações correspondentes dos Satellites de Jupiter, e Eclipse da Lua.

Anno 1781.	Observações feitas no Rio de Janeiro.	Observações feitas ou reduzidas em Lisboa.	Differença em tempo entre os dous Meridianos.	
	Tempo verdadeiro.			
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	
Agosto 17	6 4 20	8 20 59	2 16 39	Emersaõ do 1.° Satellite.
20	6 36 20	8 52 33	2 16 13	Emers. do 1.° Sat.
1782.				Immersaõ do 1.° Satel.
Março 17	12 49 2	15 5 9	2 16 7	
Maio 25	13 27 29	15 44 5	2 16 36	Immers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida á de 18 em Lisboa.
Julho 3	14 0 50	16 17 40	2 16 50	Emers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida á de 5 em Lisboa.
28	8 41 40	10 58 32	2 16 52	Emers. do 1.° Satel.
Agosto 13	7 3 48	9 20 10	2 16 22	Emers. do 1.° Satel.
1784.				
Março 6	11 22 5	13 38 49	2 16 44	Principio do Eclipse da Lua.
6	13 48 0	16 4 19	2 16 19	Fim do Eclipse da Lua.
Junho 17	12 39 14	14 55 13	2 15 59	Immers. do 1.° Satel.
Julho 3	10 51 13	13 7 41	2 16 28	Immers. do 1.° Satel.
1785.				
Junho 4	18 2 6	20 18 31	2 16 25	Immers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida á de 6 em Lisboa.
Julho 20	18 13 35	20 29 56	2 16 21	Immers. do 1.° Satel. Oservaçaõ reduzida á de 22 de Lisboa.
Agosto 7	10 58 27	13 15 20	2 16 53	Immers. do 1.° Satel.
14	12 53 58	15 10 4	2 16 6	Immers. do 1.° Satel.
21	14 49 20	17 5 37	2 16 17	Immers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida á de 23 de Lisboa.
23	12 8 24	14 25 5	2 16 41	Immers. do 2.° Satel.
			H. M. S. T.	
			2 16 27 16	Differença media dos meridianos de Lisboa, e Rio de Janeiro.

NOTA.

Todas as Obſervações de Lisboa foraõ feitas pelos Senhores Ciera pai, e filho. Entre muitas, que eſtes Senhores nos remettèraõ, achei correſpondentes ás minhas, como ſe vê na Taboa preſente.

Como naõ tenho correſpondente á minha Obſervaçaõ de 25 de Maio de 1782; eu empreguei a Obſervaçaõ feita em Lisboa a 18 do meſmo mez, accreſcentando-lhe quatro revoluções do 1.º Satellite, conforme as Taboas $7^d, 1^h, 54', 24''$ (Aſtron. de la Lande), que dá a Obſervaçaõ em Lisboa a 25 de Maio ás $15^h, 44', 5''$ correſpondentes á do Rio de Janeiro.

Igualmente naõ achei correſpondente á minha Obſervaçaõ de 3 de Julho de 1782; pelo que vali-me da feita em Lisboa a 5 do meſmo mez, diminuindo-lhe huma revoluçàõ do 1.º Satellite tirada das meſmas Taboas $1^d, 18^h, 28', 36''$, de que reſulta a Obſervaçaõ em Lisboa a 3 de Julho ás $16^h, 17,' 40''$ correſpondente á do Rio de Janeiro feita no meſmo dia.

O meſmo ſuccedeo ás outras minhas Obſervações de 4 de Junho, 20 de Julho, e 21 de Agoſto de 1785: pelo que tomei as feitas em Lisboa a 6 de Junho, 22 de Julho, e 23 de Agoſto de 1785; e diminuindo-lhes em cada Obſervaçaõ huma revoluçaõ do 1.º Satellite, por eſte artificio ficáraõ ſendo correſpondentes ás minhas.

Eu faço uſo deſtas Obſervações reduzidas, bem perſuadido que hum número grande de factos, dá huma maior quantidade de relações, e ſegura ſummamente as conſequencias.

Se algum dia chegarem á minha maõ mais algumas Obſervações feitas no noſſo Meridiano de Lisboa, ou em outro qualquer, naõ duvido fazer nova combinaçaõ: por agora devo ſeguir o reſultado, que eſtas me appreſentaõ.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

JANEIRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.	Linh.	Linh.	
1	N.	S. O.	77°,66	80°.	79°.	7	.	Coberto, chuva, e trovões.
2	Var.	S. E.	77,33	79.	79,87	.	1,5	Variavel.
3	Var.	S. E.	75,16	78.	80,75	.	2	Var., e trovões de noite.
4	N. O.	S. E.	79,41	82.	81,94	0,3	0,5	Nub., trovões, e chuva.
5	N. O.	S. E.	79,83	80.	79.	0,25	0,5	Cob., nev. com ſeu orvalho.
6	N. O.	S. E.	77.	78,5	80,12	5	.	Cob., nev. de manhã, de tarde chuva.
7	Var.	S. E.	78,16	80.	80,25	.	1,5	Var., e nev. de manhã.
8	Var.	S. E.	77.	79,5	80,62	0,25	0,5	Nub., orv., e relamp. O mar algum tanto luminoſo.
9	N. O.	S. E.	78,33	81.	80.	0,17	0,8	Nub., trovões, e orv.
10	S.	S. E.	77,66	78,5	80.	0,17	0,5	Var., orv., e relamp.
11	Var.	S. E.	79,41	82.	80,4	27	.	Var., trovões, e chuva.
12	O.	S. E.	75,75	77,5	76,12	7	.	Cob., e chuva. Mar muito luminoſo.
13	Var.	S. E.	74,33	75,5	77,75	0,2	1	Cob., e orv.
14	N. O.	S. E.	77,66	82.	86.	.	2,5	Nub., nev., e relampagos.
15	Var.	S. E.	81,33	85.	85,4	.	3	Nub., e relampagos.
16	N. O.	S. E.	80,16	84,5	87,4	.	5	Var., e relampagos.
17	Var.	Var.	82,83	84,5	84,12	4	.	Var., trov., e chuva.
18	Var.	S. E.	79,33	80.	80,75	5	.	Idem.
19	Var.	S. E.	78,16	81.	82,75	.	1,5	Nub.
20	Var.	S. E.	78,83	83.	84.	.	5	Idem.
21	Var.	Var.	81,5	85.	82,5	0,2	1,8	Var., e algum orv.
22	Var.	S. E.	80,33	83.	87,62	.	5	Nub. Luz-Zodiacal ás 3ª da manhã, á noite relampag.
23	N. O.	S. E.	81,5	86.	86.	.	4	Nub.
24	Var.	S. E.	81,83	84.	84,37	.	2	Idem.
25	Var.	S. E.	80,16	82,5	84,62	.	3	Sereno.
26	N. O.	S. E.	80,25	82,5	85,4	.	4,5	Idem.
27	N.	S. E.	81,5	85.	86.	.	2	Var. De noite o Ceo algum tanto avermelhado. O Mar hum pouco luminoſo.
28	Var.	Var.	80,66	83.	83,62	.	2,8	Nub., e relampagos. Mar luminoſo.
29	N. O.	S. E.	79.	82.	83,4	.	4	Nub., e relampagos.
30	Var.	S. E.	79,16	84.	86,12	.	3	Nub. Mar muito luminoſo.
31	Var.	S. E.	81,16	84,5	88,31	.	5	Sereno.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

FEVEREIRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	82°,83	86°.	87°.	0,3	3,5	Var., trovões, e chuva. O mar luminoſo.
2	N. E.	S. E.	81.	85.	84,25	0,25	4,6	Var., trovões, e algum orv.
3	N. O.	S. E.	79,16	81,5	80,9	7	.	Cob., e chuva.
4	Var.	S. E.	76,66	77,5	78,02	0,2	1	Cob., nevoa, e orvalho.
5	N. O.	S.	77,16	79,5	80.	.	1	Cob., e nevoa.
6	Var.	O.	78.	79,5	81,25	2	.	Cob., nevoa de manhá, de tarde chuva.
7	Var.	Var.	79,5	82.	82,9	.	3	Var., nevoa, e trovoada.
8	L.	S. O.	79,83	80,5	80,75	0,3	1,5	Var., nev. com ſeu orvalho.
9	N. O.	N. O.	79,16	81,5	82.	.	4,5	Nub., nev., e relampagos.
10	N. O.	S. E.	78,5	80.	81,6	4	.	Var., nev., depois trovões, e chuva.
11	S. E.	S. E.	78,5	80.	80,5	4	.	Idem.
12	N. O.	Var.	76,83	78.	78.	4	.	Cob., nevoa de manhá, depois chuva.
13	N. O.	S. E.	76.	76.	76,4	6	.	Idem.
14	N.	S. E.	75,16	77.	78,6	.	1	Nub., e nev. de manhá.
15	Var.	S. E.	77,33	81.	81,75	0,2	0,5	Var., nev., e orv. Neſte dia appareceo hum fenomeno, que deſcreverei em outra parte.
16	N. O.	S. E.	78.	80,5	82,25	:	2	Nub. A Lua com ſua corôa amarela.
17	N. O.	S. E.	78.	80,5	82.	.	2	Cob.
18	N. O.	S. E.	77,5	80,5	82,75	.	2,5	Ser.
19	N. O.	S. E.	79.	82.	84.	.	4	Ser. De noite relampagos.
20	N. O.	N.	80.	83.	83.	0,25	0,8	Var. com ſeu orv.
21	N. O.	Var.	77.	78.	79,4	2	.	Var., e chuva.
22	N. O.	S. E.	79,5	83,5	83,25	.	1,5	Nub. A Lua com corôa branc.
23	N. O.	S. E.	79.	81,5	82,75	.	2	Var.
24	N. O.	Var.	80.	83,5	83,75	.	3,5	Ser. De noite relampagos.
25	N. O.	S. O.	80,41	84.	83.	.	4	Nub. De tarde trovoada.
26	N. O.	Var.	78,33	81.	80,9	9	.	Cob., nev., e chuva. O mar muito levantado.
27	S. O.	S. O.	78,33	78,5	78.	13	.	Cob., e chuva.
28	Var.	S. O.	77.	78,5	78,6	18	.	Nub., e chuva.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	76,5	77,5	78.	0,17	0,5	Cob., orvalho.
2	Var.	S. E.	77.	79,5	80,25	.	3	Nub.
3	N. O.	S. E.	77,8	80.	79,25	0,25	0,4	Var., orv., e relampagos.
4	N. O.	S. E.	76,83	79.	80.	3	0,3	Var., chuv., e relampagos.
5	Var.	S.	78,66	80,5	81,25	4	.	Var., chuva, e trovões.
6	O.	S.	77,5	78.	79,5	.	1	Cob., e relampagos.
7	N. O.	S. E.	77,83	80,5	80.	.	2	Var., e relampagos.
8	Var.	S. E.	77,83	80.	80.	1	.	Var., chuva, e relampagos.
9	Var.	S. E.	76,66	79.	79,61	2	.	Idem.
10	Var.	S. E.	76,5	78.	78,87	2,5	.	Idem.
11	N. O.	S. E.	75,5	76.	77,75	10	.	Idem.
12	N. O.	O.	76,5	77.	76,4	47	.	Cob., e chuva.
13	Var.	S. E.	75.	75,5	75.	5,5	.	Idem.
14	Var.	Var.	73,33	75.	74.	7	.	Nub., e chuva.
15	Var.	S.	74,5	75,5	74.	3	.	Cob., e chuva.
16	Var.	Var.	71,66	74.	74,1	2	.	Var., e chuva.
17	Var.	L.	70,83	73,5	73,5	2,5	.	Idem.
18	Var.	S. E.	73.	73,5	74.	1	.	Idem.
19	Var.	S. O.	71,33	72,5	72,4	0,5	.	Cob., e chuva.
20	N. O.	S. E.	72,5	73.	73,25	2,5	.	Nub., e chuva.
21	N. O.	S. O.	73,66	74.	75.	1	.	Cob., e chuva.
22	S.	S.	73,5	75.	74,5	1,5	.	Idem.
23	L.	S.	73,66	75,5	76.	0,5	.	Nub., e chuva.
24	S. E.	S. E.	75,33	76.	76.	0,25	.	Var., e chuva.
25	Var.	S. E.	74,33	75.	75,5	0,33	0,2	Idem.
26	Var.	S. E.	75.	76,5	77,5	.	0,8	Nub.
27	N. O.	S. E.	75,33	77,5	78.	.	1	Idem.
28	N. O.	S. E.	77,5	79,5	79,75	.	1,5	Nub., nev., e relampagos.
29	Var.	S. O.	77,66	79.	77,75	1	.	Var., nev., e chuva.
30	Var.	S. E.	76,16	78.	77,9	49	.	Var., trovoada, e chuva.
31	S. E.	S. E.	76,66	77,5	78, 4	.	0,8	Nub., e relampagos.

DIARIO METEOROLOGICO.

ABRIL de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	N. O.	S. E.	76°,5	78°.	78°.	.	1	Nub., nev., e relampagos.
2	L.	S. O.	76,16	76,5	75.	18	.	Cob., e chuva.
3	L.	S.	72,16	72,5	72,75	4	.	Cob., nevoa, e chuva.
4	N. O.	S. E.	72,33	74,5	75,12	0,13	.	Var., e chuva.
5	Var.	N.	75,33	78.	81,75	.	0,3	Nub.
6	Var.	S.	78,5	81.	80.	24	1,5	Nub. De noite chuva.
7	L.	S. O.	76,16	77.	77.	10	.	Var., e chuva.
8	O.	S.	72.	73.	74.	3,5	.	Idem.
9	Var.	S. E.	73,16	75.	76.	2,5	.	Idem.
10	Var.	Var.	73,33	74,5	74,62	.	0,5	Nub.
11	N. O.	S. E.	72,16	74.	75,5	.	0,5	Nub., e nevoa.
12	N. O.	S. E.	72,66	74.	76,25	.	0,8	Idem.
13	N. O.	S. E.	73,83	77.	78,62	.	1	Ser.
14	N. O.	S. E.	75,16	78,5	80,25	.	0,8	Ser., nev., e relamp.
15	N.	N.	76,33	77.	78,5	.	1	Var. Luz Zodiacal mui radiante ás 7h ¼ da noite.
16	L.	S. E.	75,5	78.	79,75	.	1	Ser. Luz Zodiacal ás 7h da noite.
17	Var.	S. E.	76,5	80.	82,4	.	1,5	Ser., e nevoa.
18	N. O.	Var.	77,66	81,5	84,15	.	0,8	Ser.
19	N. O.	S. E.	79.	81.	83,15	.	0,7	Var., e relampagos.
20	O.	S.	77,66	81.	80,15	0,25	1	Var., relamp., e chuva.
21	N. O.	S. E.	75,66	78.	79.	.	0,9	Var.
22	N. O.	S. E.	77,33	79.	81.	.	0,5	Var., e relampagos.
23	Var.	S. E.	76,5	78.	79,75	.	2	Var., e nevoa.
24	N.	S. E.	75,33	77,5	79,75	.	1	Idem.
25	N. O.	S. E.	73,66	77,5	79,5	.	0,8	Ser.
26	N. O.	S. E.	74,5	77,5	79,75	.	0,5	Idem.
27	N. O.	S. E.	76,15	79.	81,25	.	0,8	Ser., e nevoa.
28	N. O.	S. O.	77.	80.	78,4	12	.	Var., e chuva.
29	S. O.	S. E.	69,83	71.	71,25	0,25	0,3	Idem.
30	N. O.	S. E.	66,83	69.	71,4	.	0,4	Nub.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MAIO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	N.	S. E.	69,66	72.	74.	.	0,5	Nub., e nevoa.
2	N. O.	Var.	70,5	74.	75.	.	0,4	Var.
3	Var.	S. E.	72.	72.	73.	0,17	.	Cob., e orvalho.
4	N. O.	S. E.	70.	70,5	72,75	.	0,4	Var.
5	N. O.	S. E.	69,5	71.	73.	.	0,5	Nub.
6	Var.	S. E.	68,16	71.	73,25	.	0,6	Nub., e nevoa.
7	N. O.	S. E.	70,5	73.	75.	.	1	Ser., e nevoa.
8	N. O.	Var.	72,66	75,5	77,6	.	1	Nub., e nevoa.
9	Var.	Var.	74,33	77.	75,6	2	.	Cob., e chuva.
10	Var.	Var.	72,66	71,5	71.	12	.	Idem.
11	S. O.	S. E.	68,5	69.	70,5	4	.	Var., e chuva.
12	N. O.	S. E.	69,33	70,5	73.	3	.	Var., nevoa, e chuva.
13	N. O.	N. O.	70.	69,5	69,6	4	.	Cob.
14	N. O.	S. E.	67,33	69.	70,75	.	0,3	Var.
15	N. O.	S. E.	66,83	68,5	69,25	0,13	0,2	Nub., nev. com seu orvalho.
16	N. O.	S. E.	68,33	70.	71,75	.	0,5	Var.
17	N. O.	S. E.	66,5	69.	71,5	.	0,5	Ser., e nevoa.
18	N. O.	S. E.	68,5	70.	72,5	.	0,25	Ser. A Lua no principio da noite com sua corôa amarella, e depois branca.
19	Var.	Var.	68,66	73.	73,63	.	0,5	Nub., e nev. A Lua com corôa branca.
20	N. O.	N.	68,	71.	73,5	.	0,8	Nub., e nevoa.
21	Var.	S. E.	68.	70,5	73.	.	0,5	Ser., e nevoa.
22	Var.	S. E.	68.	70,5	73,5	.	0,8	Ser.
23	O.	S. E.	68.	70,5	75,62	.	0,5	Ser., e nevoa.
24	Var.	S. E.	70.	72.	75.	.	1	Idem.
25	N.	Var.	72,5	73,5	76.	.	1	Var., e nevoa.
26	N. E.	S. E.	72,5	73.	76.	.	0,4	Ser., e nevoa.
27	N.	S. E.	71,5	72,5	73,6	.	0,5	Ser.
28	Var.	Var.	69,16	70,5	74,5	.	0,4	Ser., e nevoa.
29	N. O.	S. E.	68.	70,5	73.	.	0,4	Ser.
30	N.	S. E.	67,5	69,5	72.	.	0,6	Ser., e nevoa.
31	Var.	S. E.	67.	69.	72.	.	0,5	Idem.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

JUNHO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	69,33	69,5	71.	1,5	.	Var., nevoa, e chuva.
2	Var.	Var.	69,5	71.	71,62	.	0,4	Var., e nevoa.
3	N.	S. E.	70.	72.	74.	.	2	Idem.
4	O.	N.	70.	71,5	73,75	.	0,4	Sereno.
5	Var.	S. O.	69,66	71,5	72.	.	0,2	Var., e nev. Luz-Zodiacal mui reſplandecente, ás 5ʰ ½ da manhá.
6	Var.	S. E.	69,16	70.	71.	.	0,2	Var.
7	Var.	S. E.	68,16	69,5	70,75	.	0,3	Ser., e nevoa.
8	S. O.	S. E.	66,83	69.	71,4	.	0,2	Ser. Luz-Zodiacal ás 4ʰ ¼ da manhá.
9	N. O.	S. E.	67.	67,5	70,4	.	0,3	Ser., e nevoa.
10	N. O.	S. E.	67.	68.	71.	.	0,25	Idem.
11	Var.	S. E.	62,66	69.	72,6	.	0,35	Idem.
12	N. O.	S. E.	68,5	70.	72,4	.	0,18	Idem.
13	N. O.	S. E.	68.	70.	72,4	.	0,26	Idem.
14	N. O.	Var.	65,66	70.	74,62	.	0,3	Idem.
15	Var.	N. O.	72,33	76,5	79,5	.	1	Nub., e relampagos.
16	N. O.	S.	74,16	73,75	76,62	0,13	0,5	Var., orv., e relamp.
17	Var.	S. E.	69.	72.	71,12	.	0,4	Ser., e nevoa.
18	Var.	N. O.	74.	76.	81,25	.	1,6	Var., e relampagos.
19	N. O.	Var.	73.	76.	80,25	.	0,8	Var.
20	N. O.	S. O.	72,83	75.	76,88	1	.	Var., trovoada, e chuva.
21	S.	Var.	71,66	71.	69,9	2	.	Cob., nev., e chuveiros.
22	Var.	S. E.	65,66	65.	66.	4	.	Cob., e chuva.
23	O.	S. E.	60.	64.	66.	.	0,4	Nub.
24	N. O.	S. E.	59.	60.	61,25	.	0,2	Nub., e nevoa.
25	Var.	Var.	58,91	64.	66,75	.	0,2	Ser., e nevoa.
26	Var.	S. E.	63,66	65.	61.	2,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
27	O.	O.	57.	60,5	60,12	2	.	Var., e chuveiros.
28	N. O.	S. E.	60.	62,5	63,25	.	0,2	Var.
29	Var.	N. E.	57,66	62.	60,25	2	.	Ser., e chuva de noite.
30	Var.	S.	56,8	61.	59,4	4	.	Var., e chuveiros.

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapór.	Estado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S.	56°,8	60°.	62°.	0,5	.	Var., e chuva.
2	N. O.	S. E.	58,16	62.	63,6	.	0,2	Ser., e nevoa.
3	N. O.	S. E.	55,91	60.	62,75	.	0,3	Idem.
4	Var.	Var.	62.	65.	62,75	1,5	.	Cob., e chuva.
5	N. O.	S. E.	61,33	62.	62.	1	.	Idem.
6	N. O.	S. E.	61,5	64.	65,87	1,5	.	Nub., e chuva.
7	N. O.	S. E.	62.	65.	65,75	.	0,3	Nub., e nevoa.
8	N. O.	S. E.	62,33	66.	68,25	.	0,3	Idem.
9	N. O.	S. E.	66.	67.	69,5	.	0,2	Var.
10	N. O.	S. E.	66,66	69,5	70,12	.	0,5	Ser.
11	N. O.	S. E.	62,83	66,5	69,25	.	0,5	Nub., e nevoa.
12	S. O.	S. E.	65.	67.	66,5	0,14	0,6	Var., e nevoa com seu orv.
13	N. O.	S. E.	64,66	67,5	70,25	.	0,3	Nub., e nevoa. A Lua com duas corôas na mesma noite.
14	N. O.	S. E.	63.	67,5	70.	.	0,4	Ser.
15	Var.	S. E.	65,66	68.	70.	.	0,5	Nub., e nevoa.
16	N. O.	S. E.	66.	68.	69,75	.	0,5	Idem.
17	Var.	S. E.	67.	69.	74,62	.	0,8	Var., e nevoa.
18	N.	S. O.	70,66	71.	71,12	.	0,7	Sereno.
19	N. O.	S. E.	67.	68,5	70.	.	0,3	Nub., e nevoa.
20	Var.	S. E.	62.	67,5	70,62	.	0,5	Idem.
21	N. O.	S. E.	68.	72.	72,5	.	0,5	Nub., e nevoa.
22	N. O.	S. O.	68,5	73,5	78,25	.	0,8	Idem.
23	Var.	S. O.	71,33	71.	68,75	0,2	.	Cob., e orvalho.
24	Var.	L.	67.	69.	69,75	.	0,3	Var.
25	N. O.	S. E.	66,83	69.	72,5	.	0,6	Nub., e nevoa.
26	N. O.	S. E.	70,16	71.	74,5	.	0,8	Ser., e nevoa.
27	N. O.	S. E.	70,83	72.	75,25	.	0,7	Idem.
28	N. O.	S. E.	72.	74,5	76,5	.	0,8	Ser.
29	N. O.	S. E.	70.	72.	73,25	.	0,8	Ser., e nevoa.
30	N. O.	S. E.	69.	71.	73,5	.	0,6	Idem.
31	N. O.	S. E.	69,5	72.	75,5	.	0,8	Ser. Luz-Zodiacal pouco luminosa ás 8h, e 10′ da noit.

DIARIO METEOROLOGICO.

AGOSTO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	N. O.	N. O.	70,83	74.	77,75	.	0,5	Ser.
2	N.	S. O.	72,66	75,5	75.	.	0,8	Var.
3	Var.	S. E.	70,66	73.	74,62	.	0,7	Var.
4	Var.	S. E.	72.	73,5	72,62	.	1	Nub., e nevoa.
5	N.	S. E.	70,33	71,5	74.	.	1,5	Idem.
6	N. O.	S. E.	68,5	70,5	72,87	.	0,8	Nub.
7	Var.	Var.	67,87	71.	74.	.	1,3	Ser.
8	N. O.	S.	71,16	73.	74,12	.	0,8	Nub.
9	Var.	Var.	68,83	72,5	74,37	.	1	Nub. A Lua com ſua corôa.
10	N. O.	Var.	69.	74.	77.	.	1,5	Nub.
11	Var.	S. E.	73.	75,5	76,12	.	1,3	Nub.
12	Var.	S. O.	71,5	74.	74.	.	0,4	Var., nev., com ſeu orv.
13	O.	S.	70.	71.	71.	0,17	0,4	Var., e nevoa.
14	N. O.	Var.	68,83	71.	74,25	.	0,5	Ser.
15	Var.	S. E.	69,5	73.	77.	.	0,6	Var.
16	N. O.	N. O.	71.	74.	77,75	.	1	Ser., e nevoa. A Lua com ſua corôa.
17	Var.	Var.	72,5	74,5	74.	.	0,5	Nub., e nevoa.
18	Var.	S. O.	71,66	71,5	72,75	0,33	0,1	Var., com ſeu orvalho.
19	L.	S. E.	70,5	73.	73,12	.	0,3	Var.
20	Var.	Var.	67,83	72.	75,5	.	0,4	Ser., e nevoa.
21	N. O.	N. O.	71,33	74.	76.	.	0,5	Idem. Aurora Auſt. mui radiante começou ás 4h 10′, findou com a manhã.
22	Var.	S. E.	70,66	72.	73,62	.	0,3	Nub., e nevoa.
23	N. O.	S. E.	70,16	73.	73,25	.	0,5	Idem.
24	N. O.	S. E.	70,16	71,5	72,12	.	0,7	Ser., e nevoa.
25	Var.	S. E.	67,33	70.	71.	.	0,4	Idem.
26	N. O.	S. E.	67,66	69.	70,62	.	0,7	Idem.
27	N. O.	S. E.	66,66	69.	74,5	.	1	Ser.
28	Var.	S. E.	66,83	71,5	72.	.	0,8	Ser.
29	Var.	N.	67,16	72.	76,25	.	0,8	Ser., e nev. Aurora Auſtral ſummamente luminoſa.
30	Var.	S. E.	69,83	74.	74,45	.	1	Nevoa todo o dia.
31	Var.	S.	72,16	74,5	76,25	.	1,3	Nev. todo o dia. Aur. Auſt. mui incendiada.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

SETEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	N. O.	N. O.	73,83	78,5	82,5	.	2,5	Nevoa todo o dia.
2	Var.	N. O.	74,33	77.	81,5	.	2,25	Nevoa todo o dia, de noite o Ceo avermelhado como ferro em braza.
3	N. O.	S.	76,83	78.	78.	.	1,8	Idem.
4	Var.	S. E.	74,16	75,5	74,25	.	2	Cob., e nevoa.
5	Var.	S. E.	71,5	74.	72,5	.	1,4	Var., e nevoa.
6	Var.	S. E.	72.	74,5	74,75	.	1	Nub., nev., e relamp. O Ceo todo incendiado.
7	N. O.	N. O.	73,33	75,5	78,37	.	1	Nub., e nev. O Ceo incendiado toda a noite. A Lua com ſua corôa.
8	Var.	S. E.	74,83	78.	80,12	.	1,5	Nub., nev., e trov. O Ceo como no dia antecedente.
9	Var.	S. E.	77,16	82,5	80,75	0,2	1,3	Cob., e nev. De noite o Ceo muito incendiado; e depois trovões, e chuva.
10	S.	S. O.	74,33	73.	73,62	4	.	Cob., trov., e chuva: parte da noite eſteve o Ceo incendiado.
11	S. E.	Var.	70,66	71,5	71,25	1,5	.	Cob., e chuva.
12	Var.	Var.	70,33	71.	69.	4,5	.	Idem.
13	Var.	Var.	66,66	69,5	69.	.	0,4	Var.
14	Var.	Var.	67,33	69,5	71,25	.	0,3	Var.
15	Var.	S.	69,5	71,5	71.	0,1	0,2	Var., com ſeu orvalho.
16	Var.	S. O.	70,16	71.	71.	3	.	Cob., e chuva.
17	N. O.	Var.	74.	78.	77,25	.	0,7	Nub. A Lua com ſua corôa.
18	S. E.	S. E.	73,82	76,5	77,25	5	.	Var., trovoada, e chuva.
19	Var.	S.	72,83	74.	72,75	3	.	Idem.
20	S. O.	S.	67,83	70,5	70,75	.	0,6	Nub.
21	N.	L.	68,83	72.	70,25	.	0,4	Var.
22	Var.	Var.	69.	73.	74.	.	0,5	Nub.
23	N. O.	S. E.	67,83	72.	73,25	.	0,8	Ser. Luz Zodiacal ás 8h 15′ da noite.
24	N. O.	N. E.	69,16	74.	78,38	2,5	1,2	Nub. A athmosfera muito incendiada.
25	S. O.	S. O.	68,16	68.	65,75	2	.	Cob., e chuva.
26	Var.	S. E.	65.	67.	65,5	0,1	0,35	Cob., e orvalho.
27	Var.	S. E.	65,5	68.	67,12	1,5	.	Cob., e chuva.
28	N. O.	S.	67,16	71.	68,75	4,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
29	N. E.	Var.	67,33	69,5	69,33	2	.	Var., e chuva.
30	N. E.	S. E.	67,66	71.	71.	.	0,5	Var.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

OUTUBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	69,33	72,5	73,75	.	0,8	Var. Luz-Zodiacal ás 7ʰ 40′ da noite.
2	Var.	S. E.	71,73	74.	74,75	.	1	Nub.
3	N.	S. E.	71,5	73,5	74.	.	0,5	Nub.
4	Var.	S. E.	70,5	73.	73.	.	0,8	Nub.
5	Var.	S. E.	70,33	72,5	73,25	.	0,5	Var.
6	N.	S. E.	71,16	74,5	74,4	.	1,3	Ser.
7	Var.	S. E.	71,5	74,5	74,4	.	1,5	Var., e nevoa.
8	L.	S. E.	73.	75.	75,75	.	1,5	Nub., e nevoa.
9	S. O.	S. E.	71,5	72,5	74,12	0,1	1	Var., nev. com ſeu orvalho.
10	N. O.	S. E.	70,66	75.	75.	.	1,3	Var.
11	N. O.	S. E.	73.	77.	77.	.	2	Var.
12.	Var.	Var.	72,58	79.	81,12	.	2,4	Var.
13	N. O.	Var.	75.	80.	83.	4	2,8	Nub., trovões, e chuva.
14	Var.	S. E.	78,67	83.	82,75	.	2	Var., e relampagos. A Lua com ſua corôa branca.
15	Var.	S. E.	77,33	79.	80,62	.	1,5	Nub., nev., e relampagos.
16	Var.	S.	77,92	79,5	78,75	0,2	1	Cob., e orvalho. A Lua com ſua corôa branca.
17	Var.	S. E.	75.	76.	74,87	.	0,6	Var.
18	Var.	S.	71,5	73,5	71,75	4	.	Cob., e chuva.
19	Var.	S. E.	71,5	72.	69,5	0,5	.	Idem.
20	Var.	S. E.	69,16	73.	73,62	.	2	Var.
21	Var.	S. E.	71,66	74,5	75,25	.	3	Var.
22	Var.	S. E.	70,33	74.	71,66	.	3	Var., e nevoa.
23	Var.	S. E.	70,16	73.	73,87	0,1	1,5	Nub. com ſeu orvalho.
24	Var.	S. E.	71,33	75,5	77,75	01,	2,5	Var., trovões, e orvalho.
25	N. O.	Var.	73,16	75,75	74.	9,5	.	Nub., trovões, e chuva.
26	Var.	Var.	68,66	72.	73,06	.	2,5	Nub.
27	Var.	S. E.	68.	73.	74,87	.	1,75	Ser.
28	N. O.	S. E.	70.	74.	75,25	.	1	Ser.
29	Var.	S. E.	73,5	77.	77,87	5	0,5	Nub., nev., trovões, e chuva.
30	Var.	Var.	75,5	76.	77,5	4,5	.	Cob., e chuva.
31.	Var.	S. E.	73,08	74.	71,37	5,25	.	Idem.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapôr.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	71.	74.	74,87	.	1	Nub.
2	Var.	S. E.	72.	76.	75,83	.	3	Var., e relampagos.
3	Var.	S. E.	74,83	77,5	77,87	.	3	Idem.
4	Var.	S. E.	75,5	80.	77,88	1	1	Var., trovões, e chuva.
5	S.	Var.	74,83	76,5	76,25	.	2	Var.
6	Var.	Var.	74,33	77,5	77,5	0,2	1,5	Var., trovões, e chuva.
7	Var.	S. O.	75,33	81.	77.	0,1	1	Nub., com miudo orvalho.
8	Var.	S. E.	73,5	75,5	74,37	0,05	3	Var., com miudo orvalho. Luz Zodiacal luzente ás 7h 40′ da noite.
9	Var.	Var.	72,66	75.	74,87	.	2	Var.
10	Var.	S. E.	71,83	76.	79,12	.	1,25	Var. A Lua com corôa.
11	Var.	S. E.	75,16	76.	77.	4	.	Var., nevoa, e chuva.
12	Var.	N. O.	75.	75.	74,87	2,5	.	Cob., e chuva.
13	Var.	S. E.	74.	76.	75,25	1,5	.	Var., trovões, e chuva.
14	N. O.	N.	74,83	79.	80,25	0,5	.	Idem.
15	Var.	Var.	76,66	81.	80,87	5	2	Nub., trovões, e chuva.
16	Var.	S.	75,66	78.	77.	1	.	Cob., e chuva.
17	Var.	S.	76.	78,5	78.	.	2,25	Var.
18	Var.	S. E.	74,33	77,5	77.	.	2,4	Var., e relampagos.
19	Var.	S. E.	78.	82.	80,37	0,5	2,25	Var., trovões, e chuva.
20	Var.	S. O.	76,5	77.	73,5	0,2	1	Idem.
21	Var.	S. E.	71,08	75,5	76,12	.	1,8	Nub.
22	Var.	S. E.	72,33	76.	77,75	0,5	2	Var., trovões, e chuva.
23	Var.	S. E.	76.	80,5	80,37	0,25	3	Var., relamp., e chuva.
24	Var.	S. E.	76,83	79.	78,87	0,1	2,25	Var., com miudo orvalho.
25	S. E.	S. E.	76,66	80.	79,87	0,1	2	Idem.
26	N.	N.	76,66	78.	77,37	7,5	.	Cob., e chuva.
27	Var.	Var.	77,33	81,5	84,5	6,25	2,25	Var., trovões, e chuva.
28	Var.	S. O.	77,16	78.	75,5	16	.	Var., e chuva.
29	Var.	N. E.	74,08	76.	74,5	0,3	1	Cob., e orvalho.
30	S. E.	Var.	74,33	77.	75,75	0,4	1,5	Var., e orvalho.

DIARIO METEOROLOGICO.

DEZEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	N. O.	S. E.	74°,66	78°.	78°,25	0,2	2,25	Var., e chuva.
2	Var.	Var.	75,66	78.	80,75	5	.	Var., trovões, e chuva.
3	Var.	S. E.	77,75	82.	78,12	3,4	.	Idem.
4	N. E.	S. E.	75,5	77.	76,94	0,5	1	Var., e seu orvalho.
5	N. E.	S. E.	75.	77,5	77,75	0,25	3	Nub., relamp., e chuva.
6	Var.	S. E.	76,33	80.	80,5	0,1	2,6	Var., e orv. muito miudo.
7	O.	S. E.	76,66	79,5	76,62	9	.	Cob., e chuva.
8	Var.	S.	74,66	76,5	75,25	.	2	Var.
9	N. O.	S. E.	74,33	78.	79,75	.	3	Nub., e trovões. A Lua com sua corôa.
10	N. O.	S. E.	77.	80.	80,31	0,2	2,25	Nub., e orvalho.
11	Var.	S.	77,16	79.	78.	2	2,5	Var., e chuva.
12	N. O.	S. E.	75,33	79,5	78,37	.	1,5	Var.
13	Var.	S. E.	77,5	80.	80,25	.	1	Var.
14	N. O.	S.	78.	82.	81,25	.	1,8	Var., e relampagos.
15	Var.	S. E.	79.	83.	82,37	1	2	Nub., e chuva.
16	Var.	S. E.	79.	82.	81,25	8	1,3	Cob., trovões, e chuva.
17	L.	S. E.	77,16	79.	78,5	0,5	.	Cob., e chuva.
18	N. O.	S.	75,83	78.	77,87	0,75	.	Idem.
19	N. O.	Var.	76.	78.	76,88	4,5	.	Idem.
20	Var.	S.	75,66	75.	73,33	2,5	.	Idem.
21	Var.	S.	72.	76.	74,37	.	0,4	Var.
22	N. O.	Var.	73.	76,5	76,75	.	2	Var.
23	N.	S. E.	75,33	79.	80,5	.	2,25	Ser., e relampagos.
24	Var.	Var.	79.	83.	81,37	0,5	2,5	Var., nevoa, trovões, e chuva.
25	N. O.	S. E.	78,33	84,5	84,37	.	3	Nub., nevoa, e relamp.
26	Var.	S. E.	81,33	85.	85,75	.	3	Nub., e relampagos.
27	Var.	S. E.	81,33	86,25	88,12	.	4,4	Var., e relamp. O mar luminoso.
28	Var.	S. O.	84,5	89,5	84,87	0,3	3	Var., com seu orvalho.
29	N. O.	S.	78,66	78.	76,25	1	.	Cob., e chuva.
30	N. O.	S. E.	74,66	77,5	76,75	.	1,3	Cob.
31	N. O.	S. E.	74,83	79.	81,87	.	1,5	Ser., e relampagos.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

JANEIRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	Meio dia.	Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2,26	28 2,8	28 2,32	6 34 47
2	28 1,43	28 1,3	28 1,5	6 33 47
3	28 1,61	28 0,9	28 0,85	6 36 25
4	28 1,1	28 0,65	28 0,81	6 36 18
5	28 1,61	28 1,7	28 1,47	6 35 6
6	28 1,41	28 1,5	28 1,8	6 36 40
7	28 1,97	28 1,9	28 1,97	6 36 0
8	28 1,73	28 1,4	28 0,9	6 35 28
9	28 0,03	27 11,7	27 11,8	6 34 45
10	27 11,65	27 11,6	27 11,02	6 34 50
11	27 11,33	27 11,6	27 11,75	6 36 37
12	28 1,7	28 2,2	28 2,65	6 34 2
13	28 2,75	28 3,1	28 2,47	6 35 0
14	28 2,93	28 2,5	28 2,2	6 34 2
15	28 2,76	28 2,6	28 1,92	6 35 28
16	28 1,51	28 1,3	28 0,92	6 34 16
17	28 1,51	28 2,25	28 2,17	6 34 40
18	28 2,16	28 3,1	28 2,73	6 34 20
19	28 3,05	28 2,6	28 1,77	6 31 13
20	28 2,3	28 1,3	28 0,98	6 31 0
21	28 1,48	28 1,25	28 1,37	6 30 0
22	28 2,2	28 2,2	28 1,77	6 35 15
23	28 3,15	28 2,9	28 2,82	6 32 35
24	28 3,33	28 3,4	28 3,05	6 34 0
25	28 3,32	28 3,1	28 2,6	6 32 25
26	28 3,4	28 3,3	28 2,7	6 32 40
27	28 3,23	28 3.	28 2,82	6 33 0
28	28 3,3	28 3,2	28 2,8	6 29 40
29	28 2,63	28 2,4	28 1,9	6 32 10
30	28 2,22	28 2.	28 1,75	6 31 53
31	28 2,05	28 2,1	28 1,45	6 31 51

FEVEREIRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	Meio dia.	Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 1,95	28 1,8	28 1,85	6 32 23
2	28 1,65	28 1,6	28 1,4	6 34 30
3	28 1,35	28 1,3	28 1,32	6 31 10
4	28 1,56	28 1,75	28 1,51	6 33 20
5	28 1,85	28 1,8	28 1,56	6 34 0
6	28 2,21	28 2,1	28 1,7	6 33 27
7	28 2,03	28 2.	28 1,81	6 34 12
8	28 2,58	28 2,6	28 2,37	6 31 55
9	28 3,1	28 3,6	28 3,15	6 32 0
10	28 3,1	28 2,6	28 2,75	6 34 25
11	28 2,8	28 2,2	28 1,85	6 32 18
12	28 1,35	28 1,4	28 1,02	6 34 20
13	28 1,6	28 1,8	28 0,97	6 34 53
14	28 1,33	28 1,4	28 1,07	6 37 40
15	28 1,8	28 1,8	28 1,72	6 34 40
16	28 2,43	28 2,3	28 2.	6 33 2
17	28 2,5	28 2,6	28 1,95	6 32 0
18	28 2,98	28 2,6	28 2,37	6 34 48
19	28 1,83	28 2,6	28 2,57	6 33 48
20	28 2,66	28 2,7	28 2,27	6 32 53
21	28 2,31	28 1,8	28 1,17	6 36 8
22	28 0,83	28 0,5	28 0,9	6 32 10
23	28 0,1	28 0,25	28 0,11	6 36 40
24	28 0,1	28 0,0	28 0,4	6 37 47
25	28 0,36	28 0,7	28 0,8	6 37 10
26	28 1,6	28 1,8	28 1,57	6 36 53
27	28 1,58	28 1,6	28 1,72	6 38 22
28	28 2,27	28 2,9	28 2,75	6 38 15

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2,43	28 2,4	28 2,25	6 34 5
2	28 2,1	28 2,1	28 2,12	6 35 7
3	28 2,5	28 2,5	28 2,02	6 35 32
4	28 1,5	28 1,8	28 1,54	6 33 53
5	28 2,33	28 2,4	28 2,65	6 35 27
6	28 2,55	28 3,8	28 3,47	6 36 20
7	28 4,2	28 2,93	28 3,35	6 32 50
8	28 3,63	28 4.	28 2,6	6 35 23
9	28 2,56	28 2,2	28 2,1	6 35 50
10	28 1,73	28 1,7	28 1,55	6 38 0
11	28 1,5	28 1,35	28 0,75	6 36 7
12	28 0,41	28 0,4	28 0,0	6 33 50
13	28 1,23	28 1,2	28 1,2	6 36 27
14	28 1,46	28 1,5	28 0,9	6 36 10
15	28 1,6	28 1,8	28 2,1	6 35 47
16	28 3,1	28 3,2	28 3,25	6 33 27
17	28 4,1	28 4.	28 4,2	6 36 52
18	28 4,4	28 4,3	28 4,4	6 37 18
19	28 4,46	28 4,3	28 4,07	6 40 7
20	28 4,4	28 4,6	28 4.	6 37 55
21	28 3,9	28 4.	28 3,27	6 35 40
22	28 3,53	28 3,4	28 2,93	6 35 30
23	28 3,33	28 3,2	28 3,1	6 34 0
24	28 3,86	28 3,9	28 3,75	6 37 55
25	28 3,33	28 3,6	28 2,75	6 35 27
26	28 3,48	28 3.	28 2,87	6 35 12
27	28 3,33	28 3,3	28 2,97	6 35 57
28	28 3,06	28 3,6	28 3,2	6 35 40
29	28 2,5	28 2,8	28 2,5	6 35 7
30	28 3,32	28 3,5	28 2,7	6 35 40
31	28 2,93	28 2,7	28 2,5	6 35 32

ABRIL de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2,53	28 2,2	28 2,32	6 32 35
2	28 3,1	28 3,2	28 4,16	6 34 0
3	28 5,16	28 5.	28 5,01	6 34 38
4	28 4,1	28 3,8	28 3,42	6 34 2
5	28 2,13	28 1,7	28 1,65	6 33 37
6	28 2,76	28 2,8	28 3,02	6 34 9
7	28 3,93	28 3,5	28 3,6	6 32 50
8	28 3,96	28 4.	28 4.	6 34 33
9	28 4,5	28 4,5	28 4,45	6 32 53
10	28 4.	28 3,5	28 3,67	6 35 20
11	28 4,2	28 3,9	28 3,42	6 34 27
12	28 3,2	28 3.	28 2,72	6 33 13
13	28 2,8	28 3.	28 2,75	6 32 53
14	28 2,93	28 2,7	28 2,55	6 32 51
15	28 3,1	28 3,2	28 3,47	6 33 13
16	28 4.	28 3,2	28 3,37	6 34 40
17	28 3,66	28 3,4	28 2,82	6 34 27
18	28 3,5	28 3,1	28 2,97	6 33 50
19	28 3,2	28 2,5	28 2,3	6 35 13
20	28 3,66	28 3,8	28 4.	6 33 5
21	28 4,26	28 4,3	28 4.	6 31 58
22	28 3,86	28 3,5	28 3,13	6 33 57
23	28 3,36	28 3,1	28 3,5	6 32 15
24	28 3,9	28 3,5	28 3,25	6 32 52
25	28 3,26	28 3,1	28 3,27	6 32 45
26	28 3,56	28 3,3	28 3,05	6 28 40
27	28 3,22	28 2,8	28 2,4	6 28 0
28	28 2,3	28 2,7	28 2,92	6 31 30
29	28 4,86	28 4,6	28 4,37	6 31 22
30	28 4,63	28 4,6	28 4,4	6 32 45

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MAIO de 1785.					*JUNHO de 1785.*				
Dias do mez.	BAROMETRO.			Bussola.	Dias do mez.	BAROMETRO.			Bussola.
	Manhã.	Meio dia.	Tarde.			Manhã.	Meio dia.	Tarde.	
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.		Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 4,1	28 3,8	28 3,75	6 31 17	1	28 5,73	28 5,9	28 5,46	6 33 25
2	28 3,33	28 2,5	28 2,45	6 32 35	2	28 6,2	28 5,8	28 5,65	6 26 0
3	28 3,33	28 3,7	28 3,97	6 30 0	3	28 5,58	28 5,1	28 5.	6 28 20
4	28 5,33	28 5,4	28 5,3	6 34 30	4	28 5,03	28 4,5	28 4,62	6 33 5
5	28 5,43	28 4,7	28 4,72	6 35 5	5	28 4.	28 4,3	28 4,4	6 33 56
6	28 4,35	28 3,8	28 3,45	6 33 38	6	28 5,65	28 5,7	28 5,67	6 27 3
7	28 3,1	28 2,8	28 2,5	6 33 47	7	28 5,9	28 5,7	28 5,29	6 30 40
8	28 1,83	28 1,3	28 1,32	6 34 2	8	28 5,33	28 5,35	28 5,5	6 31 13
9	28 1,86	28 2,2	28 2,4	6 34 25	9	28 5,36	28 5,5	28 5,45	6 28 40
10	28 4,06	28 4.	28 3,85	6 39 25	10	28 5,5	28 5,3	28 5.	6 32 22
11	28 3,66	28 3,1	28 3,55	6 35 22	11	28 5,2	28 5,2	28 4,47	6 34 2
12	28 3,86	28 3,8	28 4,1	6 39 2	12	28 4,8	28 4,7	28 4,58	6 33 13
13	28 5,25	28 5,3	28 5,42	6 39 52	13	28 5,3	28 5.	28 4,59	6 33 58
14	28 5,9	28 6.	28 5,65	6 34 40	14	28 4,23	28 4.	28 3,76	6 35 40
15	28 6,18	28 6.	28 5,75	6 39 43	15	28 3,5	28 3,3	28 3,02	6 31 33
16	28 5,9	28 5,7	28 5,9	6 37 48	16	28 3,52	28 3,1	28 2,77	6 30 42
17	28 5,73	28 5,5	28 5,3	6 35 27	17	28 2,2	28 2,6	28 1,91	6 32 57
18	28 5,03	28 4,7	28 4,62	6 35 47	18	28 1,8	28 2,37	28 2,1	6 35 15
19	28 5,06	28 4,9	28 4,67	6 35 55	19	28 2.	28 2,2	28 1,6	6 34 40
20	28 4,93	28 4,9	28 4,35	6 37 29	20	28 3,1	28 3,33	28 3,9	6 31 50
21	28 3,93	28 3,4	28 3,15	6 38 33	21	28 4,6	28 4,37	28 4,6	6 33 45
22	28 2,6	28 2,4	28 2,12	6 38 0	22	28 6,2	28 6,07	28 5,87	6 35 18
23	28 2,9	28 2,9	28 3,27	6 35 43	23	28 5,6	28 6.	28 5,4	6 34 25
24	28 4,41	28 4,7	28 4,8	6 36 20	24	28 6,2	28 5,93	28 6,05	6 35 0
25	28 5,13	28 5.	28 4,55	6 35 20	25	28 2,6	28 3,37	28 2,01	6 32 58
26	28 5,13	28 5,2	28 4,6	6 35 16	26	28 1,7	28 1,63	28 1,72	6 37 3
27	28 4,4	28 4,3	28 3,95	6 35 0	27	28 3,3	28 3,1	28 3,47	6 31 13
28	28 4,63	28 4,5	28 4,2	6 32 25	28	28 4,5	28 4,4	28 4.	6 31 58
29	28 4,71	28 4,5	28 4,77	6 33 27	29	28 3,4	28 3,63	28 3,5	6 32 40
30	28 5,4	28 5,3	28 5,19	6 26 40	30	28 4,6	28 4,26	28 4,6	6 30 0
31	28 5,73	28 5,9	28 5,46	6 29 57					

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã. Pol.	L.	Meio dia. Pol.	L.	Tarde. Pol.	L.	Bussola. G.	M.	S.
1	28	5,3	28	5,4	28	5,72	6	31	48
2	28	5,83	28	5,8	28	5,34	6	34	23
3	28	5.	28	4,5	28	4,72	6	32	30
4	28	5,63	28	5,7	28	5,52	6	29	32
5	28	4,72	28	4,4	28	3,31	6	36	37
6	28	4,06	28	4,3	28	4,57	6	34	40
7	28	5,63	28	5,7	28	4,98	6	35	0
8	28	4,6	28	4,9	28	3,6	6	35	0
9	28	3,53	28	3,6	28	3,68	6	37	27
10	28	4,63	28	4,8	28	4,54	6	34	57
11	28	4,85	28	5,4	28	5,38	6	32	50
12	28	6,25	28	6,3	28	5,82	6	34	27
13	28	5,66	28	5.	28	4.35	6	38	18
14	28	4,06	28	3.9	28	3,5	6	36	13
15	28	3,93	28	4,1	28	3,78	6	32	50
16	28	4,06	28	4.	28	3,11	6	35	0
17	28	1,33	28	0,6	28	0,4	6	35	0
18	28	4,06	28	4,6	28	4,29	6	33	3
19	28	6,1	28	5,7	28	5,02	6	34	22
20	28	4,16	28	4,2	28	3,94	6	36	38
21	28	3,86	28	4.	28	4,06	6	33	18
22	28	2,6	28	2,4	28	2,9	6	33	13
23	28	4,38	28	4,85	28	4,42	6	33	18
24	28	4,26	28	4,1	28	4,05	6	34	33
25	28	3,4	28	3,4	28	3,17	6	33	53
26	28	3,46	28	3,2	28	3,02	6	35	28
27	28	3,66	28	3,4	28	3,2	6	33	47
28	28	3,26	28	3,1	28	3,02	6	32	30
29	28	3,66	28	3,9	28	3,6	6	37	33
30	28	3,9	28	3,9	28	3,3	6	35	0
31	28	4,16	28	4,3	28	3,97	6	36	32

AGOSTO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã. Pol.	L.	Meio dia. Pol.	L.	Tarde. Pol.	L.	Bussola. G.	M.	S.
1	28	4,36	28	4,2	28	3,95	6	34	4
2	28	4,5	28	5,2	28	5,35	6	38	38
3	28	6,06	28	6.	28	5,27	6	32	10
4	28	5,8	28	5,7	28	5,7	6	30	0
5	28	5,8	28	5,1	28	5,1	6	33	33
6	28	5,23	28	5.	28	4,5	6	35	0
7	28	4,65	28	4,65	28	4,2	6	35	48
8	28	4,83	28	4,7	28	4,47	6	33	0
9	28	3,86	28	3,9	28	3,42	6	36	30
10	28	3,33	28	3.	28	2,38	6	33	17
11	28	2,83	28	2,9	28	2,77	6	35	18
12	28	2,03	28	2,1	28	3,17	6	34	46
13	28	5,6	28	5,6	28	5,85	6	31	28
14	28	6,16	28	5,8	28	5,38	6	37	10
15	28	4,7	28	4,4	28	3,97	6	34	57
16	28	3,83	28	4.	28	3,85	6	32	18
17	28	4,56	28	4,8	28	5,2	6	33	27
18	28	5,96	28	6,7	28	5,91	6	34	25
19	28	6,2	28	5,5	28	4,9	6	30	29
20	28	4,03	28	3,9	28	3,12	6	31	25
21	28	3,23	28	3,2	28	3,5	6	33	13
22	28	5,18	28	5,4	28	5,9	6	32	25
23	28	6,8	28	6,75	28	6,6	6	34	33
24	28	6,83	28	6,7	28	6,42	6	29	40
25	28	6,23	28	6,2	28	6,15	6	31	20
26	28	6,33	28	6,1	28	5,82	6	32	47
27	28	5,1	28	4,9	28	3,7	6	32	58
28	28	3,71	28	3,3	28	2,85	6	34	13
29	28	2,8	28	2,7	28	2,62	6	32	15
30	28	3,43	28	3,6	28	3,45	6	32	15
31	28	3,63	28	3,2	28	2,35	6	32	20

DIARIO METEOROLOGICO.

SETEMBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2,21	28 1,85	28 1,52	6 32 52
2	28 2,26	28 2,25	28 1,75	6 35 35
3	28 3,85	28 3,7	28 4,25	6 34 0
4	28 5,35	28 5,3	28 5,32	6 34 43
5	28 4,8	28 4,6	28 3,82	6 29 33
6	28 4,43	28 4,5	28 3,95	6 30 18
7	28 2,76	28 2,5	28 2.	6 31 25
8	28 1,63	28 0,8	28 0,61	6 33 28
9	28 0,97	28 1,6	28 2,15	6 34 50
10	28 3,5	28 3,8	28 3,76	6 33 58
11	28 4,76	28 4,7	28 4,05	6 30 40
12	28 4,26	28 4,4	28 4,57	6 33 32
13	28 4,87	28 4,6	28 4,35	6 31 58
14	28 4.	28 3,8	28 3,37	6 35 57
15	28 3,33	28 2,9	28 2,5	6 36 22
16	28 1,77	28 1,2	28 0,5	6 34 8
17	28 0,18	28 0,7	28 0,86	6 37 45
18	28 2,9	28 3,4	28 2,55	6 38 27
19	28 3,03	28 2,5	28 2,86	6 36 8
20	28 4,66	28 5,2	28 5.	6 34 40
21	28 5,32	28 5,25	28 5,4	6 34 53
22	28 5,72	28 5,4	28 5,1	6 33 23
23	28 5,1	28 4,6	28 4,11	6 33 25
24	28 2,9	28 2,3	28 1,98	6 31 27
25	28 4,75	28 5,7	28 6,08	6 34 37
26	28 6,7	28 7.	28 6,53	6 31 45
27	28 6,9	28 6,8	28 6,71	6 33 3
28	28 6,13	28 6,3	28 5,3	6 34 33
29	28 5.	28 4,6	28 4,66	6 36 3
30	28 4,5	28 4,4	28 4.	6 36 12

OUTUBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 3,87	28 4.	28 3,95	6 34 18
2	28 4, 4	28 4,6	28 4,05	6 35 33
3	28 4,25	28 3,9	28 3,98	6 32 40
4	28 3,83	28 3,8	28 3,56	6 34 27
5	28 3,72	28 3,6	28 3,31	6 38 10
6	28 3,1	28 2,6	28 2,19	6 38 17
7	28 3,38	28 3,7	28 3,76	6 32 35
8	28 4,27	28 3,9	28 3,5	6 35 14
9	28 3,45	28 3,2	28 3,17	6 34 48
10	28 3,55	28 3,2	28 2,82	6 34 5
11	28 3,55	28 3,2	28 2,5	6 32 27
12	28 2,41	28 2,6	28 1,65	6 34 27
13	28 1,2	28 0,7	28 0,32	6 32 50
14	28 0,76	28 0,7	28 0,74	6 31 33
15	28 0,52	27 11,7	27 11,64	6 31 2
16	27 11,77	28 0,5	28 0,24	6 33 55
17	28 1.	28 1,4	28 1,25	6 34 20
18	28 2,3	28 2,2	28 2,17	6 30 55
19	28 3.	28 3,2	28 3,14	6 31 40
20	28 3,2	28 3,2	28 3,17	6 32 45
21	28 3,4	28 3,7	28 3,7	6 34 40
22	28 4,65	28 4,35	28 4,06	6 36 45
23	28 3,56	28 3.	28 3,9	6 33 25
24	28 1,1	28 0,4	27 11,66	6 31 33
25	27 10,83	27 11.	27 10,75	6 33 15
26	27 11,86	27 11,5	28 0,02	6 36 27
27	28 0,76	28 0,5	28 1,02	6 35 20
28	28 2,47	28 2,1	28 1,9	6 35 40
29	28 1, 8	28 1,2	28 0,31	6 34 33
30	28 0, 8	28 0,4	28 0,31	6 34 13
31	28 0,66	28 0,9	28 1,08	6 35 25

DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 0,98	28 1,4	28 1,34	6 35 7
2	28 1,65	28 1,9	28 1,57	6 37 58
3	28 1,35	28 0,9	28 1,18	6 35 0
4	28 1,53	28 1,2	28 1,27	6 36 20
5	28 2,43	28 2,8	28 2,75	6 36 10
6	28 1,98	28 1,8	28 1,78	6 36 28
7	28 1,3	28 1,9	28 2,55	6 36 57
8	28 3,2	28 3,3	28 3,71	6 34 42
9	28 3,71	28 3,4	28 2,85	6 33 7
10	28 2,23	28 1,8	28 1,1	6 33 18
11	28 1,48	28 1,8	28 1.	6 34 17
12	28 0,4	28 0,4	27 11,62	6 34 20
13	27 11,7	27 11,9	27 11,97	6 35 50
14	28 0,77	28 1,2	28 1,12	6 36 15
15	28 1,43	28 1,1	28 0,65	6 35 3
16	28 1,46	28 1,8	28 1,57	6 34 17
17	28 1,93	28 1,6	28 1,3	6 34 20
18	28 1,33	28 1,1	28 1,02	6 35 12
19	28 0,33	28 0,5	28 0,6	6 34 45
20	28 2,38	28 2,2	28 2,42	6 31 13
21	28 2,32	28 2,25	28 1,74	6 32 56
22	28 1,13	28 0,4	28 0,25	6 32 25
23	28 0,16	27 11,9	27 11,85	6 32 50
24	28 0,8	28 1,2	28 0,92	6 37 33
25	28 0,75	28 0,5	28 0,05	6 34 20
26	27 11,53	27 11,4	27 10,8	6 34 18
27	27 11,12	28 10,9	27 11,45	6 35 40
28	28 0,76	28 1,25	28 1,62	6 35 20
29	28 2,83	28 2,8	28 2,84	6 34 43
30	28 3,18	28 3.	28 2,59	6 36 2

DEZEMBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2, 4	28 2,6	28 2,02	6 35 38
2	28 0,76	28 0,6	28 0,45	6 36 30
3	28 1,06	28 1,1	28 0,97	6 39 40
4	28 1,73	28 2,5	28 1,87	6 37 13
5	28 2,03	28 2.	28 1,4	6 38 45
6	28 1,36	28 1,3	28 1,62	6 32 5
7	28 1,68	28 1,9	28 1,76	6 32 33
8	28 1,42	28 1,6	28 1,29	6 32 3
9	28 0,65	28 0,7	28 0,45	6 28 53
10	28 0,4	28 0,2	28 0,67	6 33 20
11	28 1,53	28 1,7	28 1,7	6 30 40
12	28 1,66	28 1,9	28 1,71	6 33 40
13	28 1,9	28 2.	28 1,95	6 35 58
14	28 2,03	28 2.	28 1,62	6 40 3
15	28 1,15	28 1,3	28 0,52	6 34 13
16	28 0,02	27 11,6	27 11,2	6 39 0
17	28 0,03	27 11,7	27 11,3	6 30 47
18	27 11,58	27 11,6	27 11.	6 36 40
19	27 11,22	27 11,4	27 11,25	6 38 40
20	28 0,2	28 0,4	28 0,72	6 38 43
21	28 1,46	28 1,9	28 1,75	6 36 27
22	28 1,86	28 1,9	28 1,4	6 34 0
23	28 1,36	28 0,9	28 0,6	6 34 53
24	28 0,66	28 0,2	27 11,72	6 34 10
25	28 0,7	28 0,4	28 0,01	6 36 40
26	28 1,15	28 0,6	28 0,26	6 32 28
27	28 0,5	28 0,7	27 11,74	6 33 58
28	28 0,33	28 0,7	28 1,05	6 33 35
29	28 2,22	28 2,7	28 2,52	6 35 47
30	28 3.	28 3,2	28 2,77	6 33 0
31	28 1,56	28 1,5	28 0,45	6 33 33

BAROMETRO.

TABOA I.	Elevaçaõ maxima.	Elevaçaõ minima.	Elevaçaõ media.	Elevaçaõ da manhá.	Elevaçaõ do meio dia.	Elevaçaõ da tarde.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.
Janeiro.	28 3,7	27 10,5	28 1,98	28 2,05	28 1,96	28 1,75
Fevereiro.	28 3,9	27 11,8	28 1,78	28 1,84	28 1,86	28 1,65
Março.	28 4,8	27 11,7	28 2,8	28 2,9	28 2,88	28 2,61
Abril.	28 5,5	28 1,2	28 3,43	28 3,58	28 3,38	28 3,33
Maio.	28 6,5	28 1,0	28 4,28	28 4,42	28 4,26	28 4,16
Junho.	28 6,7	28 1,3	28 4,33	28 4,48	28 4,34	28 4,18
Julho.	28 6,5	28 1,3	28 4,21	28 4,31	28 4,3	28 4,01
Agosto.	28 7,35	28 0,2	28 4,68	28 4,76	28 4,68	28 4,43
Setembro.	28 7,15	27 11,3	28 3,83	28 3,95	28 3,89	28 3,65
Outubro.	28 4,95	27 10,0	28 2,33	28 2,37	28 2,22	28 2,06
Novembro.	28 4,35	27 10,4	28 1,34	28 1,4	28 1,38	28 1,25
Dezembro.	28 3,3	27 10,6	28 1,27	28 1,15	28 1,18	28 0,89

Elevaçaõ de duas em duas horas.

TAB. II.	6 horas da manhá.	8 horas da manhá.	10 horas da manhá.	12 horas da manhá.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.
Janeiro.	28 1,83	28 2,1	28 2,22	28 1,96	28 1,63	28 1,26	28 1,65	28 2,3	28 1,87
Fever.	28 1,62	28 1,87	28 2,12	28 1,86	28 1,67	28 1,3	28 1,61	28 2,15	28 1,77
Março.	28 2,57	28 2,93	28 3,18	28 2,88	28 2,54	28 2,28	28 2,59	28 3,0	28 2,75
Abril.	28 3,26	28 3,62	28 4,0	28 3,38	28 3,12	28 2,97	28 3,61	28 3,89	28 3,48
Maio.	28 4,13	28 4,41	28 4,74	28 4,26	28 3,96	28 3,88	28 4,2	28 4,6	28 4,28
Junho.	28 4,16	28 4,47	28 4,77	28 4,34	28 4,01	28 3,93	28 4,27	28 4,55	28 4,31
Julho.	28 4,02	28 4,31	28 4,65	28 4,3	28 3,93	28 3,69	28 3,98	28 4,4	28 4,16
Agosto.	28 4,48	28 4,74	28 5,06	28 4,68	28 4,4	28 4,18	28 4,43	28 4,73	28 4,59
Set.	28 3,68	28 3,98	28 4,22	28 3,89	28 3,49	28 3,33	28 3,66	28 4,13	28 3,8
Outub.	28 2,12	28 2,39	28 2,56	28 2,22	28 1,8	28 1,67	28 2,0	28 2,5	28 2,16
Nov.	28 1,1	28 1,41	28 1,68	28 1,38	28 1,17	28 0,93	28 1,2	28 1,73	28 1,32
Dez.	28 0,86	28 1,17	28 1,38	28 1,18	28 0,85	28 0,47	28 0,88	28 1,44	28 1,02

THERMOMETRO.

TABOA III.	Calor maximo.	Calor minimo.	Calor medio do mez.	Calor medio da manhã.	Calor medio do meio dia.	Calor medio da tarde.
	G.	G.	G.	G.	G.	G.
Janeiro.	89,75	74.	81,19	79,08	81,71	82,78
Fevereiro.	90.	75.	80,41	79,2	80,7	81,34
Março.	82.	70.	76,28	75,35	76,8	76,69
Abril.	85,5	66,5	76,19	74,83	75,61	78,13
Maio.	78,5	66.	71,32	69,49	71,25	73,23
Junho.	82.	55,75	68.61	66,63	68,76	70,45
Julho.	80.	52,5	67,76	65,47	68.	69,82
Agosto.	79.	65.	72,25	69,97	72,53	74,25
Setembro.	84.	64.	72,4	70,69	73,17	73,34
Outubro.	86.	66.	74,23	72,19	75,09	75,41
Novembro.	87.	69.	76,61	74,81	77,68	77,33
Dezembro.	90.	71.	78,72	76,83	79,88	79,45

Calor medio de duas em duas horas.

TAB. IV.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.
Janeiro.	78,2	79,03	81,1	81,71	82,66	83,66	83,0	81,7	81,25
Fever.	77,71	78,3	79,42	80,7	81,64	81,9	81,26	80,51	80,18
Março.	74,8	75,17	76,1	76,8	77,3	77,43	79,96	76,35	76,36
Abril.	74,25	74,71	75,56	75,61	78,01	78,4	78,25	77,75	76,56
Maio.	69,11	69,3	69,98	71,25	72,35	73,58	73,66	73,4	71,58
Junho.	66,24	66,1	67,38	68,76	70,15	71,06	70,76	70,0	68,61
Julho.	61,24	65,23	66,69	68,0	69,22	70,45	70,13	69,67	67,58
Agosto.	68,9	69,79	71,12	72,53	73,75	74,71	74,45	73,75	72,37
Set.	70,0	70,33	71,68	73,17	73,88	73,95	73,1	72,45	72,33
Outub.	71,03	72,02	73,63	75,09	76,25	76,53	75,1	73,72	74,17
Nov.	73,66	74,58	76,21	77,68	78,66	77,85	76,88	75,48	76,38
Dez.	75,56	76,62	78,30	79,88	80,62	80,33	79,07	77,82	78,52

Numeros dos dias.

TABOA V.	Serenos.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relampagos.	Trovoada.	Chuva.	Nevoa.	Aurora Aſtral.	Luz Zodiacal.
Janeiro.	3	13	10	5	9	7	13	4	*	1
Fevereiro.	5	12	2	9	3	6	15	10	*	*
Março.	*	17	6	8	11	2	24	2	*	*
Abril.	8	12	8	2	5	*	10	9	*	2
Maio.	13	6	8	4	*	*	7	17	*	*
Junho.	12	10	3	5	3	1	9	17	*	2
Julho.	11	5	12	3	*	*	6	19	*	1
Agoſto.	11	10	10	*	*	*	2	14	3	*
Setembro.	1	10	9	10	1	4	14	9	*	1
Outubro.	3	16	7	5	2	4	11	6	*	1
Novembro.	*	20	6	4	4	9	21	1	*	1
Dezembro.	2	15	6	8	7	5	18	3	*	*

Quantidade da Chuva, e Vaporaçaõ.

TAB. VI.	Chuva.		Vaporaçaõ.	
	Pol.	L.	Pol.	L.
Janeiro.	5	5,	6	2,9
Fevereiro.	6	9,	4	7,9
Março.	14	6,5	1	1,5
Abril.	7	8,	1	9,6
Maio.	2	5,	1	3,
Junho.	1	9,	0	8,84
Julho.	0	5,	1	2,5
Agoſto.	0	0,5	2	1,8
Setembro.	3	3,9	2	0,
Outubro.	3	3,13	4	0,25
Novembro.	4	7,9	4	4,45
Dezembro.	3	7,7	4	9,55

Ventos dominantes.

TAB. VII.	Manhã.	Tarde.
Janeiro.	Variavel.	S. E.
Fevereiro.	N. O.	S. E.
Março.	Var.	S. E.
Abril.	N. O.	S. E.
Maio.	Var. e N. O.	S. E.
Junho.	N. O.	Var. e S. E.
Julho.	Var.	Var.
Agoſto.	Var.	Var.
Setembro.	Var.	Var.
Outubro.	Var.	S. E.
Novembro.	Var.	S. E.
Dezembro.	Var.	S. E.

In-

Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA VIII. Pontos Lunares.	Elevaçaõ media do Barometro.	Calor medio.	Ventos dominantes. N.	N.E.	N.O.	S.	S.E.	S.O.	L.	O.
	Pol. L.	°								
Lua em conjunçaõ.	28 3,03	75,46	5	5	30	10	49	*	4	1
Lua em oppofiçaõ.	. 2,92	75,61	6	6	23	4	52	*	8	7
I. Quarto.	. 3,57	74,17	4	2	25	10	42	*	8	5
II. Quarto.	. 2,83	67,37	21	9	15	3	36	12	4	3
Apogeu.	. 2,86	75,18	11	5	17	12	39	7	6	7
Perigeu.	. 2,89	79,82	6	2	26	7	24	1	5	23
Luniftico Auftral.	. 2,66	75,14	1	7	25	11	48	*	6	11
Luniftico Boreal.	. 3,21	80,26	9	5	36	*	37	8	6	3
Equinoccio afcendente.	. 2,42	74,83	1	*	25	10	47	10	6	3
Equinoccio defcendente.	. 2,78	75,63	3	5	26	*	49	5	4	4
I. Oitante.	. 3,26	74,39	*	4	38	7	35	*	4	*
II. Oitante.	. 2,29	76,44	13	4	35	4	26	8	*	8
III. Oitante.	. 3,07	75,04	3	8	21	6	27	19	6	4
IV. Oitante.	. 2,88	75,19	11	9	39	4	31	*	1	6

Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA IX. Pontos Lunares.	Numero dos dias. Serenos.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relamp.	Trovoada.	Chuva.	Nevoa.	Aur. Auftr.	Luz-Zod.
Lua em conjunçaõ.	1	6	5	1	5	*	5	4	*	*
Lua em oppofiçaõ.	4	3	3	2	1	1	5	4	*	*
I. Quarto.	3	7	1	1	*	2	3	2	*	1
II. Quarto.	4	6	1	2	4	2	7	2	*	*
Apogeu.	2	6	3	2	3	1	5	4	*	*
Perigeu.	1	10	1	1	1	2	7	4	1	*
Luniftico Auftral.	2	4	4	3	2	2	5	6	*	*
Luniftico Boreal.	3	5	3	2	1	*	6	2	*	*
Equinoccio afcendente.	2	7	4	1	2	2	5	4	*	1
Equinoccio defcendente.	*	6	5	1	3	3	6	4	*	*
I. Oitante.	3	4	4	1	1	1	5	6	*	*
II. Oitante.	1	9	1	1	2	1	6	3	*	*
III. Oitante.	1	4	5	2	1	1	6	5	*	*
IV. Oitante.	2	6	3	2	2	2	4	6	*	*

De-

Declinação Oriental da Agulha-Magnetica.

TABOA X.	Maxima.	Minimá.	Media.	Manhã.	Meio dia.	Tarde.
	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.
Janeiro.	6 41	6 20	6 33 53	6 32 12	6 35 0	6 34 28
Fevereiro.	. 40 30	. 27	. 34 29	. 33 8	. 35 29	. 34 50
Março.	. 42	. 28	. 35 43	. 34 38	. 36 17	. 36 13
Abril.	. 38	. 21	. 33 2	. 31 59	. 33 58	. 33 10
Maio.	. 44	. 25	. 34 57	. 33 50	. 35 40	. 35 22
Junho.	. 39	. 20	. 32 18	. 32 19	. 32 22	. 32 14
Julho.	. 43	. 26	. 34 13	. 34 9	. 35 25	. 33 5
Agosto.	. 40	. 26 30	. 33 16	. 32 54	. 33 56	. 32 59
Setembro.	. 45	. 26	. 33 59	. 33 3	. 34 26	. 34 29
Outubro.	. 42	. 25	. 34 8	. 32 47	. 34 31	. 35 7
Novembro.	. 45	. 28	. 34 53	. 33 14	. 35 49	. 35 37
Dezembro.	. 46	. 21	. 35 0	. 32 32	. 36 44	. 35 43

Declinação media de duas em duas horas.

TAB. XI.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.
Janeir.	6 31 42	6 32 0	6 32 52	6 35 0	6 35 31	6 34 24	6 34 8	6 33 50	6 33 42
Fever.	. 33 19	. 32 12	. 33 52	. 35 29	. 35 35	. 35 2	. 34 26	. 33 51	. 34 13
Março.	. 34 56	. 34 12	. 34 36	. 36 17	. 36 54	. 36 48	. 36 4	. 35 2	. 35 36
Abril.	. 32 4	. 32 8	. 31 46	. 33 58	. 33 52	. 33 26	. 33 18	. 32 36	. 32 58
Maio.	. 33 56	. 34 0	. 32 36	. 35 40	. 36 4	. 35 52	. 35 0	. 34 35	. 34 43
Junho.	. 32 6	. 32 38	. 32 33	. 32 22	. 32 44	. 32 19	. 32 22	. 31 32	. 32 14
Julho.	. 34 6	. 34 57	. 34 26	. 35 25	. 34 14	. 34 0	. 33 41	. 32 50	. 34 12
Agost.	. 32 23	. 32 59	. 33 21	. 33 56	. 33 42	. 33 29	. 32 50	. 31 58	. 33 5
Set.	. 32 47	. 33 8	. 33 10	. 34 26	. 35 2	. 35 6	. 34 26	. 33 14	. 33 55
Out.	. 33 4	. 32 35	. 32 41	. 34 31	. 35 45	. 35 39	. 34 55	. 34 10	. 34 10
Nov.	. 32 34	. 33 14	. 33 57	. 35 49	. 36 45	. 36 13	. 35 23	. 34 6	. 34 45
Dez.	. 32 0	. 31 44	. 33 23	. 36 44	. 37 0	. 36 6	. 35 15	. 33 50	. 34 30

DETERMINAÇAÕ

Das Orbitas dos Cometas

POR JOSÉ MONTEIRO DA ROCHA.

I. PARTE.

1. A Determinaçaõ das *Orbitas dos Cometas* he hum Problema, cuja difficuldade se dá bem a conhecer, por lha ter achado Newton muito grande (*). Só depois de haver feito muitas, e diversas tentativas he que descubrio este incomparavel Geometra a Soluçaõ, com que rematou a sua obra immortal dos *Principios Mathematicos*; Soluçaõ, de que elle se prezava muito, e com muita razaõ; pois nella se vê sobresahir admiravelmonte o genio creador, dom precioso que a Natureza reparte escaçamente de seculos em seculos pelo pequeno número dos seus escolhidos. Mas sendo, como he, taõ digna de Newton aquella Soluçaõ, nem por isso satisfez completamente ao que se desejava. Porque além de naõ passar de huma approximaçaõ do Problema, procede em grande parte graficamente; e as Soluçoẽs graficas, ainda que sejaõ elegantes, perfeitas, e exactas na theorica, saõ quasi sempre defeituosas na prática.

2. Mais de cincoenta annos depois tomou o sábio Euler a empreza de resolver esta questaõ de hum modo mais ge-

(*) Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi. Newt. lib. 3. *Princip. Prop.* 41.

geral, naõ se restringindo como Newton á hypothese das orbitas parabolicas, mas suppondo que ellas podem ser parabolicas, ellipticas, ou hyperbolicas (*). Sem embargo porém da grande habilidade d'este Author, que com a maravilhosa fecundidade de seu engenho contribuio muito para o progresso das sciencias Mathematicas em todas as suas partes, ficou o *Problema dos Cometas* como d'antes, por se acharem embaraços na execuçaõ d'aquelle methodo, que elle chama facil no mesmo titulo da sua obra. Porque suppõe, que primeiro se sabe proximamente a distancia do Cometa á terra no tempo da observaçaõ media; conhecimento, em que consiste a maior difficuldade da questaõ; e ainda que pelo seu mesmo methodo se póde conseguir, he tal a multidaõ de calculos necessarios para esse preliminar, que faraõ desanimar a mais determinada constancia. Depois d'isso procede de hum modo indirecto, calculando simultaneamente duas hypotheses pouco differentes da distancia proximamente conhecida, para deduzir duas orbitas, cada huma das quaes se ha de comparar a huma quarta observaçaõ, para corrigir as hypotheses pela regra de falsa posiçaõ. E tudo isto por hum modo taõ longo, e prolixo, que no exemplo do famoso Cometa de 1680, sem embargo de tomar as hypotheses dos calculos feitos por Newton, e Halley, gasta trinta e duas paginas de operações numericas para tirar a lume os elementos da orbita; e no outro exemplo do Cometa de 1744, deixando em segredo as longas tentativas, que fez para estabelecer proximamente as suas hypotheses, he outro tanto trabalho para deduzir os primeiros elementos, e depois disso doze paginas de calculo para os corrigir por outro methodo de tres hypotheses, que ajuntou no Additamento da mesma obra.

3. O certo he que os Astronomos, para cujo uso deve ser a Soluçaõ d'este Problema, deixando o caminho de Newton, e laberinto de Euler, e naõ fazendo conta das So-

---

(*) Theoria motuum Planetarum et Cometarum, &c. Berolini A. 1744.

Soluções de Bouguer, e Fontaine, nem de outras, que nunca deraõ o paſſo neceſſario da eſpeculaçaõ para a execuçaõ, ſe lançáraõ ao methodo ordinario das falſas poſiçóes, ultimo recurſo de que ſe valem, quando faltaõ as Soluções direćtas, e proprias de qualquer queſtaõ, ou quando ellas ſaõ notavelmente mais trabalhoſas do que os rodeios, que indirećtamente conduzem ao meſmo reſultado. Mas eſte methodo ſuppõe, como o de Euler, que ſe ſabe proximamente aquillo meſmo que ſe buſca, donde he neceſſario ter a felicidade de conjećturar previamente com acerto, para naõ perder o tempo, e a paciencia em muitos calculos inuteis; e por outra parte, ainda depois das mais felizes conjećturas, ſaõ taõ longos, e taõ penoſos os calculos, que he muito para admirar a conſtancia de trabalho, com que Halley, La-Caille, Pingré, La-Lande, e outros infatigaveis Aſtronomos ſe empregáraõ em calcular as Orbitas de todos os Cometas, que até o preſente ſe tem obſervado.

4 Por eſte motivo ſe deſeja ha muito tempo huma Soluçaõ expedita d'eſte embaraçado Problema. A Academia de Berlin o eſcolheo para aſſumpto do premio de 1774; requerendo, *Que ſe deſſem formulas geraes, e rigoroſas, para determinar a Orbita parabolica de hum Cometa, por meio de tres obſervações; e que ſe moſtraſſe o uſo dellas, para reſolver o Problema do modo mais ſimples, e mais exaćto.* Mas chegando o termo aprazado, e naõ ſe ſatisfazendo ella com as obras que concorrêraõ, prorogou a queſtaõ para o anno de 1778 com premio duplicado. Até agora naõ ſabemos em Portugal o que tem reſultado daquellas repetidas indagações, aſſim como naõ ſoubemos da propoſiçaõ, ſenaõ muito depois de ſer paſſado o ultimo termo della. Seja porém qual for o exito, que tenha tido, ou haja ainda de ter, o programma de Berlin, como ſempre he conveniente haver differentes methodos de reſolver a meſma queſtaõ, pareceo-me que o meu trabalho neſta materia naõ deixaria de ſe conformar com as intenções da noſſa Aca-

de-

demia, que ſobre todas começa a diſtinguir-ſe com tanto acerto em fazer juizo das couſas pela utilidade dellas (*).

5 Será eſta obra dividida em duas partes. Neſta primeira dou as Formulas geraes, exactas, e rigoroſas, para determinar as Orbitas dos Cometas, ſuppondo-as parabolicas, como he ſabido que podem ſuppôr-ſe, ao menos na maior parte d'elles, ſem erro ſenſivel. Neſtas formulas eſtaõ por huma vez feitos todos os raciocinios, que eraõ neceſſarios para a ſoluçaõ do Problema; e para ſe uſar d'ellas, naõ ha neceſſidade de ſe ir governando o Calculador por huma figura, que repreſente o caſo particular, de que ſe trata, mas com as quantidades dadas pelas obſervações achará o que ſe buſca, ſem haver couſa que o poſſa demorar. O que talvez ſe podia deſejar he, que o número das operações naõ foſſe taõ grande; mas iſſo vem da natureza da queſtaõ, que naõ dá lugar a eſperar-ſe com fundamento algum, que já mais ſe poſſa reſolver com duas, ou tres horas de trabalho. E quem reflectir, que as ſoluções indirectas ſaõ quaſi ſempre menos trabalhoſas na prática, e que a indirecta da noſſa queſtaõ requer huma multidaõ taõ notavel de calculos, naõ achará, que ſaõ muitos os que ſe devem fazer em conſequencia das noſſas Formulas.

6 Na ſegunda parte darei as Formulas, que convem á determinaçaõ das Orbitas ellipticas, todas as vezes que hum Cometa no tempo da ſua appariçaõ ſe deſviar ſenſivelmente de huma Orbita parabolica.

(*) Eſta Memoria precedeo em data ás duas do meſmo Author publicadas no volume antecedente; e foi lida na Aſſembléa de 27 de Janeiro de 1782.

§. I.

Principios, em que se funda a determinaçaõ da Orbita parabolica de hum Cometa.

7 Para se determinar huma parabola de grandeza, e de posiçaõ, he necessario saber-lhe o parametro, ou a distancia do foco ao vertice, que he, como se sabe, a quarta parte d'elle; a inclinaçaõ, que tem o plano da parabola a respeito de hum plano conhecido; a posiçaõ da linha de intersecçaõ d'estes dous planos; e a do eixo da mesma parabola. E attendendo ao movimento de hum corpo por esta curva, he além d'isso necessario saber-lhe a direcçaõ, e o instante, em que se achou, ou ha de achar em hum ponto dado da mesma curva, como por exemplo no vertice, que he o mais notavel de todos. Assim temos seis elementos que indagar na theorica de qualquer Cometa, os quaes na lingoagem dos Astronomos saõ: I. a distancia perihelia; II. a inclinaçaõ da Orbita; III. a longitude do nodo ascendente; IV. a longitude do perihelio; V. o instante da passagem pelo perihelio; VI. a direcçaõ do movimento.

8 Huma vez achados estes elementos, he facil de calcular o lugar do Cometa, para qualquer tempo dado, pelo methodo conhecido dos Astronomos, ou pelas formulas, que tambem para isso havemos de mostrar. Mas vir no conhecimento dos elementos por meio dos lugares observados, he, como temos dito, hum dos mais difficeis problemas da Astronomia moderna. A difficuldade sería muito maior, se fossemos obrigados a ligar immediatamente por meio de Equações os elementos procurados com as quantidades dadas pelas observações, como fizeraõ grandes Geometras, sem fruto algum. Havendo porém reflectido, que depois de sabermos as distancias do Cometa á terra no tempo de duas observações, por ellas se podem determinar aquelles elementos, esta consideraçaõ nos offerece a venta-

gem

gem de partirmos, para o dizer assim, a questaõ pelo meio, encaminhando primeiro a indagaçaõ para as referidas distancias, como se ellas fossem os elementos, que buscamos. Para isso serviráõ as proposições seguintes.

9 *Achar a relaçaõ entre a distancia de hum Cometa á terra, e o seu raio vector, para o tempo dado de qualquer observaçaõ* (Fig. 1.).

Supponde o Sol em S, a Terra em T, o Cometa em C, e abaixando d'elle para o plano da ecliptica a perpendicular CP, está claro que o angulo CTP he a latitude geocentrica do Cometa, e que o angulo PTS he igual á longitude do Cometa menos a do Sol. Assim fazendo $TC = x$, $SC = r$, $PTS = A$, $CTP = L$, e $TS = s$, quantidade conhecida pela theorica do Sol, no triangulo rectangulo CPT teremos $CP = x \text{Sen.} L$, $TP = x \text{Cos.} L$, e no triangulo rectangulo SPC, $r^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PS}^2 = x^2 \text{Sen.}^2 L + \overline{PS}^2$; mas o triangulo PTS pela propriedade conhecida dos Geometras dá $\overline{PS}^2 = s^2 + \overline{PT}^2 - 2 S.PT \text{Cos.} A = s^2 + x^2 \text{Cos.}^2 L - 2 s x \text{Cos.} L \text{Cos.} A$: logo substituindo este valor na equaçaõ precedente, reflectindo, que $\text{Sen.} L^2 + \text{Cos.} L^2 = 1$, teremos $r^2 = x^2 - 2 s x \text{Cos.} L \text{Cos.} A + s^2$. E pondo a quantidade dada $2 s \text{Cos.} L \text{Cos.} A = a$, será finalmente $r^2 = x(x - a) + s^2$.

10. *Achar a relaçaõ entre as distancias do Cometa a terra no tempo de duas observações, e a corda do arco, que elle descreveo* (Fig. 2.).

Seja S o Sol; T, e C os lugares da Terra, e do Cometa no instante da primeira observaçaõ; e T'', C'' no instante da segunda. Abaixando as perpendiculares CP, $C''P''$ para o plano da ecliptica, he evidente que CTP he a latitude do Cometa, e PTS a longitude d'elle, menos a do Sol no tempo da primeira observaçaõ; e semelhantemente $C''T''P''$, $P''T''S$ no tempo da segunda. He tambem

bem facil de ver, que o angulo PAP'' he o movimento geocentrico do Cometa em longitude no intervallo das obſervações; por quanto, imaginando tirada pelo ponto T huma linha parallela a $T''P''$, fará no dito ponto com a recta TP hum angulo, que ſerá igual a PAP'', e moſtrará o movimento apparente do Cometa a reſpeito do obſervador, que ſe imagina immovel em T, quando realmente foi tranſportado de T para T''.

11. Suppondo pois $TC = x$, $T''C'' = x''$, $PTS = A$, $P''T''S = A''$, $CTP = L$, $C''T''P'' = L''$, $PAP'' = C$, e a corda $CC'' = K$, teremos primeiramente $TP = x\,\text{Coſ.}\,L$, $T''P'' = x''\,\text{Coſ.}\,L''$, $CP = x\,\text{Sen.}\,L$, $C''P'' = x''\,\text{Sen.}\,L''$; e conduzindo CQ parallela a PP'', ſerá $C''Q = x''\,\text{Sen.}\,L'' - x\,\text{Sen.}\,L$. Iſto poſto, o triangulo rectangulo CQC'' dará $K^2 = (x''\,\text{Sen.}\,L'' - x\,\text{Sen.}\,L)^2 + \overline{PP''}^2$; e o triangulo PAP'' dará $\overline{PP''}^2 = (x\,\text{Coſ.}\,L - AT)^2 + (x''\,\text{Coſ.}\,L'' - AT'')^2 - 2\,(x\,\text{Coſ.}\,L - AT)\,(x''\,\text{Coſ.}\,L'' - AT'')\,\text{Coſ.}\,C$. E ſubſtituindo eſte valor na equação precedente, fazendo as multiplicações indicadas, e reflectindo, que he $\overline{AT}^2 + \overline{AT''}^2 - 2\,AT.\,AT''\,\text{Coſ.}\,C = \overline{T''T}^2$, acharemos $K^2 = x^2 - 2\,x\,\text{Coſ.}\,L\,(AT - AT''\,\text{Coſ.}\,C) + x''^2 - 2\,x''\,\text{Coſ.}\,L''\,(AT'' - AT\,\text{Coſ.}\,C) - 2\,x\,x''\,(\text{Coſ.}\,L\,\text{Coſ.}\,L''\,\text{Coſ.}\,C + \text{Sen.}\,L\,\text{Sen.}\,L'') + \overline{TT''}^2$.

12. Agora no triangulo TST'' conhecemos o angulo em S, que he igual ao movimento apparente do Sol no intervallo das obſervações, e os lados ST, ST'', que ſaõ as diſtancias d'elle á terra nos dous inſtantes das meſmas obſervações. Pelo que ſuppondo $ST = s$, $ST'' = s''$, $TST'' = S$, e $STT'' = B$, teremos $s'' : s :: \text{Sen.}\,B : \text{Sen.}\,(B + S) :: \text{Sen.}\,B : \text{Sen.}\,B\,\text{Coſ.}\,S + \text{Sen.}\,S\,\text{Coſ.}\,B :: \text{Tg.}\,B : \text{Tg.}\,B\,\text{Coſ.}\,S + \text{Sen.}\,S$, donde ſe tira $\text{Tg.}\,B = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S}{s - s''\,\text{Coſ.}\,S}$, e $TT'' = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S}{\text{Sen.}\,B}$.

AT

13. E paſſando ao triangulo TAT'', teremos $AT = \frac{TT'' \text{ Sen. } (A+B+C)}{\text{Sen. } C} = \frac{s'' \text{ Sen. } S \text{ Sen. } (A+B+C)}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C}$, e $AT'' = \frac{s'' \text{ Sen.} S \text{ Sen. } (A+B)}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C}$. Logo ſerá $AT - AT'' \text{ Coſ. } C = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C} \left(\text{Sen. } (A+B+C) - \text{Sen. } (A+B) \text{ Coſ. } C\right) = \frac{s'' \text{ Sen. } S \text{ Coſ. } (A+B)}{\text{Sen. } B}$; e $AT'' - AT \text{ Coſ. } C = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C} \left(\text{Sen. } (A+B) - \text{Sen. } (A+B+C) \text{ Coſ. } C\right) = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B \text{ Sen. } C} \left(\text{Sen. } (A+B) - \text{Sen. } (A+B) \text{ Coſ.}^2 C - \text{Sen. } C \text{ Coſ. } C \text{ Coſ. } (A+B)\right) = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B} \left(\text{Sen. } (A+B) \text{ Sen. } C - \text{Coſ. } (A+B) \text{ Coſ. } C\right) = -\frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B} \text{ Coſ. } (A+B+C)$.

14. Pelo que ſuppondo, que com as quantidades dadas fazemos $\text{Tg.} B = \frac{s'' \text{ Sen. } S}{s - s'' \text{ Coſ. } S}$, $\frac{s'' \text{ Sen. } S}{\text{Sen. } B} = g$, $2g \text{ Coſ. } (A+B) \text{ Coſ. } L = b$, $2g \text{ Coſ. } (A+B+C) \text{ Coſ. } L'' = e''$, e $2(\text{Coſ. } L \text{ Coſ. } L'' \text{ Coſ. } C + \text{Sen. } L \text{ Sen. } L'') = f$, ſubſtituiremos eſtes valores na equaçaõ final do *num.* 11, e teremos $K^2 = x(x-b) + x''(x'' + e'' - fx) + g^2$.

15. *Achar a relaçaõ entre a diſtancia perihelia de hum Cometa, o ſeu raio vector, e o tempo que tem corrido desde a paſſagem pelo perihelio* (Fig. 3.).

Eſtando o Sol no foco da parabola S, e ſendo a diſtancia perihelia $SP = p$, a altura devida á velocidade perihelia do Cometa $= b$, o ſeu raio vector actual $SC = r$, a anomalia verdadeira $CSP = u$, e o tempo, que gaſtou o Cometa em a deſcrever, $= \tau$, he demonſtrado na theorica das forças centraes, que teremos $\tau : 1 :: \int \frac{1}{2} r^2 du : \frac{1}{2} p\sqrt{2gb}$;

e conseguintemente $\int r^2 du = \tau p\sqrt{2gb}$, qualquer que seja a Orbita descrita pelo Cometa.

16. Agora suppondo a Orbita parabolica, pela natureza d'ella teremos, como todos sabem, Cos. $\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{p}{r}}$, e conseguintemente Sen. $\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$. Differenciando esta ultima equaçaõ, será $\frac{1}{2}du$ Cos. $\frac{1}{2}u$, ou $\frac{1}{2}du\sqrt{\frac{p}{r}} = \frac{p\,dr}{2r^2\sqrt{\frac{r-p}{r}}}$, e $r^2du = rdr\sqrt{\frac{p}{r-p}}$. Conseguintemente teremos $\tau\sqrt{2pgb} = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{(r-p)}} = 2r\sqrt{(r-p)} - 2\int dr\sqrt{(r-p)}$
$= 2r\sqrt{(r-p)} - \frac{4}{3}\sqrt{(r-p)^3} = 2r\sqrt{(r-p)} - \frac{4}{3}(r-p)\sqrt{(r-p)}$
$= \left(\frac{2}{3}r + \frac{4}{3}p\right)\sqrt{(r-p)}$, sem ajuntar constante, porque $r = p$ dá $\tau = 0$, como deve ser.

17. Falta-nos exprimir a velocidade perihelia b por meio de quantidades conhecidas. Para isso reflectiremos, que sendo f a distancia do Sol, em que a força d'elle he $= g$, se demonstra na theorica das forças centraes, que nas Orbitas parabolicas he $pb = f^2$. E porque suppondo o eixo maior da Orbita terrestre $= A$, o tempo periodico d'ella $= T$, e a circunferencia do circulo, que tem a unidade por diametro, $= c$, se mostra tambem na mesma theorica, que he $f^2 = \frac{c^2A^3}{2g.T^2}$, teremos $2gpb = \frac{c^2A^3}{T^2}$, e $\tau = \frac{2T}{3cA\sqrt{A}}(r + 2p)\sqrt{(r-p)}$.

18. Como até aquí naõ havêmos escolhido unidade para as distancias lineares, tomaremos agora para isso a distancia media do Sol á terra, de que ordinariamente

usaõ

usaõ os Astronomos, a qual he ametade do eixo da Orbita terrestre, e teremos $A=2$, e $\tau=\frac{T}{3c\sqrt{2}}(r+2p)\sqrt{(r-p)}$. Do mesmo modo tomando d'aquí por diante hum dia medio por unidade dos tempos, será $T=365,25638$, e $\frac{T}{3c\sqrt{2}}=27,4038857$. E designando este numero por n (cujo logarithmo he 1.4378117) teremos finalmente $\tau=n(r+2p)\sqrt{(r-p)}$.

19. *Achar a relaçaõ entre dous raios vectores de huma Orbita parabolica, a corda do arco por elles comprehendido, e a distancia perihelia* (Fig. 3.).

Seja $SP=p$, $SC=r$, $SC''=r''$, $r+r''=R$, $CC''=K$, $PSC=u$, e $CSC''=z$. Pela natureza da Orbita teremos $\text{Cos.}\frac{1}{2}u=\sqrt{\frac{p}{r}}$, $\text{Cos.}\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}z\right)=\sqrt{\frac{p}{r''}}$, e consequintemente $\sqrt{\frac{r}{r''}}=\frac{\text{Cos.}\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}z\right)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}u}=\text{Cos.}\frac{1}{2}z-\text{Sen.}\frac{1}{2}z.\text{Tg.}\frac{1}{2}u$, donde se collige $\text{Tg.}\frac{1}{2}u=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}z-\sqrt{\frac{r}{r''}}}{\text{Sen.}\frac{1}{2}z}$. Logo

$$\frac{1}{\text{Cos.}^2\frac{1}{2}u}=1+\text{Tg.}^2\frac{1}{2}u=\frac{1+\frac{r}{r''}-2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{r}{r''}}}{\text{Sen.}^2\frac{1}{2}z},$$

e reduzindo $\text{Cos.}^2\frac{1}{2}u=\frac{r''\left(1-\text{Cos.}^2\frac{1}{2}z\right)}{R-2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}z\sqrt{rr''}}$. E como

$p=r$

$p = r$ Cof.$^2 \frac{1}{2} u$, teremos $p = \frac{rr''\left(1 - \text{Cof.}^2 \frac{1}{2} z\right)}{R - 2 \text{ Cof. } \frac{1}{2} z \sqrt{rr''}}$.

20. Por outra parte no triangulo CSC'' temos $K^2 = r^2 + r''^2 - 2rr''$ Cof. z, e conseguintemente Cof. $z = \frac{r^2 + r''^2 - K^2}{2rr''}$. E como $1 +$ Cof. $z = 2$ Cof.$^2 \frac{1}{2} z$, será Cof.$^2 \frac{1}{2} z = \frac{r^2 + 2rr'' + r''^2 - K^2}{4rr''} = \frac{R^2 - K^2}{4rr''}$, e Cof. $\frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{R^2 - K^2}{4rr''}}$. Pelo que fubftituindo eftes valores de Cof. $\frac{1}{2} z$, e Cof.$^2 \frac{1}{2} z$ na equaçaõ do numero precedente, teremos

$$p = \frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}}.$$

21. *Achar a relaçaõ entre dous raios vectores, a corda do arco por elles comprehendido, e o tempo que o Cometa gaftou em o defcrever* (Fig. 3.).

Confervando as denominações precedentes de $SP = p$, $SC = r$, $SC'' = r''$, $r + r'' = R$, $CC'' = K$, e fuppondo o tempo empregado pelo Cometa de P até $C = \tau$, e de C até $C'' = t$, será $\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r - p)}$, e $\tau + t = n(r'' + 2p)\sqrt{(r'' - p)}$ (n. 18.); e conseguintemente $\frac{t}{n} = (r'' + 2p)\sqrt{(r'' - p)} - (r + 2p)\sqrt{(r - p)}$. Quadrando efta equaçaõ, e reflectindo que $r^2 + r''^2 = R^2 - 2rr''$, e $r^3 + r''^3 = R^3 - 3Rrr''$, acharemos $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + 3R^2p - 6rr''p - 8p^3 - 2(rr'' + 2Rp + 4p^2)\sqrt{(rr'' - Rp + p^2)}$.

22.

22. Para eliminarmos p d'esta equaçaõ com mais facilidade, do que podia ser pelos methodos geraes, reflectiremos, que a equaçaõ do *num.* 20. dá $rr'' - pR = \frac{1}{4}(R^2 - K^{2'}) - p\sqrt{(R^2 - K^2)}$, e ajuntando de huma e outra parte p^2, será o segundo membro quadrado perfeito, e teremos $\sqrt{(rr'' - pR + p^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 - K^2)} - p$. A mesma equaçaõ dá evidentemente $4p^2\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) = 4prr'' - p(R^2 - K^2)$, e $2pR\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) = 2Rrr'' - \frac{1}{2}R(R^2 - K^2)$. E finalmente multiplicando o numerador, e denominador d'ella por $R + \sqrt{(R^2 - K^2)}$, dará $pK^2 = Rrr'' + rr''\sqrt{(R^2 - K^2)} - \frac{1}{4}R(R^2 - K^2) - \frac{1}{4}\sqrt{(R^2 - K^2)^3}$.

23. Isto supposto, substituindo na equaçaõ final do *num.* 21. o valor de $\sqrt{(rr'' - Rp + p^2)}$, teremos $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + 3R^2p - 4rr''p + 4p^2\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) - (rr'' + 2Rp)\sqrt{(R^2 - K^2)}$. Substituindo nesta o valor de $4p^2\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right)$, teremos $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + pK^2 + 2pR\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) - rr''\sqrt{(R^2 - K^2)}$. E finalmente substituindo nesta os valores de pK^2, e $2pR\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right)$, e reduzindo, será $\frac{4t^2}{n^2} = R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3}$. Como assima determinamos o número constante n, será em consequencia d'elle $\frac{4}{n^2} = 0{,}0053264345$, cujo logarithmo he 7.7264366, e pondo d'aqui por diante ϕ pelo número correspondente a este logarithmo, teremos $R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3} - \phi t^2 = 0$.

24. He de advertir, que $\sqrt{(R^2 - K^2)}$ muda de final todas as vezes que o angulo comprehendido pelos dous raios vectores passar de 180°. Mas como na indagaçaõ das Orbitas dos Cometas naõ saõ os intervallos das observações taõ grandes, que possa ter havido mais de 180° de movimento heliocentrico; por isso tanto a formula precedente, como a do *num.* 20, se podem applicar com segurança, sem receio de incerteza alguma pelo que respeita ao final da quantidade radical, que ellas involvem.

§. II.

Differentes Soluções, que resultaõ dos Principios antecedentes.

25. Ainda que basta conhecer duas distancias de hum Cometa á terra no tempo de duas observações, para com ellas determinar todos os elementos da Orbita, como adiante mostraremos, naõ bastaõ com tudo duas observações para virmos no conhecimento d'essas distancias. Porque as duas observações daõ somente a equaçaõ $R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3} - \phi t^2 = 0$, na qual R, e K saõ funções das distancias, que buscamos x, x''; e naõ fazemos mençaõ da outra equaçaõ do *num.* 20, a qual, trazendo comsigo outra quantidade incognita p, nada póde contribuir para determinar o Problema.

26. He pois necessario, que haja tres observações; e entaõ teremos mais equações, do que era preciso para a determinaçaõ da questaõ, donde resultaráõ differentes Soluções. Porque podendo tres observações comparar-se duas a duas de tres modos differentes, está claro, que por cada modo teremos as duas equações do número precedente; e nos acharemos com seis equações, e quatro incognitas x, x', x'', p, a ultima das quaes se elimina com muita facilidade. Assim vemos, que he o Problema mais que determinado em segundo gráo, por sobejarem duas equações.

27.

27. Examinando em particular todas as formulas, que provem das tres obſervações, ſupporemos, que a longitude do Cometa menos a do Sol no inſtante da primeira obſervaçaõ ſe repreſenta por A, a diſtancia do Sol á terra por s, e a latitude do Cometa por L; que eſtas meſmas quantidades no inſtante da ſegunda obſervaçaõ ſaõ A', s', L'; e no da terceira A'', s'', L''. E pelo que havemos moſtrado no *num.* 9, he manifeſto, que fazendo $2\, s$ Coſ. L Coſ. $A = a$, $2\, s'$ Coſ. L' Coſ. $A' = a'$, e $2\, s''$ Coſ. L'' Coſ. $A'' = a''$, teremos $r^2 = x(x-a) + s^2$, $r'^2 = x'(x'-a') + s'^2$, e $r''^2 = x''(x''-a'') + s''^2$, ſendo x, x', x'' as diſtancias do Cometa á terra, e r, r', r'' os raios vectores correſpondentes, conforme a ordem das obſervações.

28. Suppondo tambem, que o movimento geocentrico do Cometa em longitude deſde a primeira até a ſegunda obſervaçaõ ſe repreſenta por C', e o do Sol por S', ſendo a corda do arco deſcrito neſſe intervallo $= K'$, eſtá claro, que para ter o valor de K'^2 naõ he neceſſario mais, do que pôr s', S', L', C' em lugar de s'', S, L'', C nas formulas do *num.* 14, e mudar B, g, b, e'', f em B', g', e, b', f'; ſuppondo, que naquelle lugar ſe fez a comparaçaõ das duas obſervações extremas. Aſſim fazendo $\frac{s' \text{ Sen. } S'}{s - s' \text{ Coſ. } S'} = \text{Tg. } B'$, $\frac{s' \text{ Sen. } S'}{\text{Sen. } B'} = g'$; $2\, g'$ Coſ. L' Coſ. $(A + B' + C') = b'$; $2\, g'$ Coſ. L Coſ. $(A + B') = e$, e 2 (Coſ. L Coſ. L' Coſ. C' + Sen. L Sen. L') $= f$, teremos $K'^2 = x'(x' + b') + x(x - e - f' x') + g'^2$.

29. Do meſmo modo ſuppondo que o movimento geocentrico do Cometa em longitude deſde a ſegunda até a terceira obſervaçaõ ſe deſigna por C'', o do Sol por S'', e a corda deſcrita pelo Cometa por K'', deveremos pôr nas meſmas formulas s', S'', L', C'' em lugar de s, S, L, C, e mudar B, g, b, e'', f em B'', g'' b'' e', f'', pondo-ſe tambem

A'

A' em lugar de A. Pelo que fazendo $\frac{s'' \text{Sen. } S''}{s' - s'' \text{Cof. } S''} = \text{Tg. } B''$; $\frac{s'' \text{Sen. } S''}{\text{Sen. } B''} = g''$; $2\, g'' \text{Cof.} (A' + B'' + C'') \text{Cof. } L'' = b''$; $2\, g'' \text{Cof.} (A' + B'') \text{Cof. } L' = e'$; e $2\, (\text{Cof. } L' \text{Cof.} L'' \text{Cof.} C'' + \text{Sen. } L' \text{Sen.} L'') = f''$, teremos $K''^2 = x'' (x'' + b'') + x' (x' - e' - f'' x'') + g''^2$.

30. E finalmente ſuppondo o tempo desde a primeira obſervaçaõ até a ſegunda $= t'$, e da ſegunda até a terceira $= t''$, e fazendo $R' = r + r'$, e $R'' = r' + r''$ teremos como no *num.* 23, $R'(R'^2 + 3 K'^2) - V (R'^2 - K'^2)^3 - \phi\, t'^2 = 0$, e $R'' (R''^2 + 3 K''^2) - V (R''^2 - K''^2)^3 - \phi\, t''^2 = 0$; e como no *num.* 20, $p = \frac{rr' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - V (R'^2 - K'^2)}$, e $p = \frac{r' r'' - \frac{1}{4} (R''^2 - K''^2)}{R'' - V (R''^2 - K''^2)}$; valores, que combinados com o do *num.* 20, daõ $\frac{rr'' - \frac{1}{4} (R^2 - K^2)}{R - V (R^2 - K^2)} - \frac{rr' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - V (R'^2 - K'^2)} = 0$, e $\frac{rr'' - \frac{1}{4} (R^2 - K^2)}{R - V (R^2 - K^2)} - \frac{r' r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - V (R''^2 - K''^2)} = 0$, nas quaes duas equações naõ ha a incognita p.

31. Pelo que ajuntando todas as equações, que ſomente involvem as tres incognitas x, x', x'', teremos as cinco ſeguintes:

$$R (R^2 + 3 K^2) - V (R^2 - K^2)^3 - \phi\, t^2 = 0$$
$$R' (R'^2 + 3 K'^2) - V (R'^2 - K'^2)^3 - \phi\, t'^2 = 0$$
$$R'' (R''^2 + 3 K''^2) - V (R''^2 - K''^2)^3 - \phi\, t''^2 = 0$$

rr''

$$\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{rr' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - \sqrt{(R'^2 - K'^2)}} = o.$$

$$\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{r'r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - \sqrt{(R''^2 - K''^2)}} = o,$$

nas quaes bem ſe vê, que ſendo r, R, K &c. funcções de x, x', x'', naõ ſe involvem mais incognitas do que eſtas tres, que ſaõ as diſtancias do Cometa á terra nos tres inſtantes das obſervações.

32. Como pois he ſabido, que para a determinaçaõ de tres incognitas baſtaõ outras tantas equações, podemos ſervir-nos para iſſo de tres quaesquer das cinco precedentes, donde reſultaráõ tantas ſoluções differentes, quantas ſaõ as combinações diverſas de cinco quantidades tomadas tres a tres. Aſſim temos conſeguido em lugar de huma, que buſcavamos, dez ſoluções differentes do noſſo Problema, as quaes todas devem dar para x, x', x'' os meſmos valores, ſendo as obſervações exaƈtas, e as Orbitas rigoroſamente parabolicas; mas faltando eſtas condições, cada huma das combinações dará differentes valores approximados das ditas incognitas.

33. Póde, e ha neceſſariamente de ſucceder, que alguma das combinações dê valores mais chegados á verdade do que as outras em algum caſo particular, naõ fazendo tanto effeito nella a falta das ſobreditas condições. Mas naõ havendo por iſſo razaõ em geral, que nos obrigue a dar preferencia a qualquer das combinações, eſcolheremos a das tres primeiras equações

$$R\left(R^2 + 3K^2\right) - \sqrt{\left(R^2 - K^2\right)^3} - \phi t^2 = o$$

$$R'\left(R'^2 + 3K'^2\right) - \sqrt{\left(R'^2 - K'^2\right)^3} - \phi t'^2 = o$$

$$R''\left(R''^2 + 3K''^2\right) - \sqrt{\left(R''^2 - K''^2\right)^3} - \phi t''^2 = o,$$

as quaes, como mais ſimples, e todas da meſma fórma, facilitaráõ notalvelmente os calculos, que ſobre ellas ſe haõ de fazer; e eſtas ſaõ as que anticipadamente communiquei á Academia, como equações fundamentaes da ſoluçaõ d'eſte Problema.

34. Agora as reduziremos a outra fórma, que ainda ſerá mais commoda para o calculo. Tomando a primeira por exemplo, bem ſe vê, que póde eſcrever-ſe d'eſta maneira $R^3\left(1+\frac{3K^2}{R^2}\right)-R^3\sqrt{\left(1-\frac{K^2}{R^2}\right)^3}-\Phi t^2=0$. E ſuppondo $1-\frac{K^2}{R^2}=\omega^2$, ſerá $\sqrt{\left(1-\frac{K^2}{R^2}\right)}=\omega$, $\sqrt{\left(1-\frac{K^2}{R^2}\right)^3}=\omega^3$, e $1+\frac{3K^2}{R^2}=4-3\omega^2$; donde ſe reduzirá a equaçaõ a eſta fórma $R^3(4-3\omega^2-\omega^3)-\Phi t^2=0$. Do meſmo modo ſe reduzem as outras duas, ſuppondo $1-\frac{K'^2}{R'^2}=\omega'^2$, $1-\frac{K''^2}{R''^2}=\omega''^2$, e teremos as tres equações ſeguintes:

$$R^3\left(4-3\omega^2-\omega^3\right)-\Phi t^2=0$$

$$R'^3\left(4-3\omega'^2-\omega'^3\right)-\Phi t'^2=0$$

$$R''^3\left(4-3\omega''^2-\omega''^3\right)-\Phi t''^2=0,$$

das quaes uſaremos com preferencia, quando paſſarmos da theorica para a practica.

35. Se os intervallos das obſervações ſe tomaſſem taõ eſtreitos, que K^2 foſſe muito pequena quantidade em comparaçaõ de R^2, podia o termo $\sqrt{(R^2-K^2)^3}$ reduzir-ſe a huma ſerie muito convergente, ſendo entaõ $\sqrt{(R^2-K^2)^3}=R^3-\frac{3}{2}RK^2+\frac{3K^4}{8R}$ proximamente. E ſubſtituindo eſte valor na primeira equaçaõ do *num.* 33, teriamos

3K²

$3K^2(12R^2 - K^2) - 8R\phi t^2 = 0$; e do meſmo modo ſe reduziriaõ as outras duas. Mas reflectindo por huma parte, que eſtas novas formulas naõ podem ſervir de muito para abreviar o trabalho das operações; e por outra, que a eſtreiteza dos intervallos, ao meſmo tempo que conduz para que as formulas ſe approximem, contribue igualmente para que os defeitos inevitaveis das obſervações produzaõ erros muito notaveis nos elementos, que d'ellas ſe deduzirem: naõ ha razaõ alguma, para que por ellas deixemos as formulas exactas, e rigoroſas dos *numeros* 33, e 34.

§. III.

Conſiderações geraes ſobre a reſoluçaõ das tres equações do Problema.

36. Viſto que o Problema ſe tem reduzido á determinaçaõ de tres incognitas por meio de outras tantas equações, parecerá que naõ reſta mais do que uſar dos methodos conhecidos da eliminaçaõ, que nos levaráõ finalmente a huma equaçaõ, em que naõ haverá mais do que huma incognita, a qual conſeguintemente ſe determinará, e por meio d'ella as outras duas ſucceſſivamente. Mas quem ſabe a que galarim conduz a eliminaçaõ nas equações de gráõs ſuperiores, facilmente entenderá, que por eſſe caminho ſe meteria em hum abiſmo.

37. Para moſtrar porém com eſpecialidade o que deveria reſultar d'eſſe methodo no noſſo caſo, ſerá neceſſario, que vejamos primeiramente a que eſtado ſe haõ de reduzir as equações, depois que ſe fizerem racionaes. E tomando por exemplo a primeira do *num.* 33, que dá $R(R^2 + 3K^2) - \phi t^2 = \sqrt{(R^2 - K^2)^3}$, quadraremos de ambas as partes, e acharemos $R^2(R^2 + 3K^2)^2 - 2\phi t^2 R(R^2 + 3K^2) + \phi^2 t^4 = (R^2 - K^2)^3$, donde evolvendo as po-

potencias indicadas, e reduzindo, teremos $K^6 + 9R^4K^2 + 6R^2K^4 - 2\phi t^2 R^3 - 6\phi t^2 K^2 R + \phi^2 t^4 = 0$; equaçaõ, que parece racional, ſem toda-via o ſer relativamente ás incognitas x, x'', como he neceſſario. As quantidades K^2, K^4, K^6 ſim ſaõ funcções racionaes d'ellas, mas as potencias de R todas involvem irracionalidade.

38. Como pois temos $R = r + r''$, ſerá $R^2 = r^2 + r''^2 + 2rr''$, $R^3 = (r^2 + 3r''^2)r + (r''^2 + 3r^2)r''$, $R^4 = r^4 + r''^4 + 6r^2r''^2 + 4(r^2 + r''^2)rr''$. Logo ſuppondo $r^2 + r''^2 = A$, $r^2 + 3r''^2 = B$, $r''^2 + 3r^2 = C$, $r^4 + r''^4 + 6r^2r''^2 = D$, funcções todas racionaes de x, e x'', teremos $R = r + r''$, $R^2 = A + 2rr''$, $R^3 = Br + Cr''$, $R^4 = D + 4Arr''$; e ſubſtituindo eſtes valores na equaçaõ do numero precedente, teremos $K^6 + 9DK^2 + 6AK^4 + \phi^2t^4 + (36AK^2 + 12K^4)rr'' - (2\phi t^2B + 6\phi t^2K^2)r - (2\phi t^2C + 6\phi t^2K^2)r'' = 0$.

39. E fazendo, para abreviar, $K^6 + 9DK^2 + 6AK^4 + \phi^2t^4 = E$, $36AK^2 + 12K^4 = F$, $2\phi t^2B + 6\phi t^2K^2 = G$, $2\phi t^2C + 6\phi t^2K^2 = H$, teremos $r'' = \frac{E - Gr}{H - Fr}$, $r''^2 = \frac{E^2 - 2EGr + G^2r^2}{H^2 - 2HFr + F^2r^2}$, donde ſe tira $r = \ldots\ldots$ $\frac{E^2 + G^2r^2 - H^2r''^2 - F^2r^2r''^2}{2EG - 2HFr''^2}$, e conſeguintemente

$$(E^2 + G^2r^2 - H^2r''^2 - F^2r^2r''^2)^2 - r^2(2EG - 2HFr''^2)^2 = 0;$$

equaçaõ livre de irracionalidade relativamente a x, e x''.

40. He pois facil de vêr em primeiro lugar, que na equaçaõ precedente haverá hum termo ſem x, nem x'', porque E^2 o tem, e conſeguintemente naõ ſe poderá a equaçaõ abaixar do gráo, em que ſahir; e em ſegundo lugar, que ſendo E do ſexto gráo a reſpeito de x, x'',

ſerá

ferá E^2 do duodecimo ; e como fe ha de quadrar outra vez , ferá a equaçaõ do vigefimo quarto gráo relativamente a ambas as incognitas. O mefmo fuccederá na reducçaõ das outras duas equações.

41. Agora fe com as duas primeiras reduzidas imaginarmos, que fe elimina a incogina commua x, viremos neceffariamente a dar em huma equaçaõ do gráo 576 , na qual haverá fómente x', e x''; e ufando d'efta juntamente com a terceira para eliminar x''', teriamos a equaçaõ final fómente com x', mas effa sería do gráo 13824, conforme o que fe acha demonftrado na *Theorica geral das eliminações*. Além do número exorbitante de termos, que devia ter efta equaçaõ, os coefficientes feriaõ funcções taõ longas, e complicadas das quantidades dadas, que naõ poderia cada hum d'elles efcrever-fe fenaõ em hum grande volume.

42. Do mefmo modo acharemos, que as equações approximadas, que havemos indicado no *num.* 35 , conduziriaõ a huma equaçaõ final do gráo 4096. E fe os intervallos foffem taõ pequenos, que naquellas equações fe pudeffe desprezar K^2 em comparaçaõ de $12 R^2$, fuppofiçaõ que as reduziria a efta fórma $R K^2 = \frac{2}{9} \phi t^2$, ainda affim naõ poderia fazer-fe a eliminaçaõ, fem cahir em huma equaçaõ do gráo 512, a qual como he abfolutamente impraticavel, nenhuma ventagem util leva ás precedentes. Donde fe conclue, que por meio da eliminaçaõ naõ pode já mais refolver-fe efta queftaõ, quaesquer que fejaõ as equações fundamentaes, porque fempre haõ de fer muitas , e de gráo fuperior, para darem por fim huma equaçaõ impraticavel, como as precedentes.

43. Mas ainda que realmente pudeffemos haver huma equaçaõ final, que foffe acceffivel ao calculo, naõ ganhariamos por iffo mais, do que huma elegancia apparente na foluçaõ, á cufta de huma multiplicaçaõ incrivel de tra-

balho. Porque naõ havendo meio geral, e directo para resolver as equações, que passaõ do quarto gráo, sempre se havia de recorrer ao methodo das falsas posições, ou a outro equivalente, para conseguir a resoluçaõ d'essa complicadissima equaçaõ, a que teriamos reduzido o Problema; e, sendo isto assim, muito mais breve, e mais expedito sería applicar immediatamente esses methodos ás equações fundamentaes, conservadas na fórma simples, em que se achaõ.

44. Reduz-se pois a questaõ a achar tres quantidades x, x', x'' taes, que formando-se com ellas pelas equações auxiliares dos *num.* 27, e 28 os valores de R, R', R'', e K, K', K'', estes sejaõ os que convem para se verificarem as equações fundamentaes do *num.* 33. Vejamos o que nisso póde fazer o methodo das falsas posições.

45. Se cada huma das equações fundamentaes involvesse as tres incognitas, sería bem trabalhoso este methodo, que poderiamos chamar do segundo gráo, por haverem de cahir as supposições sobre duas das mesmas incognitas. Assim viria a soluçaõ a ter o grande inconveniente do methodo, que actualmente praticaõ os Astronomos, os quaes se achaõ na indespensavel necessidade de estabelecer as supposições sobre duas quantidades desconhecidas, que de ordinario costumaõ ser as distancias encurtadas correspondentes a duas observações. A unica ventagem, que se poderia considerar, he que elles saõ obrigados a repartir a attençaõ por muitas cousas, fazendo raciocinios a cada passo que haõ de dar, e nós, livres de todas as considerações accessorias, estariamos com tres regras de formulas algebricas á vista, sem outro cuidado mais, do que achar as hypotheses, que as verificassem.

46. Succede porém felizmente, que a combinaçaõ das tres equações, que escolhemos, tem a ventagem de se conterem nellas as incognitas duas a duas, donde se concluirá todo o negocio com maior facilidade, cahindo as sup-

po-

posições sobre huma só incognita. Porque naõ contendo a primeira equaçaõ fundamental, senaõ as duas incognitas x, e x'', está claro, que estabelecendo huma supposiçaõ arbitraria de x, por ella se determinará x''. E como a segunda equaçaõ contém somente x, e x', por ella com a mesma supposiçaõ de x se determinará x'. Assim teremos tres quantidades x, x', x'', que satisfazem ás duas primeiras equações; e se tambem satisfizessem á terceira, estaria resolvida a questaõ. Naõ satisfazendo porém, se notará o erro, e fazendo outra supposiçaõ de x se procederá do mesmo modo, até achar outro erro na terceira equaçaõ; e com os dous erros, e a differença das hypotheses, pela regra sabida das falsas posições, se achará o valor de x, ainda que pouco exacto, se os erros foraõ grandes. Mas fazendo outras duas supposições pouco differentes do primeiro valor achado, e continuando assim por diante a estreitar a differença das hypotheses, se acharia o valor de x, e conseguintemente o de x', e x'' com toda a exactidaõ, que fosse necessaria.

47. Mas este methodo ainda requer dilatados, e enfadonhos calculos, consistindo o principal embaraço na resoluçaõ das primeiras duas equações, quando feita a supposiçaõ de x, se buscarem os valores de x', e x''. Esta resoluçaõ se faz tambem por falsas posições, que em cada hum dos casos recahem sobre a unica incognita, que se busca. Porém isto repetido tantas vezes, quantas forem as supposições de x, que se houverem de calcular, fará hum grande processo de calculos, que se deverá evitar do modo que for possivel. E como a principal difficuldade consiste na resoluçaõ de duas equações separadamente, se pudermos haver outras mais faceis, ainda que sejaõ approximadas, teremos conseguido muito; porque, depois de sabermos proximamente os valores das incognitas, podemos resolver as equações fundamentaes com bastante facilidade. Isto he o que agora mostraremos.

§.

§. IV.

Indagaçaõ dos Valores approximados das Incognitas do Problema.

48. Supponhamos, que C, C', C'' saõ os lugares do Cometa na sua Orbita (Fig. 4.), correspondentes ás tres observações, e tirando os raios vectores SC, SC', SC'', e as cordas CC'', CC', $C'C''$, será a corda CC'' cortada no ponto P na razaõ proxima dos tempos, que o Cometa gastou em correr os arcos CC', $C'C''$. Porque, pela regra sabida de Kepler, saõ os sectores CSC', $C'SC''$ na razaõ dos tempos; mas os sectores saõ entre si proximamente como os triangulos CSC', $C'SC''$; e estes, por terem a base commua SC', saõ como as alturas, e estas na razaõ de CP para PC'': logo seraõ os segmentos CP, PC'' proximamente na razaõ dos tempos. E se dos pontos C, C', C'', P se abaixarem perpendiculares para o plano da ecliptica, a projecçaõ da corda CC'' ficará cortada na mesma razaõ proxima dos tempos.

49. Bem se vê que o lugar intermedio C' póde cahir em hum ponto tal, que sejaõ os segmentos CP, PC'' na razaõ exacta dos tempos. Este ponto se acha pouco desviado do meio arco; e por isso convem, que os intervallos das observações sejaõ pouco desiguaes, ficando o mais breve, quanto for possivel, para a parte, donde se conjectura que estará o perihelio.

50. He tambem preciso saber o valor approximado do segmento $C'P$, cortado do raio vector medio SC' pela corda CC''. Para isso suppomos, que a força central de C até C'' he constantemente a mesma, que tem lugar no ponto C', e que sempre obra por direcções parallelas a $C'S$. Estas supposições naõ podem desviar-nos muito da verdade, quando os intervallos das observações naõ forem muito grandes; porque ainda que varía a intensaõ, e direcçaõ da

da força, tomamos proximamente o meio de huma, e outra a respeito do que saõ nos pontos extremos C, C''.

51. Conduzindo pois pelo Ponto C a Tangente CD, e por C'' a recta $C''D$ parallela a $C'S$, está claro, que será $C''D$ o effeito da força central da maneira que a temos supposto, no tempo que o Cometa gasta de C até C''. Para comparar este effeito com outro conhecido, supponhamos tambem que a terra na sua Orbita se achou nos pontos T, T', T'', quando o Cometa esteve respectivamente em C, C', C''; e feita a mesma construcçaõ, será $T''d$ o effeito da força central sobre a terra por todo o tempo; que ella gastou de T até T'', ou o Cometa de C até C''.

52. Sendo pois os effeitos de forças constantes no mesmo tempo proporcionaes a ellas, as quaes saõ, como se sabe, na razaõ duplicada inversa das distancias, teremos $C''D : T''d :: \overline{T'S}^2 : \overline{C'S}^2$. E sendo os effeitos da mesma força constante em differentes tempos na razaõ duplicada d'elles, teremos tambem $QC' : DC'' :: \overline{CP}^2 : \overline{CC''}^2$ (n. 48.); mas he tambem $QP : DC'' :: CP : CC''$: logo $QC' = \frac{DC''.\overline{CP}^2}{\overline{CC''}^2}$, $QP = \frac{DC''.CP}{CC''}$, e $C'P = QP - QC' = DC''\left(\frac{CP}{CC''} - \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CC''}^2}\right)$. Semelhantemente acharemos $T'p = T''d\left(\frac{Tp}{TT''} - \frac{\overline{TP}^2}{\overline{TT''}^2}\right)$; e reflectindo que $\frac{CP}{CC''}$, $\frac{Tp}{TT''}$, por indicar cada huma d'estas expressões a razaõ proxima dos mesmos tempos, teremos $C'P : T'p :: DC'' : T''d :: \overline{ST'}^2 : \overline{S'C}^2$, e conseguintemente $C'P = T'p . \frac{\overline{ST'}^2}{\overline{SC'}^2}$.

53. Agora supppondo, que TT'' he hum arco de circulo descrito com o raio $ST' = s'$, e guardando as denominações, que já havemos estabelecido, será o angulo

$T'Tp = \frac{1}{2} S''$; $T'pT = 90° + \frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''$, e a corda $T'T$ $= 2 s'$ Sen. $\frac{1}{2} S'$. Donde se segue que o triangulo $TT'p$ dará $T'p = \frac{2 s'. \text{Sen.} \frac{1}{2} S' \text{Sen.} \frac{1}{2} S''}{\text{Cos.} \left(\frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''\right)}$. Pelo que, fazendo $\frac{2 s'^3. \text{Sen.} \frac{1}{2} S'. \text{Sen.} \frac{1}{2} S''}{\text{Cos.} \left(\frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''\right)} = \Theta$, teremos $C'P = \frac{\Theta}{r'^2}$. Se dos pontos C', P se abaixarem perpendiculares ao plano da ecliptica, he facil de ver, que sendo a projecçaõ de $SC' = \rho'$, será a projecçaõ de $C'P = \frac{\Theta \rho'}{r'^3}$.

54. Sejaõ agora C, C', C'' (Fig. 5.) os lugares do Cometa marcados pelas perpendiculares abaixadas dos pontos da Orbita para o plano da ecliptica; e guardando as denominações estabelecidas, teremos $ST' = s'$, $T'C' = x'$ Cos. L', $C'S = \rho'$, $C'P = \frac{\Theta \rho'}{r'^3}$, Sen. $T'C'S = \frac{s'. \text{Sen.} A}{\rho'}$, Cos. $T'C'S = \frac{x' \text{Cos.} L' - s' \text{Cos.} A'}{\rho'}$. Isto posto, se conduzirmos as rectas BP, DP, e designarmos $C'DP$ por ψ, e $C'BP$ por χ, o triangulo $DC'P$ dará Sen. $\psi = \frac{C'P. \text{Sen.} DC'P}{DP} = \frac{\Theta s'. \text{Sen.} A'}{DP. r'^3}$, e Sen. $(DC'P + \psi) = \frac{C'D. \text{Sen.} DC'P}{DP}$, isto he, $\frac{s' \text{Sen.} A}{\rho'} \text{Cos.} \psi + \frac{\text{Sen.} \psi (x' \text{Cos.} L' - s' \text{Cos.} A')}{\rho'}$

=

$= C'D \frac{s' \text{ Sen. } A'}{\rho'. DP}$; e substituindo o valor de Sen. ψ, teremos Cos. $\psi = \frac{r'^3 . C'D - \Theta (x' \text{ Cos. } L' - s' \text{ Cos. } A')}{r'^3 . DP}$. Do mesmo modo se achará Sen. $\chi = \frac{\Theta s'. \text{ Sen. } A'}{BP. r'^3}$, e Cos. $\chi = \frac{r'^3 . C' B - \Theta (x' \text{ Cos. } L' - s' \text{ Cos. } A')}{r'^3 . BP}$.

55. E porque os triangulos $DC''P$, $AC''C$, que tem o angulo em C'' commum, daõ Sen. $AC''C = \frac{AC . \text{Sen.} CAC''}{CC''} = \frac{DP. \text{ Sen. } C''DP}{C''P}$, lembrando-nos, que temos supposto $CAC'' = C$, $C''DC' = C''$, e que he $C''P : CC'' :: t'' : t$ proximamente (*num.* 48.), teremos $AC = \frac{t . DP . \text{Sen.} (C'' + \psi)}{t'' \text{ Sen. } C}$, isto he, $AC = \frac{t. DP (\text{Sen. } C'' \text{ Cos. } \psi + \text{ Sen. } \psi \text{ Cos. } C'')}{t'' \text{ Sen. } C}$. Pelo que substituindo os valores de Sen. ψ e Cos. ψ, e reduzindo, teremos $AC = \frac{t \text{ Sen. } C''}{t'' \text{ Sen. } C} \left(C'D + \frac{\Theta}{r'^3} \left(\frac{s' \text{Sen. } (A' + C'')}{\text{Sen. } C''} - x' \text{ Cos. } L' \right) \right)$. Porém $AT = \frac{g \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } C}$, e $DT' = \frac{g'' \text{ Sen. } (A' + B'' + C'')}{\text{Sen. } C''}$. Logo suppondo $\frac{g \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } C \text{ Cos. } L} = b$, $\frac{g'' \text{ Sen. } (A' + B' + C')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cos. } L'} = \kappa$, $\frac{s' \text{Sen. } (A' + C'')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cos. } L'} = q$, $\frac{t \text{ Sen. } C'' \text{ Cos. } L'}{t'' \text{ Sen. } C \text{ Cos. } L} = m$, teremos $x = b + m (x' - \kappa) + \frac{\Theta m (q - x')}{r'^3}$

56. Do mesmo modo os triangulos BCP, ACC'', que

que tem o angulo commum em C, daraõ $AC'' = BP$
$\left(\frac{t \text{ Sen.} (C' - \chi)}{t' \text{ Sen.} C}\right) = BP . \frac{t}{t' \text{ Sen.} C}(\text{Sen.} C' \text{ Cof.} \chi - \text{Sen.} \chi \text{Cof.} C)$.
E fazendo fubftituições, e reducções femelhantes, acharemos
$AC'' = \frac{t \text{ Sen.} C'}{t' \text{ Sen.} C}\left(C'B + \frac{\Theta}{r'^3}\left(\frac{s' \text{ Sen.} (C' - A')}{C'} - x' \text{ Cof.} L'\right)\right)$.
Mas he $AT'' = \frac{g \text{ Sen.} (A + B)}{\text{Sen.} C}$, e $BT' = \frac{g' \text{ Sen.} (A + B')}{\text{Sen.} C'}$.
Logo fuppondo $\frac{g \text{ Sen.} (A + B)}{\text{Sen.} C \text{ Cof.} L''} = b'$, $\frac{g' \text{ Sen.} (A + B')}{\text{Sen.} C' \text{ Cof.} L'} = \kappa'$,
$\frac{s' \text{ Sen.} (C' - A')}{\text{Sen.} C' \text{ Cof.} L'} = q'$, e $\frac{t \text{ Sen.} C' \text{ Cof.} L'}{t' \text{ Sen.} C \text{Cof.} L''} = m'$, acharemos
$x'' = b' + m'(x' - \kappa') + \frac{\Theta m' (q' - x')}{r'^3}$.

57. Temos pois confeguido por meio das duas equações finaes dos numeros precedentes a grande ventagem de evitar as longas operações, que eraõ precifas para a refoluçaõ das duas equações fundamentaes, de que fizemos mençaõ no *num.* 47, em quanto fe trata de achar os primeiros valores approximados das incognitas. Eftas duas equações fe haõ de combinar com huma das equações fundamentaes, donde refultaõ tres modos diverfos de refolver proximamente a queftaõ, entre os quaes efcolheremos o que fe contém nas tres equações feguintes:

$$x = b + m(x' - \kappa) + \frac{\Theta m (q - x')}{r'^3}$$

$$R'^3 (4 - 3\omega'^2 - \omega'^3) - \phi t'^2 = 0$$

$$x'' = b' + m'(x' - \kappa') + \frac{\Theta m' (q' - x')}{r'^3}$$

das quaes baftariaõ as duas primeiras, fe nos contentaffemos de determinar os elementos da Orbita com os valores approximados de x e x', que provem d'ellas, fem os que-

querer ulteriormente corrigir por meio das tres equações fundamentaes.

58. Como $r'^2 = x'(x' - a') + s'^2$, as duas equações approximadas naõ contém mais do que a incognita x' no segundo membro. Assim, fazendo cahir sobre ella as falsas posições, e tomando arbitrariamente hum valor de x', facilmente acharemos o de x pela primeira equaçaõ, os quaes se substituiráõ na segunda, e se notará o erro. Continuando d'este modo as operações, se achará o valor de x', que convem para verificar as duas primeiras equações, e com elle se determinará x'' pela terceira.

59. Mas como as falsas posições, em quanto andaõ por longe, encaminhaõ lentamente para o descubrimento da quantidade, que se busca, usaremos com grande ventagem do methodo das Interpolações, que a passos incomparavelmente mais rapidos nos levará onde pertendemos. Assim, tomando tres valores hypotheticos de x' em progressaõ arithmetica, e denotando o primeiro por x', o segundo por $x' + \eta$, e o terceiro por $x' + 2\eta$, calcularemos os valores correspondentes de x, e veremos que resultados dá pela substituiçaõ delles a segunda equaçaõ do *num.* 57, os quaes suppomos que por sua ordem saõ γ, γ', γ''. Entaõ, denotando por dx' a correcçaõ do primeiro valor hypothetico x', em consequencia do methodo das Interpolações, teremos

$$dx' = \frac{\eta(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{2(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta^2(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{4(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} - \frac{2\gamma\eta^2}{(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')}\right)}.$$

60. No uso da formula precedente naõ póde haver dúvida, em quanto ao sinal ambiguo da parte radical, porque olhando para as quantidades γ, γ', γ'', logo se verá qual dos sinaes convem para se chegar a desvanecer o resultado, que em lugar d'ellas ha de dar a equaçaõ fundamental.

61. Tambem naõ póde haver hesitaçaõ na escolha dos primeiros valores hypotheticos de x', porque quando os

Cometas ſe começaõ a ver da terra, quaſi ſempre eſtaõ mais vizinhos della, que o Sol. Por iſſo podemos ſempre tomar $x' = 0,2$ e $\eta = 0,4$, iſto he, tomar os tres valores hypotheticos 0,2, 0,6, e 1,0 para a primeira operaçaõ. E depois de achar a correcçaõ, tomar-ſe-haõ outros tres muito vizinhos do que ſe determinou, para novamente ſe corrigir; e quaſi nunca ſerá preciſo fazer terceira operaçaõ.

§. V.

Reſoluçaõ das tres Equações fundamentaes.

62. Conhecidas proximamente as diſtancias x, x', x'' pelo methodo precedente, com ellas podemos reſolver facilmente as equações rigoroſas do Problema pelo methodo das formulas differenciaes, as quaes daraõ as correcções d'ellas com a exactidaõ, que ſe quizer.

63. Para iſſo formaremos com os valores proximos de x, x', x'' os valores correſpondentes de R, R', R'', e ω, ω', ω'' por meio das equações auxiliares, e os ſubſtituiremos nas equações do *num.* 34, as quaes em vez de ſe verificarem, dando o ſegundo membro $= 0$, ſupponhamos que o daõ por ſua ordem δ, δ', δ'', ſendo eſtas quantidades muito pequenas, como devem ſer, por ſuppormos, que os valores de x, x', x'', de que uſámos, ſaõ próximos aos verdadeiros. Entaõ, ſuppondo que as correcções d'aquelles valores ſaõ dx, dx', dx'', eſtes ſe deveráõ determinar pelas equações ſeguintes:

$$d\left(R^3(4-3\omega^2-\omega^3)\right)+\delta=0$$

$$d\left(R'^3(4-3\omega'^2-\omega'^3)\right)+\delta'=0$$

$$d\left(R''^3(4-3\omega''^2-\omega''^3)\right)+\delta''=0$$

64. Começando pois pela evoluçaõ da primeira, teremos

$3R'^2 dR(4-3\omega^2-\omega^3)-3R^3(2\omega d\omega+\omega^2 d\omega)+\delta=0$, ou $3R^2\left(dR(4-3\omega^2-\omega^3)-2R\omega d\omega-R\omega^2 d\omega\right)+\delta=0$. Porém he $1-\omega^2=\frac{K^2}{R^2}$, e conseguintemente $-2R\omega d\omega=\frac{2KdK}{R}-\frac{2K^2dR}{R^2}=\frac{2KdK}{R}-dR(2-2\omega^2)$, e $-R\omega^2 d\omega=\frac{\omega KdK}{R}-dR(\omega-\omega^3)$. Logo substituindo estes valores, e fazendo, para abbreviar, $\frac{3}{2}R^2(2-\omega-\omega^2)=E$, $\frac{3}{2}R(2+\omega)=F$, acharemos $E.2dR+F.2KdK+\delta=0$.

65. E porque $dR=dr+dr''$, e $2dr=\frac{dx(2x-a)}{r}$, e $2dr''=\frac{dx''(2x''-a'')}{r''}$, suppondo $\frac{2dx-a}{r}=D$, e $\frac{2x''-a''}{r''}=D''$, será $2EdR=EDdx+ED''dx''$. Do mesmo modo differenciando a equação $K^2=x(x-b)+x''(x''+e''-fx)+g^2$, acharemos $2KdK=dx(2x-b-fx'')+dx''(2x''+e''-fx)$. Pelo que suppondo $DE+F(2x-b-fx'')=\alpha$, e $D''E+F(2x''+e''-fx)=\beta''$, teremos $\alpha dx+\beta'' dx''+\delta=0$.

66. Por hum calculo semelhante, suppondo $\frac{3}{2}R'^2\left(2-\omega'-\omega'^2\right)=E'$, e $\frac{3}{2}R'(2+\omega')=F'$, acharemos $2E'dR'+2F'K'dK'+\delta'=0$. Mas $dR'=dr+dr'$, e $2dR'=\frac{dx(2x-a)}{r}+\frac{dx'(2x'-a')}{r'}$, e $2K'dK'=dx(2x-e-f'x')+dx'(2x'+b'-f'x)$. Logo suppondo

2

$\frac{2x'-a'}{r'}=D'$, $E'D'+F'(2x'+b'-f'x)=\alpha'$, e $E'D+F'(2x-e-f'x')=\beta$, será $\alpha'dx'+\beta dx+\delta'=0$.

67. Do mesmo modo tomando $\frac{3}{2}R''^2(2-\omega''-\omega''^2)=E''$, e $\frac{3}{2}R''(2+\omega'')=F''$, será $2E''dR''+2F''K''dK''+\delta''=0$, $2dR''=\frac{dx'(2x'-a')}{r'}+\frac{dx''(2x''-a'')}{r''}=D'dx'+D''dx''$, e $2K''dK''=dx''(2x''+b''-f''x')+dx'(2x'-e'-f''x'')$. Pelo que, suppondo $E''D''+F''(2x''+b''-f''x')=\alpha''$, e $E''D'+F''(2x'-e'-f''x'')=\beta'$, será $\alpha''dx''+\beta'dx'+\delta''=0$. E assim teremos para resolver as tres equações seguintes:

$$\alpha\,dx+\beta''dx''+\delta=0$$
$$\alpha'dx'+\beta\,dx+\delta'=0$$
$$\alpha''dx''+\beta'dx'+\delta''=0.$$

68. Feita a resoluçaõ pelo methodo conhecido, acharemos

$$dx=-\frac{\alpha'\alpha''\delta+\beta'\beta''\delta'-\alpha'\beta''\delta''}{\alpha\,\alpha'\alpha''+\beta\beta'\beta''}$$

$$dx'=-\frac{\beta\,dx+\delta'}{\alpha'},\quad dx''=-\frac{\alpha\,dx+\delta}{\beta''};$$

valores, que nos daraõ as correcções procuradas das quantidades suppostas x, x', x''. Com estas, depois de corrigidas, tornaremos a calcular os resultados das equações fundamentaes δ, δ', δ'', e procedendo do mesmo modo, acharemos outras, e outras correcções, até se verificarem as ditas equações. Mas quasi nunca será preciso na prática fazer segunda vez a operaçaõ precedente, se as observações forem bem escolhidas, e os intervallos d'ellas naõ forem muito desiguaes, nem excessivamente grandes. Porque sendo nesse caso os primeiros valores, achados pela

ap-

approximaçaõ do §. IV, muito chegados aos verdadeiros, basta que huma vez se faça a operaçaõ precedente, para os corrigir quanto he necessario. Em geral nos governaremos pela grandeza das correcções achadas, para nos resolvermos a repetir, ou naõ repetir a operaçaõ.

69. Onde quer que se haja de parar, com os ultimos valores correctos se deveriaõ calcular as quantidades r, r'', R, ω, que haõ de servir na determinaçaõ dos elementos da Orbita. Mas será mais breve corrigir tambem por meio de formulas differenciaes os ultimos valores calculados d'ellas naquella operaçaõ, em que se parar. Assim teremos $dr = \frac{1}{2} D dx$; $dr'' = \frac{1}{2} D'' dx''$, $dR = dr + dr''$. E porque $\omega d\omega = \frac{dR}{R}(1 - \omega^2) - \frac{KdK}{R^2}$, e por outra parte

$$KdK = \frac{1}{2} dx(2x - b - fx'') + \frac{1}{2} dx''(2x'' + e'' - fx),$$

sendo tambem $2x - b - fx'' = \frac{\alpha - DE}{F}$, e $2x'' + e'' - fx = \frac{\beta'' - D''E}{F}$, teremos $KdK = \frac{\alpha dx + \beta'' dx'' - E(Ddx + D''dx'')}{2F}$ $= -\frac{\delta}{2F} - RdR(1 - \omega)$, e substituindo este valor, e reduzindo $d\omega = \frac{dR(2 + \omega)(1 - \omega)}{R\omega} + \frac{\delta}{2F\omega R^2}$.

70. Mas tornemos a fazer algumas considerações analyticas sobre as formulas differenciaes, que daõ as correcções de x, x', x''. Se no valor de dx desvanecesse juntamente o numerador, e o denominador, sería indicio manifesto, que as tres equações differenciaes naõ determinavaõ as correcções; e por consequencia, que nem as tres equações fundamentaes determinavaõ o Problema. Nesse caso huma das equações se conteria nas outras duas, como he facil de ver, procurando directamente as condições para isso necessarias. Multipliquemos a primeira por hum fa-

ctor indeterminado M, e a ſegunda por N; e ſommando-as, teremos $(M\alpha + N\beta)\, dx + M\beta''\, dx'' + N\alpha'\, dx' + M\delta + N\delta' = 0$. Eſta equaçaõ deverá ſer identica com a terceira das propoſtas, ſe ella depende das outras duas; e eſta condiçaõ dará $M\alpha + N\beta = 0$, $M\beta'' = \alpha''$, $N\alpha' = \beta'$, $M\delta + N\delta' = \delta''$ por equações de condiçaõ, das quaes ſe tira $M = \frac{\alpha''}{\beta''}$, $N = \frac{\beta'}{\alpha'}$; e ſubſtituindo eſtes valores na primeima, teremos $\alpha\alpha'\alpha'' + \beta\beta'\beta'' = 0$, $\alpha'\alpha''\delta + \beta'\beta''\delta' - \alpha'\beta''\delta'' = 0$.

71. Ainda que iſto ſeja huma conſideraçaõ puramente analytica, que naõ deve ter lugar na noſſa queſtaõ, todavia d'ahi podemos conhecer, que quando os valores do numerador, e denominador ſobreditos forem taõ pequenos, que ſe poſſaõ reputar quaſi deſvanecidos, ſerá o Problema muito proximo ao eſtado de indeterminado, e os valores que ſahirem para x, x', x'' naõ teraõ na praxe a exactidaõ neceſſaria. Iſto deve ſucceder neceſſariamente quando os intervallos das obſervações forem nimiamente pequenos, porque entaõ ſeraõ as equações quaſi identicas; e por iſſo ſe deve evitar a circunſtancia da grande proximidade das obſervações, ſobre a qual fundáraõ alguns Geometras as ſuas ſoluções d'eſte Problema, engenhoſas na theorica, inuteis na prática.

72. Outro embaraço ainda maior póde ſucceder, ſe no valor de dx ſómente deſvanecer o denominador, ou for muito pequeno em comparaçaõ do numerador. Entaõ ſahiria a correcçaõ de dx infinita, ou muito grande, contra o que devia ſer, por havermos já conſeguido o valor proximo de x pelo methodo do §. IV. Eſte inconveniente igualmente ſe havia de encontrar na reſoluçaõ da equaçaõ final, ſe pudeſſem eliminar-ſe praticamente as duas incognitas x', x''. Porque ſe tomaſſemos por x hum valor tal, que ſem embargo de ſer muito approximado, fizeſſe com tudo que o reſultado da equaçaõ foſſe hum maximo, ou hum minimo, o methodo das formulas differenciaes ſería inutil para o

cor-

corrigir, pois daria huma correcçaõ infinita, como he facil de entender, combinando os principios do dito methodo com a propriedade conhecida dos maximos, e minimos. E como as formulas differenciaes, que havemos dado, saõ huma abbreviatura, da que se havia de ter pára a resoluçaõ da sobredita equaçaõ final, está claro, que para servirem utilmente naõ basta, que os valores de x, x', x'' se saibaõ proximamente; mas he necessario, que naõ estejaõ nos limites das raizes das equações respectivas, onde ellas daõ o maximo, ou minimo resultado.

73. Mas de qualquer fórma que se proceda, quasi sempre será impossivel satisfazer exactamente na prática ás tres equações fundamentaes. Porque pertencendo ellas a huma orbita rigorosamente parabolica, qual naõ he a dos Cometas, e havendo sempre alguns defeitos inevitaveis nas observações, posto que ella o fosse, naõ teraõ lugar aquellas equações senaõ proximamente; e assim trabalhariamos em vaõ se continuassemos as operações das formulas differenciaes com o fim de satisfazer com exactidaõ ás mesmas equações fundamentaes. Porque as correcções achadas encaminhariaõ para a verificaçaõ d'ellas até certo ponto, e depois d'isso ou tornariaõ a desviar-se, ou ficariaõ na alternativa de darem de huma operaçaõ para a outra os mesmos valores de dx, dx', dx'' com sinaes contrarios.

74. Havendo pois neste caso de parar necessariamente em alguma parte, naõ he o methodo, que havemos exposto, o mais proprio para nos mostrar o lugar mais ventajoso, em que devemos ficar. Para isso serve muito melhor o methodo das interpolações, o qual, ainda que he algum tanto mais extenso, tem a ventagem de dar a resoluçaõ exacta, quando he possivel, e quando naõ, a mais approximada de todas.

75. Suppondo que já conhecemos proximamente os valores de x, x', x'', com x, e x'' acharemos o resultado δ da primeira equaçaõ fundamental; e fazendo sómente variar x'', buscaremos a sua correcçaõ, que verifique a dita equa-

equaçaõ, para o que baſta calcular a quantidade β'', e ſerá $dx'' = -\frac{\delta}{\beta''}$, repetindo-ſe eſta operaçaõ, ſe for neceſſario. Conſervando o meſmo valor de x, buſcaremos depois a correcçaõ de x' de maneira, que ſe ſatisfaça á ſeſegunda equaçaõ fundamental, uſando para iſſo da formula $dx' = -\frac{\delta'}{\alpha'}$. Entaõ ſubſtituiremos os valores achados de x', e x'' na terceira equaçaõ fundamental, cujo reſultado deſignaremos por γ; e tomando outros dous valores de x em progreſſaõ arithmetica $x + \eta$, $x + 2\eta$, ſendo η huma quantidade arbitraria pouco differente das correcções dx', dx'', que ſe acháraõ na operaçaõ antecedente, procederemos do meſmo modo, até acharmos na terceira equaçaõ os reſultados reſpectivos γ', γ''. Entaõ deſignando por dx a correcçaõ do primeiro valor hypothetico de x, teremos

$$dx' = \frac{\eta(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{2(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta^2(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{4(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} - \frac{2\gamma\eta^2}{(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')}\right)}.$$

valor, que ſerá real todas as vezes que ſe puder ſatisfazer juntamente ás tres equações; e imaginario, quando naõ for poſſivel. Mas a parte real d'eſte valor dará a correcçaõ propria de x, para que ſatisfazendo-ſe ás duas primeiras equações, a terceira dê o reſultado menor que he poſſivel.

76. Se com o valor de x naõ puder achar-ſe x'', que ſatisfaça exactamente á primeira equaçaõ fundamental, deixaremos eſta para prova; e tomando x' para fundamento da interpolaçaõ, buſcaremos os valores de x, e x'' que ſatisfaçaõ ás duas ultimas equações. Do meſmo modo faremos cahir a interpolaçaõ ſobre x'', ſe a ſegunda equaçaõ naõ admittir ſoluçaõ exacta. Mas ſe duas, ou todas tres eſtiverem no meſmo caſo, deveremos entaõ uſar da interpolaçaõ, para a reſoluçaõ de cada huma ſer do modo mais approximado que he poſſivel. Eſtes calculos ſómente ſe fariaõ no caſo de haver obſervações exactiſſimas, e de ſe que-

querer ſaber o reſultado da hypotheſe parabolica; e entaõ deveria haver tambem a advertencia de corrigir os lugares obſervados do effeito da parallaxe, a qual ſe deduzirá com facilidade dos primeiros valores approximados de x, x', x''.

§. VI.

Determinaçaõ dos Elementos da Orbita.

77. Como os elementos da orbita parabolica de hum Cometa ſe podem determinar por meio de duas diſtancias conhecidas d'elle á terra, e como a natureza da queſtaõ naõ permitte, que ſe achem eſſas duas diſtancias, ſem igualmente ſe indagar a terceira, temos aqui tambem mais do que era neceſſario para reſolver o Problema. As tres diſtancias x, x', x'', tomadas duas a duas, daraõ tres modos differentes de concluir os elementos procurados, os quaes deveráõ ſahir os meſmos, ſe as obſervações forem exactas, e a orbita rigoroſamente parabolica. Mas, faltando eſtas condições, daraõ tres ſyſtemas differentes de elementos, ſendo as differenças mais, ou menos ſenſiveis, conforme as faltas das meſmas condições. Naõ havendo outra razaõ de preferencia, eſcolheremos as diſtancias extremas x, x''; e quando as circunſtancias pedirem que uſemos de outras, como abaixo ſe dirá, o calculo ſerá da meſma maneira, havendo ſómente a advertencia de uſar das formulas reſpectivas ás diſtancias, de que nos quizermos ſervir.

78. Primeiramente determinaremos com muita facilidade a diſtancia perihelia. Porque com as diſtancias x, x'' calcularemos as quantidades correſpondentes r, r'', R, ω (*num.* 69); e introduzindo a quantidade ω na equaçaõ do *num.* 20, em que achamos $p = \dfrac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}}$, tere-

mos mais ſimplesmente $p = \frac{rr'' - \frac{1}{4} R^2 \omega^2}{R(1 - \omega)}$.

79. Com igual facilidade conheceremos o inſtante da paſſagem pelo perihelio. Porque deſignando por τ a differença de tempo entre o inſtante da primeira obſervaçaõ, e o da paſſagem pelo perihelio, teremos $\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r - p)}$ (*num.* 18). A differença τ he additiva ao tempo da primeira obſervaçaõ, todas as vezes que for $r > r''$; mas ſendo $r < r''$ póde ſer additiva, ou ſubtractiva. Neſſe caſo, para nos livrarmos de ambiguidade, calcularemos a differença τ'' entre o inſtante da paſſagem pelo perihelio, e o da terceira obſervaçaõ, pela formula reſpectiva $\tau'' = n(r'' + 2p)\sqrt{(r'' - p)}$; e a differença τ'' ſerá ſubtractiva do tempo da terceira obſervaçaõ: ſendo evidente, que no caſo de $r > r''$ fica neceſſariamente a paſſagem pelo perihelio para diante da primeira obſervaçaõ, e no caſo de $r < r''$ para traz da terceira, quer o Cometa ſeja directo, quer retrogrado. O caſo de $r = r''$ naõ careceria de calculo algum, pois cahiria a paſſagem juſtamente no meio do intervallo das duas obſervações.

80. Para ſe deduzir o reſto dos elementos, ſupponhamos o Cometa no tempo da primeira obſervaçaõ em C (Fig. 6.), a Terra em T, o Sol em S. Abaixando para o plano da ecliptica a perpendicular CP, o ponto P marcará o lugar do Cometa reduzido á ecliptica, e conforme as noſſas denominações, ſerá $TC = x$, $TS = s$, $SC = r$, $CTP = L$. Supponhamos tambem, que SN repreſenta a linha dos nodos, ou a interſecçaõ do plano da orbita com o da ecliptica, cahindo o nodo aſcendente para a parte de N, e entendendo-ſe ſempre por nodo aſcendente o ponto, donde a orbita, ſegundo a direcçaõ do movimento do Cometa, principia a deſviar-ſe da ecliptica para a parte boreal. Se por CP imaginarmos que paſſa hum plano NPC perpendicular á linha dos nodos SN, ſerá CNP a in-

inclinaçaõ dos planos da orbita, e ecliptica, que ſupporemos $= I$; e conduzindo pelo ponto T a recta TQ parallela, e TR perpendicular a SN, he evidente, que será PTQ a longitude do Cometa menos a do nodo aſcendente, e TSN a longitude da Terra viſta do Sol menos a longitude do meſmo nodo. Aſſim deſignando a longitude do nodo por N, a do Cometa por l, e a do Sol por Σ, teremos $PTQ = l - N$, e $TSN = \Sigma + 180° - N$.

81. Suppoſta a conſtrucçaõ precedente, he facil de ver, que teremos $\text{Cot.}\, I = \frac{PN}{CP}$, $CP = x\,\text{Sen.}L$, $TP = x\,\text{Coſ.}L$, $PN = PQ + TR = TP.\,\text{Sen.}\,(l - N) + s.\,\text{Sen.}\,(\Sigma + 180° - N)$ $= x\,\text{Coſ.}\,L\,\text{Sen.}\,(l - N) - s\,\text{Sen.}\,(\Sigma - N)$; e ſuppondo, para abbreviar, $x\,\text{Sen.}L = \varpi$, $x\,\text{Coſ.}L = \lambda$, teremos depois de feita a ſubſtituiçaõ $\text{Cot.}\, I = \frac{\lambda\,\text{Sen.}\,(l - N) - s\,\text{Sen.}\,(\Sigma - N)}{\varpi}$.

Do meſmo modo ſuppondo para o inſtante da terceira obſervaçaõ a longitude do Cometa $= l''$, a do Sol $= \Sigma''$, $x''\,\text{Sen.}L'' = \varpi''$, $x''\,\text{Coſ.}L'' = \lambda''$, teremos $\text{Cot.}\, I = \ldots$ $\frac{\lambda''\,\text{Sen.}\,(l'' - N) - s\,\text{Sen.}\,(\Sigma'' - N)}{\varpi''}$. Igualando entre ſi os dous valores de Cot. I, fazendo a evoluçaõ coſtumada dos Senos, dividindo tudo por Coſ. N, e ſeparando para hum ſó membro os termos, que tem Tg. N, acharemos para determinar o lugar do nodo a equaçaõ ſeguinte:

$$\text{Tg.}\, N = \frac{\varpi''\,(\lambda\,\text{Sen.}\,l - s\,\text{Sen.}\,\Sigma) - \varpi\,(\lambda''\,\text{Sen.}\,l'' - s''\,\text{Sen.}\,\Sigma'')}{\varpi\,(s''\,\text{Coſ.}\Sigma'' - \lambda''\,\text{Coſ.}\,l'') - \varpi''\,(s\,\text{Coſ.}\Sigma - \lambda\,\text{Coſ.}\,l)}.$$

82. He de advertir, que ſe hum Cometa naõ tiveſſe latitude alguma em ambas as obſervações, ſería $\varpi = 0$, e $\varpi'' = 0$, donde ſe vê, que juntamente deſvaneceria o numerador, e denominador da expreſſaõ antecedente. Aſſim teriamos por valor da Tangente de N huma quantidade in-

indefinida, como deve ser na realidade, por coincidir entaõ o plano da orbita com o da ecliptica, e naõ haver mais razaõ para dizer que o corta em hum ponto, do que em outro qualquer. E d'ahi podemos concluir, que todas as vezes que os valores de ϖ, ϖ'', ainda que grandes sejaõ, combinados na equaçaõ com as outras quantidades que nella entraõ, derem simultaneamente o numerador, e denominador muito pequenos; as duas distancias, que escolhemos, saõ pouco proprias para a determinaçaõ do nodo. Assim veremos que resultado daõ as outras duas combinações de x, x', e de x', x''; e se todas estas estiverem no mesmo caso, será necessario calcular outras observações, que melhor sirvaõ para determinar este elemento. Mas o melhor de tudo he escolher logo as tres observações primitivas de maneira, que determinem bem a posiçaõ do nodo, o que se conseguirá procurando, que entre ellas fique comprehendida a passagem do Cometa pela ecliptica, quando puder ser; e quando naõ, que huma das observações naõ fique muito longe d'esta passagem.

83. Deve notar-se tambem, que a especie de N se determina pelos sinaes do numerador, e denominador da fracçaõ, pela qual se exprime a sua Tangente. Porque $\frac{+}{+}$ dará N no primeiro quadrante, $\frac{+}{-}$ no segundo, $\frac{-}{-}$ no terceiro, e $\frac{-}{+}$ no quarto, como he facil de entender, reflectindo que o numerador, e denominador saõ quantidades analogas ao Seno, e Coseno de N, e que os Senos saõ negativos de 6^s até 12^s, e os Cosenos de 3^s até 9^s. Donde se vê, que ainda que algebricamente he o mesmo $\text{Tg.} N = \frac{+a}{+b}$ que $\text{Tg.} N = \frac{-a}{-b}$, e $\text{Tg.} N = \frac{+a}{-b}$ o mes-

mo

mo que Tg. $N = \frac{-a}{+b}$, com tudo em quanto a eſpecie de N ſaõ expreſsões, que ſe naõ devem confundir.

84. Ainda ſe póde facilitar muito mais a regra da eſpecie dos arcos, cuja Tangente ſe exprime por huma fracçaõ, ſe em lugar dos arcos, que excedem 180°, tomarmos os ſeus ſuplementos para 360° com ſinal contrario, porque aſſim vimos a cahir no meſmo ponto da circunferencia, ao qual correſponde ſempre o meſmo Seno, Tangente &c., e com o meſmo ſinal. D'eſte modo nos lembraremos facilmente que N *he poſitivo ou negativo, conforme o ſinal do numerador; e agudo, ou obtuſo, conforme for o denominador poſitivo, ou negativo.* Aſſim, para maior commodidade dos calculos naõ uſaremos nunca de arcos, ou angulos, que excedaõ 180°, tomando negativamente os Senos dos que forem negativos, e os Coſenos dos que forem obtuſos; e em chegando aos reſultados finaes, mudaremos os negativos em poſitivos, tomando em lugar d'elles os ſeus ſuplementos para 360°, para ficarem contados em roda para a meſma parte, como he coſtume dos Aſtronomos.

85. A regra, que havemos eſtabelecido para diſcernir a eſpecie de N, naõ padece limitaçaõ alguma nos Cometas retrogrados. Porque aſſim como elles tem o nodo aſcendente, onde havia de ſer o deſcendente no caſo de correrem a meſma orbita directamente, ſegundo a ordem dos ſignos, do meſmo modo a obſervaçaõ, que nelles he primeira, deveria ſer a ultima naquelle caſo. Eſta permutaçaõ das obſervações faz mudar o ſinal do numerador, e juntamente o do denominador; mudança, que influe na eſpecie de N a differença de 180°, que na realidade ha.

86. Sendo conhecida a longitude do nodo N, immediatamente acharemos a inclinaçaõ da orbita pela equaçaõ Tg. $I = \frac{\varpi}{\lambda\ \text{Sen.}(l - N) - s\ \text{Sen.}(\Sigma - N)}$, na qual he eſ-

cuſado attender a regra dos ſinaes, porque a inclinaçaõ ſe coſtuma ſempre deſignar pelo angulo agudo, e naõ pelo obtuſo que entre ſi fórmaõ os planos da orbita, e da ecliptica. Sem embargo o ſinal da Tangente da inclinaçaõ ſempre nos dá a conhecer huma couſa importante, que he a direcçaõ do movimento, hum dos elementos que buſcamos. Porque dando a equaçaõ hum valor de Tg. I ſempre poſitivo nos Cometas directos, claramente ſe vê, que nos retrogrados o deve dar ſempre negativo, por nelles ter N de mais 180°; circunſtancia, que faz mudar o ſinal taõ ſómente ao denominador da fracçaõ, pela qual ſe exprime a Tangente de I. Pelo que ſahindo negativo o valor da Tangente da inclinaçaõ, quer o ſinal negativo eſteja no numerador, quer no denominador, conheceremos que o Cometa he retrogrado; e directo todas as vezes que a meſma Tangente ſe achar poſitiva, ſendo o numerador e denominador ambos poſitivos, ou ambos negativos.

87. Falta-nos a longitude do perihelio na orbita propria do Cometa, a qual denotaremos pela letra P. Para cuja determinaçaõ buſcaremos primeiro a anomalia U correſpondente á primeira obſervaçaõ pela formula conhecida Coſ. $\frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}$. Advertindo porém, que ella naõ he conveniente na praxe, quando r differe pouco de p, uſaremos com preferencia d'eſta outra Sen. $\frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$, que d'ella ſe deriva. E porque a longitude do Cometa na orbita, no tempo da primeira obſervaçaõ, he evidentemente $P+U$, e o angulo CSN (Fig. 6.) he a longitude d'elle na orbita menos a do nodo, teremos Tg. $(P+U-N) = \frac{CN}{SN}$. Porém $CN = \frac{x \text{ Sen. } L}{\text{Sen. } I} = \frac{\varpi}{\text{Sen. } I}$, e $SN = \lambda$ Coſ.

$(l - N) - s$ Cof. $(\Sigma - N)$. Logo Tg. $(P + U - N) = \dfrac{\varpi . \frac{1}{\text{Sen.} I}}{\lambda \text{ Cof.} (l - N) - s \text{ Cof.} (\Sigma - N)}$. Onde se advertirá, que Sen. I he negativo nos Cometas retrogrados; que U muda de final, quando a obfervaçaõ cahir antes da paffagem pelo perihelio nos Cometas direĉtos, e quando cahir depois nos retrogrados; e que o angulo total $P + U - N$ he negativo, ou pofitivo, conforme o for o numerador $\varpi . \frac{1}{\text{Sen.} I}$; e agudo, ou obtufo, conforme for o denominador pofitivo, ou negativo, como fica dito.

88. Se a orbita de hum Cometa coincidiffe com o plano da ecliptica, a inclinaçaõ feria nenhuma, e a pofiçaõ do nodo indeterminada, e inutil, como acima diffemos. Entaõ, deixados effes dous elementos, achariamos a longitude do perihelio d'efta maneira: fuppondo que SN he hum femidiametro da ecliptica, que paffa pelo ponto de ♈, e refleĉtindo que na fuppofiçaõ prefente deve o ponto C (Fig. 6.) cahir em P, teremos $PTQ = l$, $TSN = \Sigma + 180°$, $PSN = P + U$, $TP = x$, $PN = x$ Sen. $l - s$ Sen. Σ, $SN = x$ Cof. $l - s$ Cof. Σ. Donde fe conclue Tg. $PSN =$ Tg. $(P + U) = \dfrac{x \text{ Sen.} l - s \text{ Sen.} \Sigma}{x \text{ Cof.} l - s \text{ Cof.} \Sigma}$.

§. VII.

Modo de calcular o lugar de hum Cometa para qualquer inftante dado, fendo conhecidos os elementos da orbita.

89. Ainda que efta queftaõ fe acha refolvida ha muito tempo, e a praxe d'ella facilitada por meio da Taboa Geral muito conhecida dos Aftronomos, daremos aquí huma foluçaõ nova, que refulta das formulas, que havemos demonftrado, a qual naõ depende do ufo fubfidiario d'aquella

quella Taboa, nem de se buscarem previamente as longitudes, e latitudes heliocentricas; mas com o raio vector, e anomalia immediatamente descobre a longitude, e latitude vistas da terra, por formulas, que pela sua simplicidade parecem dever preferir-se ao grande número de preceitos, e operações, de que consta o modo ordinario dos Astronomos.

90. Primeiramente buscaremos o raio vector r, que corresponde ao instante dado, pela equaçaõ $\tau = n(r+2p)\sqrt{(r-p)}$ (*num.* 18), na qual τ he o intervallo de tempo entre o instante dado, e a passagem pelo perihelio. Para a resolvermos facilmente por logarithmos, supponhamos $r = p + y^2$, e teremos a transformada $y^3 + 3py - \frac{\tau}{n} = 0$, que pela regra conhecida de Cardano dará $y = \sqrt[3]{\left(\frac{\tau}{2n} + \sqrt{\left(\frac{\tau^2}{4n^2} + p^3\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(-\frac{\tau}{2n} + \sqrt{\left(\frac{\tau^2}{4n^2} + p^3\right)}\right)}$. Supponhamos $\frac{2n\sqrt{p^3}}{\tau} = \text{Tg.}\,M$; e havendo reflectido, que $\sqrt{(1+\text{Tg.}^2 M)} = \frac{1}{\text{Cos.}\,M}$, $\frac{1+\text{Cos.}\,M}{\text{Cos.}\,M} = \text{Tg.}\,M.\,\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M$, e $\frac{1-\text{Cos.}\,M}{\text{Cos.}\,M} = \text{Tg.}\,M.\,\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M$, a equaçaõ precedente se reduzirá a dar $y = \left(\sqrt[3]{\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M} - \sqrt[3]{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M}\right)\sqrt[3]{\frac{\tau\,\text{Tg.}\,M}{2n}}$, isto he, $y = \left(\sqrt[3]{\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M} - \sqrt[3]{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M}\right)\sqrt{p}$. Pelo que suppondo $\sqrt[3]{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M} = \text{Tg.}\,Q$, e sendo por conseguinte $\sqrt[3]{\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M} = \text{Cot.}\,Q$, advertiremos que he $\text{Cot.}\,Q - \text{Tg.}\,Q = 2\,\text{Cot.}\,2Q = \frac{2}{\text{Tg.}\,2Q}$, e teremos $y = \frac{2\sqrt{p}}{\text{Tg.}\,2Q}$, e finalmente $r = p + \frac{4p}{\text{Tg.}^2\,2Q}$.

91.

91. Conhecido o raio vector r, facilmente acharemos a anomalia correspondente U pela formula $\text{Cos.}\frac{1}{2}U = \sqrt{\frac{p}{r}}$, ou $\text{Sen.}\frac{1}{2}U = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$, ou tambem por esta $\text{Tg.}\frac{1}{2}U = \sqrt{\frac{r-p}{p}}$, que se deriva das outras duas.

92. Se quizermos achar primeiro a anomalia, a mesma construcçaõ do *num.* 90 servirá para a calcularmos. Porque dando a ultima equaçaõ do número precedente $\text{Tg.}^2\frac{1}{2}U = \frac{r-p}{p}$, se substituirmos o valor achado de r, teremos $\text{Tg.}^2\frac{1}{2}U = \frac{4}{\text{Tg.}^2 2Q}$, e $\text{Tg.}\frac{1}{2}U = \frac{2}{\text{Tg.}2Q}$. Por tanto fazendo $\text{Tg.}M = \frac{2n\sqrt{p^3}}{T}$, e $\text{Tg.}Q = \sqrt[3]{\text{Tg.}\frac{1}{2}M}$, será $\text{Tg.}\frac{1}{2}U = \frac{2}{\text{Tg.}2Q}$, e $r = p + p.\text{Tg.}^2\frac{1}{2}U$, ou $r = \frac{p}{\text{Cos.}^2\frac{1}{2}U}$.

93. Quem se quizer servir da Taboa Geral dos Cometas, para achar a anomalia, deverá calcular a quantidade $\frac{T}{\sqrt{p^3}}$, e esta lhe dará o número subsidiario de dias, com que ha de entrar na Taboa, para ter a anomalia U, que corresponde ao tempo dado na orbita dada, e com ella se achará r por qualquer das equações antecedentes.

94. De qualquer modo que se hajaõ calculado as quantidades r, U, com ellas viremos facilmente no conhecimento da longitude, e latitude do Cometa. Porque sendo $SC = r$ (Fig. 6.), $ST = s$, $CSN = P + U - N$, $TSN = \Sigma - N + 180°$, e $PTQ = l - N$, teremos $\text{Tg.}(l - N) =$

$= \frac{PQ}{TQ}$. Porém o triangulo CSN dá $SN = r$ Cof. $(P+U-N)$, e $CN = r$ Sen. $(P + U - N)$, donde fe conclue $PN = CN$. Cof. $I = r$ Sen. $(P+U-N)$ Cof. I, e o triangulo TSR dá $SR = s$ Cof. $(\Sigma - N + 180°) = - s$ Cof. $(\Sigma - N)$, e $TR = s$ Sen. $(\Sigma - N + 180°) = - s$ Sen. $(\Sigma - N)$. Logo ferá $PQ = PN - TR = r$ Sen. $(P + U - N)$ Cof. $I + s$ Sen. $(\Sigma - N)$, e $TQ = SN - SR = r$ Cof. $(P + U - N) + s$ Cof. $(\Sigma - N)$. E fubftituindo eftes valores na expreffaõ da Tangente de $l - N$, teremos

$$\text{Tg.}\,(l - N) = \frac{r\,\text{Sen.}\,(P+U-N)\,\text{Cof.}\,I + s\,\text{Sen.}\,(\Sigma - N)}{r\,\text{Cof.}\,(P+U-N) + s\,\text{Cof.}\,(\Sigma - N)};$$

advertindo-fe, como já fica dito, que U muda de final, quando o inftante dado for antes da paffagem pelo perihelio nos Cometas direƈtos, e depois nos retrogrados; e guardando-fe tambem a refpeito da efpecie do angulo $l - N$ a regra dos finaes acima dada. He efcufado dizer-fe, que ao angulo achado $l - N$ fe deve ajuntar a longitude do nodo N para ter a do Cometa l.

95. Pelo que refpeita a latitude CTP, que denotamos por L, teremos igualmente Tg. $L = \frac{CP}{TP}$. Porém no triangulo CPN he $CP = CN$. Sen. $I = r$ Sen. $(P - N + U)$ Sen. I, e no triangulo PTQ he $TP = \frac{TQ}{\text{Cof.}\,(l - N)} = \frac{r\,\text{Cof.}(P+U-N) + s\,\text{Cof.}(\Sigma - N)}{\text{Cof.}\,(l - N)}$. Logo, fazendo a fubftituiçaõ d'eftes valores, ferá $\text{Tg.}L = \frac{r\,\text{Sen.}(P+U-N)\,\text{Cof.}(l-N)\,\text{Sen.}I}{r\,\text{Cof.}(P+U-N) + s\,\text{Cof.}(\Sigma - N)}$; expreffaõ, que fe calculará com muita facilidade, por ter o mefmo denominador, que tem a da longitude, e no numerador a quantidade commua r Sen. $(P + U - N)$. Na efpecie da latitude naõ ha que attender, pois fe naõ conta em

em roda como a longitude, mas de huma e outra parte da ecliptica até 90°. Se a Tangente d'ella porém sahir negativa, quer o sinal negativo esteja no numerador, quer no denominador, será a latitude austral; e se sahir positiva, boreal.

96. Algumas vezes he preciso calcular a distancia do Cometa á terra, como succede quando se quer saber a sua parallaxe, a fim de reduzir a longitude, e latitude calculadas ás apparentes, que se devem observar, o que principalmente se deve attender nas orbitas, que passaõ em maior vizinhança da terra. Quando tambem por algumas observações se souberem já proximamente os elementos da orbita, e se quizerem rectificar por outras observações, que pareçaõ mais ventajosas para isso, em lugar de se buscarem os primeiros valores approximados das distancias x, x', x'' respectivas a essas observações pelo methodo do §. IV, podem mais facilmente deduzir-se dos elementos proximamente conhecidos, e corregir-se immediatamente por qualquer dos methodos, que expuzemos no §. V.

97. Quando se tiver calculado previamente a longitude, e latitude do Cometa, por meio d'ellas podemos determinar a distancia x, ou TC (Fig. 6.). Porque sendo

$$x = \frac{TP}{\text{Cos.}L} = \frac{CP}{\text{Sen.}L},\ TP = \frac{r\,\text{Cos.}(P+U-N) + s\,\text{Cos.}(\Sigma - N)}{\text{Cos.}(l-N)},$$

e $CP = r\ \text{Sen.}\ (P+U-N)\ \text{Sen.}\,I$, como temos visto,

será $x = \dfrac{r\,\text{Cos.}\,(P+U-N) + s\ \text{Cos.}\,(\Sigma - N)}{\text{Cos.}\,L\ \text{Cos.}\,(l-N)}$, ou

$x = \dfrac{r\,\text{Sen.}\,(P+U-N)\ \text{Sen.}\,I}{\text{Sen.}\,L}$. Mas se taõ sómente buscarmos a distancia, sem haver necessidade do conhecimento da longitude, nem da latitude, podemos calculalla por huma formula immediata. Porque he $x^2 = CP^2 + TP^2 = CP^2 + PQ^2 + TQ^2$; porém já temos visto, que $CP = r$ $\text{Sen.}\,(P+U-N)\,\text{Sen.}\,I$, $PQ = r\ \text{Sen.}\,(P+U-N)\,\text{Cos.}\,I + s$ $\text{Sen.}\,(\Sigma - N)$, e $TQ = r\,\text{Cos.}\,(P+U-N) + s\ \text{Cos.}\,(\Sigma - N)$:

lo-

logo sommando os quadrados d'estas tres quantidades, fazendo as reducções costumadas, e extrahindo a raiz, teremos $x = \sqrt{\left(r^2 + s^2 + 2rs \text{ Cos.} (P + U - N) \text{ Cos.} (\Sigma - N)\right.}$ $\left.+ 2rs \text{ Sen.} (P + U - N) \text{ Sen.} (\Sigma - N) \text{ Cos.} I\right)$.

98. E reduzindo tudo a hum só ponto de vista: pelos elementos dados, e pelo calculo da longitude, e distancia do Sol para o instante dado, seraõ conhecidas as quantidades τ, p, P, N, I, Σ, s, com o número constante $n = 27{,}4038 57$, cujo logarithmo he 1.4378117. E para conhecermos a longitude do Cometa l, a latitude L, e a distancia d'elle á terra x, calcularemos primeiramente os angulos M, Q de maneira que seja $\text{Tg.} M = \frac{2n\sqrt{p^3}}{\tau}$, e $\text{Tg.} Q = \sqrt[3]{\text{Tg.} \frac{1}{2} M}$, e determinaremos r, U pelas duas equações seguintes

$$\text{Tg.} \tfrac{1}{2} U = \frac{2}{\text{Tg.} 2Q}, \quad r = p + p \text{ Tg.}^2 \tfrac{1}{2} U.$$

Entaõ suppondo, para abreviar, $P + U - N = \Lambda$, e $\Sigma - N = \Delta$, teremos as tres equações seguintes

$$\text{Tg.} (l - N) = \frac{r \text{ Sen.} \Lambda \text{ Cos.} I + s \text{ Sen.} \Delta}{r \text{ Cos.} \Lambda + s \text{ Cos.} \Delta}$$

$$\text{Tg.} L = \frac{r \text{ Sen.} \Lambda \text{ Sen.} I \text{ Cos.} (l - N)}{r \text{ Cos.} \Lambda + s \text{ Cos.} \Delta}$$

$$x = \sqrt{\left(r^2 + s^2 + 2rs (\text{Cos.} \Lambda \text{ Cos.} \Delta + \text{Sen.} \Lambda \text{ Sen.} \Delta \text{ Cos.} I)\right)};$$

equações, que igualmente podem servir, para se calcularem as longitudes, latitudes, e distancias dos Planetas, tanto superiores, como inferiores.

99. Sirva de exemplo o Cometa de 1742, cujos elementos referidos por M. de la Caille nas suas *Lições de Astronomia*, num. 776, saõ d'esta maneira:

Lon-

Longitude do nodo aſcendente	$6^s\ 5^\circ\ 38'\ 29''$
Longitude do perihelio	7 7 35 13
Inclinaçaõ da orbita	66 59 14
Logarithmo da diſtancia perihelia	9.884049
Paſſagem pelo perihel. 1742. Fev.	$8^d\ 4^h\ 14'$ *temp. med.*
Movimento	Retrogrado.

Se quizermos ſaber a longitude, latitude, e diſtancia d'elle á terra para o dia 28 de Março do meſmo anno ás $13^h\ 39'$ do tempo medio, deveremos para eſſe inſtante calcular a longitude do Sol, e a ſua diſtancia. Mas ſervindo-nos das que foraõ calculadas pelo referido Aſtronomo, e reduzindo os elementos á fórma, que indicámos no *num.* 84, teremos $\tau = 48^d, 3687$, Log. $p = 9.884049$, $P = -142^\circ\ 24'\ 47''$, $N = -174^\circ\ 21'\ 31''$, $I = -66^\circ\ 59'\ 14''$, $\Sigma = 8^\circ\ 11'\ 28''$, e Log. $s = 9.999841$.

Aſſim acharemos $M = 37^\circ\ 12'\ 20''$, $Q = 34^\circ\ 49'\ 22'', 7$; $U = 73^\circ\ 8'\ 55''$, e Log. $r = 0.074525$. E advertindo, que U deve mudar de ſinal, por ſer o inſtante dado depois da paſſagem pelo perihelio em Cometa retrogrado, teremos $\Lambda = -41^\circ\ 12'\ 11''$, e $\Delta = -177^\circ\ 27'\ 1''$. Donde achamos $l - N = -106^\circ\ 45'\ 9''$, $l = -281^\circ\ 6'\ 40'' = 78^\circ\ 53'\ 20'' = 2^s\ 18^\circ\ 53\ 20''$, $L = 63^\circ\ 3'\ 55''$ boreal, e $x = 0,807391$.

§. VIII.

Applicações das Formulas antecedentes.

100. As formulas, que acabamos de moſtrar, naõ ſe limitaõ a calcular com facilidade os lugares dos Cometas, mas como expreſsões analyticas, e geraes, podem ter outros muitos uſos. Hum, que me parece digno d'eſte lugar, he quando por huma ſó obſervaçaõ de hum Cometa queremos certificar-nos, ſe elle he algum dos que já fo-

raõ obſervados, e que por boas conjecturas ſe eſperava que tornaſſe pouco mais ou menos a apparecer por aquelle tempo, em que ſe faz a obſervaçaõ d'elle. Neſte caſo he conhecida a longitude, e latitude pela obſervaçaõ preſente, e os elementos da orbita pelas obſervações da appariçaõ precedente, exceptuando o tempo da paſſagem pelo perihelio, para cujo conhecimento era neceſſario, que ſe ſoubeſſe exactamente o tempo periodico, o qual, pelas notaveis alterações, que póde ter de revoluçaõ a revoluçaõ, nunca poderá fixar-ſe por obſervaçaõ, nem predizer-ſe com certeza por calculo algum.

101. Como pois temos as duas equações $\text{Tg.}\,(l-N) = \frac{r\,\text{Sen.}\Lambda\,\text{Coſ.}I + s\,\text{Sen.}\Delta}{r\,\text{Coſ.}\Lambda + s\,\text{Coſ.}\Delta}$, e $\text{Tg.}\,L = \frac{r\,\text{Sen.}\Lambda\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N)}{r\,\text{Coſ.}\Lambda + s\,\text{Coſ.}\Delta}$ (*num.* 98), nas quaes ha ſómente duas incognitas r, e Λ. A primeira nos dará $r = \frac{s\,\text{Sen.}\Delta - s\,\text{Coſ.}\Delta\,\text{Tg.}\,(l-N)}{\text{Coſ.}\Lambda\,\text{Tg.}\,(l-N) - \text{Sen.}\Lambda\,\text{Coſ.}I}$, e a ſegunda $r = \frac{s\,\text{Coſ.}\Delta\,\text{Tg.}\,L}{\text{Coſ.}\Lambda\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Sen.}\Lambda\,\text{Tg.}\,L}$.

Igualando eſtes dous valores de r, dividindo os numeradores por $s\,\text{Coſ.}\Delta$, e os denominadores por $\text{Coſ.}\Lambda$, teremos

$$\frac{\text{Tg.}\Delta - \text{Tg.}\,(l-N)}{\text{Tg.}\,(l-N) - \text{Tg.}\Lambda\,\text{Coſ.}I} = \frac{\text{Tg.}L}{\text{Tg.}\Lambda\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Tg.}L},$$

donde ſe tira $\text{Tg.}\Lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\text{Tg.}L\,\text{Tg.}\Delta}{\text{Tg.}\Delta\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-N) + \text{Tg.}L\,\text{Coſ.}I}.$$

E reflectindo, que $\text{Sen.}I\,\text{Tg.}\Delta\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-N) = -\frac{\text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-N-\Delta)}{\text{Coſ.}\Delta}$, e $l-N-\Delta = l-\Sigma$, teremos mais ſimplesmente $\text{Tg.}\Lambda = \frac{\text{Tg.}L\,\text{Sen.}\Delta}{\text{Tg.}L\,\text{Coſ.}I\,\text{Coſ.}\Delta - \text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-\Sigma)}$.

102. Sendo conhecida a quantidade Λ, podemos logo determinar r por qualquer das duas equações

$$r = \frac{s \text{ Sen.} \Delta - s \text{ Cof.} \Delta \text{ Tg.} (l - N)}{\text{Cof.} \Lambda \text{ Tg.} (l - N) - \text{Sen.} \Lambda \text{ Cof.} I},$$

$$\text{ou } r = \frac{s \text{ Cof.} \Delta \text{ Tg.} L}{\text{Sen.} \Lambda \text{ Sen.} I \text{ Cof.} (l - N) - \text{Cof.} \Lambda \text{ Tg.} L}.$$

E porque havemos ſuppoſto $\Lambda = P + U - N$, e $P - N$ he quantidade conhecida pelos elementos da orbita determinada pelas obſervaçóes feitas na apparição antecedente, teremos $U = \Lambda - P + N$, e conſeguintemente conheceremos a diſtancia perihelia $p = r \text{ Cof.}^2 \frac{1}{2} U$. E ſe eſta diſtancia deduzida da obſervação preſente concordar com a que ſe havia deduzido das obſervaçóes da outra apparição, ou ſe differir muito pouco d'ella, ſeraõ confirmadas as conjecturas de ſer o Cometa aquelle meſmo, que ſe eſperava; e pelo contrario, ſe houver grande diſcrepancia nas duas diſtancias perihelias. Concordando, quanto baſte, para termos o Cometa pelo meſmo, que eſperavamos, buſcaremos o inſtante da paſſagem pelo perihelio, calculando a formula $\tau = n(r + 2p) \sqrt{(r - p)}$, e com ella poderemos formar huma ephemeride dos ſeus movimentos.

103. Supponhamos, que em París ſe deſcubrio hum Cometa em 1759 aos 15 de Abril ás $16^h\ 40'\ 23''$ em $10^s\ 18^\circ\ 52'\ 11''$ com a latitude $4^\circ\ 28'\ 9''$ auſtral, quando já, com impaciencia de huns, e naõ pequena deſconfiança de outros, ſe eſperava pela volta do Cometa de 1682, em virtude da famoſa predicção de Halley. Por eſta unica obſervação ſe podia logo conhecer ſe o Cometa novamente apparecido era, ou naõ era o que ſe eſperava. Porque pelo calculo do Sol teriamos $\Sigma = 25^\circ\ 51'$, e $\log. s = 0.002016$; e pelos elementos de 1682, $N = 50^\circ 48$, $P = 301^\circ\ 36'$, e $I = -17^\circ\ 42'$, por ſer Cometa retrogrado: donde reſultaria $\Delta = -24^\circ\ 57'$, $l - \Sigma = -66^\circ\ 59'$, $l - N = -91^\circ\ 56'$. E pelo calculo

lo das formulas reſpectivas, achariamos $\Lambda = 174° 35'$, log. $r = 9.966869$; e porque $P - N = -109° 12'$, teriamos $U = 283° 47' = -76° 13'$, donde concluiriamos $p = 0,57365$, quantidade, que differe pouco da que ſe havia achado em 1682, e aſſim moſtra, que o Cometa he o meſmo. Com as quantidades r, p achariamos finalmente $\tau = 33^d\ 18^h\ 16'$; e reflectindo, que a obſervaçaõ devia ſer poſterior á paſſagem pelo perihelio, por ſahir a anomalia U negativa em Cometa retrogrado, a dita paſſagem teria ſido a 12 de Março $22^h\ 24'$. E ſendo eſta conhecida, eſtariamos com tudo o que era neceſſario para calcular huma ephemeride do movimento do Cometa d'ahi para diante, quanto era baſtante para ſervir de preparo para as obſervações, que ſe houveſſem de fazer.

104. Algumas vezes póde ſer neceſſario ſaber o tempo, em que hum Cometa deve paſſar pelo nodo aſcendente, ou deſcente. Neſſe caſo eſtá claro, que o angulo CSN (Fig. 6.) deve ſer 0°, ou 180°. E porque $CSN = P + U - N$, teremos $U = N - P$ no primeiro caſo, e $U = N - P + 180°$ no ſegundo. Subſtituindo eſtes valores na formula $r = \frac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} U}$, ſerá o raio vector, que paſſa pelo nodo aſcendente, $\frac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} (N - P)}$, e o que paſſa pelo nodo deſcendente ſerá $\frac{p}{\text{Sen.}^2 \frac{1}{2} (N - P)}$. E calculando para cada hum d'elles a formula $\tau = n\,(r + 2p)\,\sqrt{(r - p)}$, ſe acharáõ as differenças de tempo entre o inſtante da paſſagem pelo perihelio, e os da paſſagem pela linha dos nodos; dif-

differenças, que se haõ de ajuntar ao tempo da passagem pelo perihelio quando os valores de U, reduzidos a naõ passarem de 180° forem positivos, e subtrahir quando forem negativos nos Cometas directos, e ao contrario nos retrogrados.

105. He tambem muito notavel o instante da opposiçaõ, ou conjuncçaõ de hum Cometa com o Sol, mas naõ he taõ facil de calcular. Entaõ deve a linha ST (Fig. 6.) coincidir com SP; e como temos visto, que $TSN = \Sigma - N + 180^\circ$, será nesse caso Tg. $(\Sigma - N + 180^\circ)$, ou, que vem a ser o mesmo, Tg. $(\Sigma - N) = \frac{PN}{SN}$, e feitas as substituições competentes, será Tg. $\Delta =$ Tg. Λ Cos. I. Como Λ naõ involve outra incognita senaõ a anomalia U, que depende do tempo corrido desde o perihelio, nem Δ outra senaõ a longitude do Sol Σ, que tambem depende do tempo corrido desde a passagem da terra pelo seu perihelio, se em lugar d'essas duas quantidades substituissemos os seus valores em funcções do tempo, pela immediata resoluçaõ da equaçaõ achariamos o que buscamos. Mas vindo por esse caminho a cahir em huma equaçaõ summamente complicada, he melhor, que usemos do methodo das interpolações, para resolver a equaçaõ Tg. Λ Cos. $I -$ Tg. $\Delta = 0$, na fórma simplicissima, em que se acha.

106. Para isso tomaremos hum tempo a arbitrio, que naõ esteja longe da conjuncçaõ, ou opposiçaõ, quanto se póde conjecturar pelas circunstancias, e em qualquer ephemeride acharemos calculada a longitude do Sol Σ, e pela Taboa geral dos Cometas facilmente conheceremos a anomalia do Cometa U, que convem a esse instante. Assim teremos as quantidades Λ, Δ, e com ellas calcularemos a equaçaõ precedente, que em lugar de se verificar, supponmos que dá o resultado γ. Fazendo o mesmo com outros dous tempos tomados em progressaõ arithmetica com o

primeiro, ſendo a differença delles η, acharemos outros dous reſultados da equaçaõ, que reſpectivamente deſignaremos por γ', γ''; e aſſim viremos a conhecer a correcçaõ do primeiro tempo hypothetico pela equaçaõ do *num.* 59. E ſendo por eſta primeira operaçaõ conhecido proximamente o tempo da conjunçaõ, ou oppoſiçaõ, ſe tomarmos outros tres inſtantes em progreſſaõ arithmetica na vizinhança d'elle, viremos a determinallo com toda a exactidaõ, que for neceſſaria.

107. Naõ intereſſará menos a curioſidade em ſaber os pontos da orbita, onde hum Cometa poderá paſſar na maior vizinhança do noſſo globo; pontos criticos, que depois das ouſadas conjecturas de Whiſton começáraõ a ſer olhados com receio, e ha bem poucos annos com terror, e ſobreſalto taõ geral em París, que para o deſvanecer compoz o illuſtre M. du Séjour o ſeu excellente ***Enſayo ſobre os Cometas em geral, e em particular ſobre os que podem avizinhar-ſe á orbita da terra.*** Deixando porém, como alheias do meu propoſito, as conſequencias phyſicas, que podem reſultar da grande vizinhança de hum Cometa, e as conjecturas, que ſe podem formar ſobre a exiſtencia de algum, que haja finalmente de chegar-ſe a huma diſtancia perigoſa: vejamos, como, ſendo conhecidos os elementos da orbita de qualquer Cometa, podemos deſcubrir a menor diſtancia, em que elle póde achar-ſe a reſpeito da terra.

108. Eſta queſtaõ póde tomar-ſe de dous modos. O primeiro conſiſte em averiguar a menor diſtancia, em que ha de paſſar hum Cometa a reſpeito da terra na revoluçaõ actual, em que elle ſe começa a obſervar, e o inſtante do phenomeno. O ſegundo he diſtinguir entre todas as revoluções poſſiveis a que ha de dar a mais pequena diſtancia: que vem a ſer o meſmo, que preſcindir dos movimentos do Cometa, e da Terra, e procurar nas duas orbitas os pontos, onde ellas paſſaõ na maior vizinhança huma da outra. Comecemos pelo ultimo.

109. Como temos a expressaõ geral da distancia do Cometa $x = \sqrt{(r^2 + s^2 + 2rs\,(\text{Cos.}\Delta\ \text{Cos.}\Lambda + \text{Sen.}\Delta\ \text{Sen.}\Lambda\ \text{Cos.}I))}$, na qual para o uso presente se póde considerar a orbita terrestre como circular, suppondo s constante, a propriedade do minimo nos dará

$$\left.\begin{array}{l} r\,dr + s\,dr\ (\text{Cos.}\Delta\ \text{Cos.}\Lambda + \text{Sen.}\Delta\ \text{Sen.}\Lambda\ \text{Cos.}I) \\ \quad + s\,r\,d\Lambda\,(\text{Sen.}\Delta\ \text{Cos.}\Lambda\ \text{Cos.}I - \text{Sen.}\Lambda\ \text{Cos.}\Delta) \\ \quad + s\,r\,d\Delta\,(\text{Sen.}\Lambda\ \text{Cos.}\Delta\ \text{Cos.}I - \text{Sen.}\Delta\ \text{Cos.}\Lambda) \end{array}\right\} = 0.$$

Onde reflectiremos, que Λ sempre depende de r, mas Δ naõ depende de Λ; nem de r, porque no caso presente devemos comparar cada hum dos pontos da orbita do Cometa com todos os pontos da orbita terrestre. Por isso igualaremos separadamente a nada o termo multiplicado por $d\Delta$, e teremos por primeira condiçaõ da minima distancia procurada $\text{Sen.}\Lambda\ \text{Cos.}\Delta\ \text{Cos.}I - \text{Sen.}\Delta\ \text{Cos.}\Lambda = 0$, que se reduz a $\text{Tg.}\Delta = \text{Tg.}\Lambda\ \text{Cos.}I$. E porque temos visto (*num.* 105), que esta equaçaõ pertence á conjuncçaõ, ou opposiçaõ do Cometa com o Sol, concluiremos, que sómente nestas circunstancias deve succeder a minima distancia, que buscamos.

110. Substituindo o valor de $\text{Cos.}I = \frac{\text{Tg.}\Delta}{\text{Tg.}\Lambda}$ nos outros termos da equaçaõ differencial, e reduzindo, acharemos

$$r\,dr + \frac{s\,dr\,\text{Cos.}\Lambda}{\text{Cos.}\Delta} + s\,r\,d\Lambda.\ \frac{\text{Sen.}(\Delta + \Lambda)\ \text{Sen.}(\Delta - \Lambda)}{\text{Sen.}\Lambda\ \text{Cos.}\Delta} = 0.$$

E advertindo, que $d\Lambda = dU$, e $dU = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{p}{r-p}}$ (*num.* 16) $= \frac{dr}{r}\,\text{Cot.}\frac{1}{2}U$, e $r = \frac{p}{\text{Cos.}^2\frac{1}{2}U}$, faremos a substituiçaõ d'estes valores, e reduzindo teremos por segunda condiçaõ da minima distancia a equaçaõ

p

$$p + \frac{s\,\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} U}{\text{Cof.}\,\Delta} \left(\text{Cof.}\Lambda + \frac{\text{Sen.}\,(\Delta + \Lambda)\ \text{Sen.}\,(\Delta - \Lambda)}{\text{Sen.}\,\Lambda\ \text{Tg.}\frac{1}{2} U}\right) = 0,$$

a qual juntamente com a outra Tg. Δ = Tg. Λ Cof. I fervirá de determinar Δ, e Λ, e confeguintemente U, que fe involve em Λ. E porque a minima diftancia deve fucceder perto dos nodos, quando he grande o angulo da inclinaçaõ; e quando he pequeno, perto dos pontos da orbita, onde o raio vector he igual á diftancia do Sol, he facil a efcolha dos valores hypotheticos de Λ, com os quaes fe determinará Δ pela fegunda equaçaõ, e depois fe verá o refultado da primeira, conforme o methodo das interpolações, que já deixámos praticado, advertindo-fe, que a efpecie de Λ e Δ deve fer de maneira, que os feus Cofenos tenhaõ final contrario.

111. Subftituindo tambem o valor de Cof. I na formula geral da diftancia, depois de acharmos Λ, e Δ, que fatisfaçaõ ás duas equações de condiçaõ, conheceremos mais facilmente a minima diftancia pela equaçaõ $x = \sqrt{\left(r^2 + s^2 + 2rs.\frac{\text{Cof.}\,\Lambda}{\text{Cof.}\,\Delta}\right)}$. A quantidade Δ nos moftrará o dia do anno, em que deveria fucceder effa minima diftancia; e fe foffe conhecido o tempo periodico, com a quantidade Λ achariamos, quando viria o Cometa neffe dia a achar-fe no ponto correfpondente da fua orbita.

112. Quando naõ fe procura a minima diftancia abfoluta, mas a que ha de ter lugar entre os dous corpos em huma revoluçaõ propofta, entaõ deveremos reduzir as differenças dr, $d\Lambda$, $d\Delta$, a huma fó. Significando T o movimento diurno medio do Sol, e τ o tempo corrido desde o perihelio, claro eftá, que ferá $d\Delta = Td\tau$, e a equaçaõ

$\tau = n\,(r+2p)\,\sqrt{(r-p)}$, dará $r\,dr = \dfrac{2\,d\tau\,\mathrm{Tg.}\frac{1}{2}U\sqrt{p}}{3n}$,

e conseguintemente $r\,d\Lambda = \dfrac{2\,d\tau\,\mathrm{Cos.}^2\frac{1}{2}U}{3n\sqrt{p}}$. Pelo que, substituindo estes valores na equaçaõ do *num.* 109, e reduzindo, teremos a equaçaõ seguinte:

$$\left.\begin{array}{l} p+s\,\mathrm{Cos.}^2\frac{1}{2}U\ (\mathrm{Cos.}\,\Delta\,\mathrm{Cos.}\,\Lambda + \mathrm{Sen.}\,\Delta\,\mathrm{Sen.}\,\Lambda\,\mathrm{Cos.}\,I) \\ +s\,\mathrm{Cos.}^2\frac{1}{2}U.\mathrm{Cot.}\frac{1}{2}U\,(\mathrm{Sen.}\,\Delta\,\mathrm{Cos.}\,\Lambda\,\mathrm{Cos.}\,I - \mathrm{Sen.}\,\Lambda\,\mathrm{Cos.}\,\Delta) \\ +\frac{3snT\sqrt{p^3}}{\mathrm{Sen.}\,U}\,(\mathrm{Sen.}\,\Lambda\,\mathrm{Cos.}\,\Delta\,\mathrm{Cos.}\,I - \mathrm{Sen.}\,\Delta\,\mathrm{Cos.}\,\Lambda) \end{array}\right\} = 0,$$

na qual todas as quantidades variaveis dependem do tempo, e assim se resolverá pelos methodos já indicados. Tornemos ao nosso proposito.

§. IX.

Exposiçaõ abbreviada da Soluçaõ do Problema.

113. Para maior commodidade dos calculos, que se haõ de fazer na determinaçaõ das Orbitas parabolicas dos Cometas, ajuntaremos aqui em huma recopilaçaõ geral todas as denominações, que havemos feito, e equações, que havemos demonstrado, pela mesma ordem, que ellas haõ de ter na execuçaõ, indicando summariamente o processo das operações.

114. Escolhidas tres observações de confiança, cujos intervallos naõ sejaõ muito pequenos, nem muito grandes, nem muito desiguaes, cahindo, quanto for possivel, em os pontos, onde o movimento do Cometa em longitude,

e latitude for mais ſenſivel, para o inſtante de cada huma d'ellas ſe calculará a longitude, e diſtancia do Sol. E aſſim ſeraõ conhecidas as tres longitudes do Cometa, que pela ordem das obſervações deſignaremos por l, l', l'', as latitudes por L, L', L'', as longitudes dos Sol por $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$; e as ſuas diſtancias á terra por s, s', s''; e deveremos achar as diſtancias do Cometa á terra x, x', x''.

115. Para iſſo, ſuppondo $l - \Sigma = A$, $l' - \Sigma' = A$, $l'' - \Sigma'' = A'$; $l'' - l = C$, $l' - l = C'$, $l'' - l' = C''$; $\Sigma'' - \Sigma = S$, $\Sigma' - \Sigma = S'$, $\Sigma'' - \Sigma' = S''$; calcularemos as quantidades ſeguintes:

$$\text{Tg.}B = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S}{s - s''\,\text{Coſ.}S} \qquad g = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S}{\text{Sen.}\,B},$$

$$\text{Tg.}B' = \frac{s'\,\text{Sen.}\,S'}{s - s'\,\text{Coſ.}S'} \qquad g' = \frac{s'\,\text{Sen.}\,S'}{\text{Sen.}\,B'},$$

$$\text{Tg.}B'' = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S''}{s' - s''\,\text{Coſ.}S''} \qquad g'' = \frac{s''\,\text{Sen.}S''}{\text{Sen.}\,B''},$$

$$a = 2s\,\text{Coſ.}L\,\text{Coſ.}A,\ f = 2(\text{Coſ.}L\,\text{Coſ.}L''\,\text{Coſ.}C + \text{Sen.}L\,\text{Sen.}L''),$$

$$a' = 2s'\,\text{Coſ.}L'\,\text{Coſ.}A,\ f' = 2(\text{Coſ.}L\,\text{Coſ.}L'\,\text{Coſ.}C' + \text{Sen.}L\,\text{Sen.}L'),$$

$$a'' = 2s''\,\text{Coſ.}L''\,\text{Coſ.}A',\ f'' = 2(\text{Coſ.}L'\,\text{Coſ.}L''\,\text{Coſ.}C'' + \text{Sen.}L'\,\text{Sen.}L''),$$

$$b = 2g\,\text{Coſ.}L\,\text{Coſ.}(A+B),\quad e = 2g'\,\text{Coſ.}L\,\text{Coſ.}(A+B'),$$

$$b' = 2g'\,\text{Coſ.}L'\,\text{Coſ.}(A+B'+C'),\quad e' = 2g''\,\text{Coſ.}L'\,\text{Coſ.}(A'+B''),$$

$$b'' = 2g''\,\text{Coſ.}L''\,\text{Coſ.}(A'+B''+C''),\quad e'' = 2g\,\text{Coſ.}L''\,\text{Coſ.}(A+B+C),$$

$$b = \frac{g\,\text{Sen.}\,(A+B+C)}{\text{Sen.}C''\,\text{Coſ.}L},\quad b' = \frac{g\,\text{Sen.}\,(A+B)}{\text{Sen.}\,C\,\text{Coſ.}\,L''}$$

$$x = \frac{g''\,\text{Sen.}\,(A'+B''+C'')}{\text{Sen.}\,C''\,\text{Coſ.}L'},\quad x' = \frac{g'\,\text{Sen.}\,(A+B')}{\text{Sen.}\,C'\,\text{Coſ.}L'}$$

$$q = \frac{s'\,\text{Sen.}\,(A+C'')}{\text{Sen.}\,C''\,\text{Coſ.}L'},\quad q' = \frac{s'\,\text{Sen.}\,(C'-A)}{\text{Sen.}\,C'\,\text{Coſ.}L'}$$

m

$$m = \frac{t \text{ Sen. } C'' \text{ Cof. } L'}{t'' \text{ Sen. } C \text{ Cof. } L}, \quad m' = \frac{t \text{ Sen. } C' \text{ Cof. } L'}{t' \text{ Sen. } C \text{ Cof. } L''},$$

$$\Theta = \frac{2 s'^3 \text{ Sen. } \frac{1}{2} S' \text{ Sen. } \frac{1}{2} S''}{\text{Cof. } \left(\frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S'' \right)}.$$

Onde nos lembraremos: Que havemos deſignado por t o intervallo de tempo deſde a primeira até a terceira obſervaçaõ, por t' o da primeira até a ſegunda, e por t'' o da ſegunda até a terceira, contados em dias, e partes decimaes de dia; que C, C', C'' ſaõ negativos, quando o movimento apparente do Cometa he retrogrado; que L, L', L'' ſe tomaõ negativamente, ſendo de denominaçaõ auſtral; que B, B', B'' ſempre ſaõ poſitivos, mas maiores que 90° quando o denominador da ſua Tangente for negativo; e que as mais quantidades teraõ o ſinal, que reſultar da ſua expreſſaõ, havendo reſpeito á regra dos ſinaes dos Senos, e Coſenos.

116. Suppondo tambem os raios vectores deſignados por r, r', r'', conforme a ordem das obſervações, teremos

$$r^2 = x(x - a) + s^2$$
$$r'^2 = x'(x' - a') + s'^2$$
$$r''^2 = x''(x'' - a'') + s''^2$$

$$\left. \begin{aligned} x &= b + m(x' - x) + \frac{\Theta m (q - x')}{r'^3} \\ x'' &= b' + m'(x' - x') + \frac{\Theta m' (q' - x')}{r'^3} \end{aligned} \right\} \text{proximamente.}$$

117. E havendo ſuppoſto $r + r'' = R$, $r + r' = R'$, e $r' + r'' = R''$, teremos

$$\omega = \sqrt{\left(1 - \frac{x\,(x - b) + x''(x'' + e'') - f\,x\,x'' + g^2}{R^2}\right)}$$

$$\omega' = \sqrt{\left(1 - \frac{x'\,(x' + b') + x\,(x - e) - f'\,x\,x' + g'^2}{R'^2}\right)}$$

$$\omega'' = \sqrt{\left(1 - \frac{x''\,(x'' + b'') + x'\,(x' - e') - f''\,x'\,x'' + g''^2}{R''^2}\right)}$$

118. Reflectindo tambem, que nas equações fundamentaes os termos da fórma $4 - 3\,\omega^2 - \omega^3$ se reduzem ao producto dos dous factores $(2 + \omega)^2$, e $(1 - \omega)$, os quaes entraõ tambem no calculo de outras quantidades, faremos agora $E = 1 - \omega$, $E' = 1 - \omega'$, $E'' = 1 - \omega''$; $F = 2 + \omega$, $F' = 2 + \omega'$, $F'' = 2 + \omega''$. E lembrando-nos que he o número constante $\phi = 0{,}0053264345$, cujo Logarithmo se acha 7.7264366, teremos as tres equações seguintes:

$$E\,F^2\,R^3 - \phi\,t^2 = 0$$

$$E'\,F'^2\,R'^3 - \phi\,t'^2 = 0$$

$$E''\,F''^2\,R''^3 - \phi\,t''^2 = 0.$$

119. Se tomarmos pois qualquer valor hypothetico de x', com elle acharemos r' pela segunda equaçaõ do *num.* 116, e depois x pela quarta proximamente, e r pela primeira. Com estas quantidades calcularemos ω' pela segunda equaçaõ do *num.* 117, e teremos todas as quantidades, que entraõ na segunda equaçaõ do *num.* precedente, a qual em lugar de se verificar dando nada no segundo membro, supponhamos que dá γ. Tomando outros dous valores hypotheticos de x' em progressaõ arithmetica com o primeiro, sendo a differença η, e praticando do mesmo modo, acharemos os resultados respectivos γ', γ''; e entaõ fazendo para abbreviar, $3\,\gamma - 4\,\gamma' + \gamma'' = G$, e $2\,(\gamma - 2\,\gamma' + \gamma'') = H$, te-

teremos a correcçaõ dx' do primeiro valor hypothetico de x', pela formula

$$dx' = \frac{\eta\left(G \pm \sqrt{(G^2 - 4\gamma H)}\right)}{H}.$$

120. Depois d'esta correcçaõ, se tomarmos outros tres valores hypotheticos em progressaõ arithmetica, e muito vizinhos do valor proximamente conhecido pela primeira operaçaõ, procedendo em tudo do mesmo modo, acharemos x' com a approximaçaõ sufficiente para o nosso intento; e com o valor de x', em que ficarmos, determinaremos x, e x'' pelas equações quarta, e quinta do *num.* 116. Os primeiros tres valores hypotheticos podem tomar-se 0,2; 0,6; 1, quando por circunstancias particulares naõ pareça tomarem-se de outro modo. Quem se contentar com as duas distancias x, x' deduzidas d'esta soluçaõ approximada, para determinar com ellas proximamente os elementos da orbita, naõ tem necessidade de calcular todas as quantidades subsidiarias, bastando entaõ das vinte e sete quantidades do *num.* 115 calcular sómente dezeseis, a saber B, B', B'', g, g', g'', a, a', b', f', e, b, $\varkappa$, q, m, Θ.

121. Com os valores approximados de x, x', x'' acharemos r, r', r'' (*num.* 116), e ω, ω', ω'' (*num.* 117), e applicando os valores achados ás equações rigorosas do *num.* 118, daraõ os resultados δ, δ', δ'' respectivamente, os quaes deveráõ ser quantidades muito pequenas. Entaõ fazendo

$$D = \frac{2x - a}{r}, \quad D' = \frac{2x' - a'}{r'}, \quad D'' = \frac{2x'' - a''}{r''},$$

$$\alpha = \frac{3}{2} R F (2x - b - f x'' + D R E),$$

$$\alpha' = \frac{3}{2} R' F' (2x' + b' - f' x + D' R' E'),$$

$$\alpha'' = \frac{3}{2} R'' F'' (2x'' + b'' - f'' x' + D' R'' E''),$$

$$\beta = \frac{3}{2} R'F'(2x - e - f'x' + D R'E'),$$

$$\beta' = \frac{3}{2} R''F''(2x' - e' - f''x'' + D' R''E''),$$

$$\beta'' = \frac{3}{2} R F (2x'' + e'' - f x + D''R E),$$

acharemos as correcções de x, x', x'' pelas equações feguintes

$$dx = -\frac{\alpha'\alpha''\delta + \beta'\beta''\delta' - \alpha'\beta''\delta''}{\alpha\alpha'\alpha'' + \beta\beta'\beta''}$$

$$dx' = -\frac{\beta dx + \delta'}{\alpha'},\ dx'' = -\frac{\alpha dx + \delta}{\beta''}.$$

122. Efta operaçaõ fe repetirá, quando parecer neceffario, que ferá todas as vezes que eftas primeiras correcções naõ forem muito pequenas. E onde fe parar, podem tambem corregir-fe as quantidades r, r'', R, ω, E, que haõ de fervir na determinaçaõ dos elementos, que he mais facil do que tornallas a calcular novamente, e teremos

$$dr = \frac{1}{2} D dx,\ dr'' = \frac{1}{2} D''dx'',\ dR = dr + dr''$$

$$d\omega = \frac{EFdR}{R\omega} + \frac{\delta}{3FR^3\omega},\ dE = -d\omega.$$

123. Igualmente podemos fatisfazer ás equações do *num.* 118 pelo methodo das interpolações. Com o valor proximo de x' bufcaremos x de maneira que fe verifique a fegunda equaçaõ do dito numero ufando da formula $dx = -\frac{\delta'}{\beta}$, e confervando o mefmo valor de x', bufcaremos a correcçaõ de x'', que fatisfaça á terceira ufando da formula $dx'' = -\frac{\delta''}{\alpha''}$. Applicando os valores de x, x'' á primeira equaçaõ do *num.* 118, dará hum refultado, que cha-

chamaremos y. E tomando outros dous valores de x' em progreſſaõ arithmetica com o primeiro, ſendo a differença η pouco differente das correcções dx, dx'', acharemos outros dous reſultados y', y'' da dita primeira equaçaõ, com as quaes acharemos dx' pela formula do *num.* 119.

124. Finalmente, ſendo conhecidas as diſtancias x, x'' com as quantidades que d'ellas dependem, acharemos por ſua ordem a diſtancia perihelia p, a anomalia U no tempo da primeira obſervaçaõ, o tempo desde o perihelio até á primeira obſervaçaõ τ, ou até á terceira τ'', a longitude do nodo N, a inclinaçaõ da orbita I, e a longitude do perihelio P, pelas formulas ſeguintes, depois de haver ſuppoſto para mais brevidade x Coſ. $L = \lambda$, x'' Coſ. $L'' = \lambda''$, x Sen. $L = \varpi$, x'' Sen. $L'' = \varpi''$, e lembrando-nos que Log. $n = 1.4378117$:

$$p = \frac{rr'' - \frac{1}{4} R^2 \omega^2}{ER}, \text{ Coſ. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}, \text{ ou Sen. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}};$$

$$\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r-p)}, \text{ ou } \tau'' = n(r'' + 2p)\sqrt{(r''-p)},$$

$$\text{Tg.}\, N = \frac{\varpi''(\lambda \text{ Sen.}\, l - s \text{ Sen.}\, \Sigma) - \varpi(\lambda'' \text{ Sen.}\, l'' - s'' \text{ Sen.}\, \Sigma'')}{\varpi(s'' \text{ Coſ.}\, \Sigma'' - \lambda'' \text{ Coſ.}\, l'') - \varpi''(s \text{ Coſ.}\, \Sigma - \lambda \text{ Coſ.}\, l)},$$

$$\text{Tg.}\, I = \frac{\varpi}{\lambda \text{ Sen.}\,(l - N) - s \text{ Sen.}\,(\Sigma - N)}$$

$$\text{Tg.}\,(P + U - N) = \frac{\varpi \cdot \frac{1}{\text{Sen.}\, I}}{\lambda \text{ Coſ.}\,(l - N) - s \text{ Coſ.}\,(\Sigma - N)};$$

advertindo-ſe, que τ ſerá additivo ao tempo da primeira obſervaçaõ para ter o do perihelio quando $r > r''$, ou τ'' ſubtractivo do tempo da terceira quando $r'' > r$; que o Cometa he retrogrado, quando a Tangente da inclinaçaõ ſahir negativa; que U muda de ſinal, quando a primeira obſervaçaõ cahir antes da paſſagem pelo perihelio nos Cometas directos, e depois nos retrogrados; e que os angulos N, e $P + U - N$ ſeraõ poſitivos, ou negativos confor-

forme o numerador da ſua Tangente; e agudos, ou obtuſos, conforme o denominador d'ella for poſitivo, ou negativo. Eis-aquí a theorica: paſſemos aos exemplos.

§. X.

Calculo da Orbita rigoroſamente parabolica de hum Cometa hypothetico.

125. Como a ſoluçaõ precedente he exacta, e geometrica, na ſuppoſiçaõ das orbitas rigoroſamente parabolicas, quaes naõ ſaõ as dos Cometas, e quaes naõ poderiaõ achar-ſe por meio das obſervações, ainda que realmente o foſſem, por haver ſempre da parte d'ellas alguma incerteza, que a arte dos obſervadores póde diminuir até certo ponto, ſem já mais a poder evitar de todo: daremos primeiramente hum exemplo ideal, fingindo hum Cometa directo, que movendo-ſe em huma parabola paſſaſſe pelo perihelio no anno de 1780 a 20 de Março $12^h\ 0'$ do tempo medio do meridiano de París, ſendo a diſtancia perihelia igual á unidade, a longitude do nodo $4^s\ 20^\circ$, a do perihelio $3^s\ 10^\circ$, e a inclinaçaõ 30°. Com eſtes elementos ſuppoſtos calcularemos pelo methodo do *num.* 99 os lugares d'elle para tres inſtantes dados, os quaes tomaremos como ſe foſſem obſervados, para d'elles virmos no conhecimento dos elementos. Aſſim ſuppomos as tres obſervações ſeguintes

1780. París.	*Temp. m.*		*Longit. do Comet.*					*Latitude.*			
Abril 10.	12^h	$0'$	- -	2^s	17°	$42'$	$50'',2$	- -	5°	$9'$	$59'',7$.*A.*
25.	12	0	- -	3	6	12	1 ,9	- -	2	16	21 ,8. *B*
Maio 16.	12	0	- -	3	28	52	26 ,8	- -	10	23	31 ,5. *B*

126. Fazendo pois os calculos do Sol para os inſtantes das obſervações, e preparando as quantidades do *num.* 115, teremos

$l =$	77° 42′ 50″,2	$\Sigma =$	21° 40′ 28″	Log. $s =$	0.001449
$l' =$	96 12 1 ,9	$\Sigma' =$	36 17 37	Log. $s' =$	0.003202
$l'' =$	118 52 26 ,8	$\Sigma'' =$	56 35 13	Log. $s'' =$	0.005258
$L =$	− 5° 9′ 59″,7	$A =$	56° 2′ 22″,2	$C =$	41° 9′ 36″,6
$L' =$	2 16 21 ,8	$A' =$	59 54 24 ,9	$C' =$	18 29 11 ,7
$L'' =$	10 23 31 ,5	$A'' =$	62 17 13 ,8	$C'' =$	22 40 24 ,9
$S =$	34° 54′ 45″	$B =$	73° 20′ 33″,7	Log. $g =$	9.781519
$S' =$	14 37 9	$B' =$	83 35 31 ,2	Log. $g' =$	9.408002
$S'' =$	20 17 36	$B'' =$	80 36 40 ,2	Log. $g'' =$	9.551227
$a =$	1,116423	$s^2 =$	1,006695	Log. $f =$	0.159128
$a' =$	1,009440	$s'^2 =$	1,014855	Log. $f' =$	0.274264
$a'' =$	0,925968	$s''^2 =$	1,024510	Log. $f'' =$	0.261984
$b =$	− 0,764200	$e =$	− 0,388292	$\Phi t^2 =$	6,903059
$b' =$	− 0,474477	$e' =$	− 0,548825	$\Phi t'^2 =$	1,198448
$b'' =$	− 0,670057	$e'' =$	− 1,173335	$\Phi t''^2 =$	2,348958
$h =$	0,151578	$h' =$	0,721952	Log. $m =$	0.003177
$\kappa =$	0,267129	$\kappa' =$	0,523052	Log. $m' =$	0.069891
$q =$	2,593521	$q' =$	− 2,103553	Log. $\Theta =$	8.661687

Onde ſe advertirá, que pomos os Logarithmos ſómente das quantidades, que ſe haõ de multiplicar no calculo das noſſas formulas; que uſamos dos Logarithmos á maneira dos Aſtronomos, dando a characteriſca o ás unidades, 9 ás decimas, 8 ás centeſimas &c.; e que quando pomos o ſinal — a hum Logarithmo naõ he porque elle ſeja negativo, mas porque o he o número a quem correſponde, para ſe ter conta com o ſinal do producto, conforme a regra conhecida.

127. As ultimas nove quantidades h, h' &c., que ſervem taõ ſómente para achar os primeiros valores approximados, naõ carecem de ſer calculadas com muito eſcrupulo; mas em todas as outras deve haver grande cuidado, tendo-ſe advertencia de uſar ao menos de huma caſa

decimal de mais tanto nos Logarithmos, como nos numeros, quando se tratar de averiguar com exactidaõ o resultado de algumas observações. Supposto pois o calculo das quantidades precedentes, busquemos os primeiros valores approximados de x, x', x'', por meio dos tres valores hypotheticos:

I.		II.		III.	
$x' =$	0,2	$x' =$	0,6	$x' =$	1
$lx' =$	9.301030	$lx' =$	9.778151	$lx' =$	0.000000
$lr' =$	9.965466	$lr' =$	9.943008	$lr' =$	0.001173
$lx =$	9.351023	$lx =$	9.794836	$lx =$	9.983578
$lr =$	9.953307	$lr =$	9.922365	$lr =$	9.966962
$lR' =$	0.260459	$lR' =$	0.233838	$lR' =$	0.285434
$lE' =$	7.984122	$lE' =$	8.067331	$lE' =$	8.040761
$lF' =$	0.475723	$lF' =$	0.475428	$lF' =$	0.475528
$\gamma =$	$-$ 0,677319	$\gamma' =$	$-$ 0,674002	$\gamma'' =$	$-$ 0,493563.

E com os resultados γ, γ', γ'', e a differença dos valores hypotheticos $\eta = 0,4$ neste caso, acharemos pela formula do *num.* 119, $dx' = + 0,1925 \pm 0,8716$; e servindo sómente neste caso o final $+$, será $dx' = 1,0641$, e conseguintemente $x' = 1,2641$; valor, que se chega já bastantemente para a verdade. Onde se verá a grande ventagem, que resulta da applicaçaõ do methodo das interpolações á resoluçaõ das nossas formulas. Porque, se com as duas primeiras hypotheses buscassemos o valor de x' pela regra de falsa posiçaõ, achariamos 81,87 com enorme apartamento da verdade; e se o buscassemos com as duas ultimas, achariamos 2,094, que dista mais do verdadeiro que qualquer das ditas hypotheses. Donde se vê, que as falsas posições saõ inuteis, em quanto por muitas, e laboriosas tentativas se naõ tem chegado bem perto do que se busca, e que o methodo das interpolações de hum só passo nos põe na vizinhança do que procuramos.

128.

128. Mas para rectificar o valor achado faremos outra operaçaõ, tomando os valores hypotheticos muito chegados ao que achamos, da maneira seguinte

I.		II.		III.	
$x' =$	$1{,}25$	$x' =$	$1{,}27$	$x' =$	$1{,}29$
$lx' =$	0.096910	$lx' =$	0.103804	$lx' =$	0.110590
$lr' =$	0.059555	$lr' =$	0.064485	$lr' =$	0.068545
$lx =$	0.072919	$lx =$	0.079543	$lx =$	0.086177
$lr =$	0.017761	$lr =$	0.022323	$lr =$	0.026996
$lR' =$	0.340189	$lR' =$	0.344945	$lR' =$	0.349298
$lE' =$	8.073928	$lE' =$	8.077295	$lE' =$	8.081919
$lF' =$	0.475402	$lF' =$	0.475389	$lF' =$	0.475369
$\gamma =$	$-0{,}088510$	$\gamma' =$	$-0{,}042582$	$\gamma'' =$	$+0{,}005344.$

Com estes resultados, e com a differença, que agora he $\eta = 0{,}02$, acharemos $dx' = 0{,}037672$, e conseguintemente $x' = 1{,}287672$. E porque he escusado continuar mais operações, com o valor de x' acharemos $x = 1{,}217128$, e $x'' = 1{,}506477$ proximamente (*num.* 120).

129. Agora passando a corregir estes valores approximados por meio das formulas rigorosas, calcularemos as quantidades seguintes (*num.* 121):

$lx =$	0.085336	$lr =$	0.026398	$lR =$	0.387518
$lx' =$	0.109805	$lr' =$	0.068855	$lR' =$	0.349175
$lx'' =$	0.177962	$lr'' =$	0.139266	$lR'' =$	0.406516
$lE =$	8.738082	$lF =$	0.469127	$\delta =$	$-0{,}002412$
$lE' =$	8.080339	$lF' =$	0.475375	$\delta' =$	$-0{,}000014$
$lE'' =$	8.201894	$lF'' =$	0.474812	$\delta'' =$	$+0{,}001113$
$lD =$	0.093463	$l\alpha =$	1.108615	$l\beta =$	0.638607
$lD' =$	0.125910	$l\alpha' =$	-0.182668	$l\beta' =$	0.685320
$lD'' =$	0.180253	$l\alpha'' =$	9.760363	$l\beta'' =$	$0.489251.$

E com as quantidades δ, α, β &c. acharemos as correc-

recções $dx = -0,000134$, $dx' = -0,000392$, $dx'' = +0,001339$, as quaes sendo applicadas ás quantidades respectivas, teremos $x = 1,216994$, $x' = 1,287280$, $x'' = 1,507816$.

130. Mas para mais nos chegarmos á exactidaõ, tornemos com estes valores correctos a repetir a operaçaõ, e teremos

$lx = 0.085289$ - -	$lr = 0.026364$ - -	$lR = 0.387684$
$lx' = 0.109673$ - -	$lr' = 0.068758$ - -	$lR' = 0.349108$
$lx'' = 0.178349$ - -	$lr'' = 0.139586$ - -	$lR'' = 0.406644$
$lE = 8.737725$ - -	$lF = 0.469134$ - -	$\delta = +0,000057$,
$lE' = 8.080517$ - -	$lF' = 0.475365$ - -	$\delta' = -0,000134$
$lE'' = 8.201315$ - -	$lF'' = 0.474814$ - -	$\delta'' = +0,000004$
$lD = 0.093408$ - -	$l\alpha = 1.107946$ - -	$l\beta = 0.639006$
$lD' = 0.125790$ - -	$l\alpha' = -0.183847$ - -	$l\beta' = 0.682048$
$lD'' = 0.180490$ - -	$l\alpha'' = 9.788516$ - -	$l\beta'' = 0.493788.$

Donde concluiremos novamente $dx = +0,000038$, $dx' = +0,000022$, $dx'' = -0,000176$; e applicando estas correcções ás quantidades respectivas, teremos $x = 1,217032$, $x' = 1,287302$, $x'' = 1,507640$; valores taõ correctos, que substituidos outra vez nas equações fundamentaes dariaõ os resultados $\delta = -0,000013$, $\delta' = +0,000001$, $\delta'' = -0,000009$, com os quaes he inutil buscar novas correcções, porque havendo usado nestes calculos de seis casas decimaes taõ sómente, naõ he certa a figura da quinta casa dos ditos resultados.

131. Corregindo tambem as quantidades, que haõ de entrar na determinaçaõ dos elementos, acharemos $lr = 0.026374$, $lr'' = 0.139544$, $lR = 0.387665$, $lE = 8.737787$, $\omega^2 = 0,8936412$. Com estas quantidades acharemos $lp = 9.999997$, e conseguintemente será a distancia perihelia $p = 0,999993$, e $\tau'' = 57^d,00014 = 57^d\ 0^h\ 0'\ 12''$, donde concluiremos a passagem pelo perihelio em 20 de Março ás

11^h

$11^h\ 59'\ 48''$. Se o Logarithmo de τ'' na ultima casa decimal tivesse de menos huma unidade, sería justamente $\tau''=57^d$, e a passagem pelo perihelio em 20 de Março ás 12^h; e por aqui se verá a necessidade de usar de mais casas decimaes, quando se quizer conhecer com grande exactidaõ o resultado de observações, que mereçaõ esse trabalho.

132. Em fim, calculando os termos do valor da Tangente de N (*num.* 124), acharemos o numerador d'ella $=+0{,}2710262$, e o denominador $=-0{,}3229927$, donde concluiremos $N=139^\circ\ 59'\ 58''$, e depois d'isso $I=+30^\circ\ 0'\ 1'',4$, sendo directo o movimento por sahir a inclinaçaõ positiva. E porque achamos $P+U-N=-11^\circ\ 54'\ 14''$, e $U=28^\circ\ 5'\ 51''$, será $P=99^\circ\ 59'\ 51''$. Assim teremos os elementos d'esta maneira:

Longitude do nodo ascendente	$4^s\ 19^\circ\ 59'\ 58''$
Longitude do perihelio	3 9 59 53
Inclinaçaõ da orbita	30 0 1
Logarithmo da distancia perihelia	9.999997
Passagem pelo perihel. Março	$11^h\ 59'\ 40''$ *temp.med.*
Movimento	Directo.

Os quaes concordaõ com os elementos suppostos (num. 125) com as tenuissimas differenças de 0,000003 no Logarithmo da distancia perihelia, de $12''$ de tempo na passagem pelo perihelio, de $2''$ na longitude do nodo, de $1''$ na inclinaçaõ da orbita, e de $7''$ na longitude do perihelio; differenças, que provém, como havemos dito, de naõ usarmos de mais casas decimaes.

133. Se nos contentassemos com os valores de x, x' da soluçaõ approximada do *num.* 128, e com elles determinassemos os elementos, pondo r', R', ϖ', λ', Σ', l', em vez de r', R', ϖ'', λ'', Σ'', l'' respectivamente nas formulas do *num.* 124, achariamos

Longitude do nodo afcendente	4^s 19° $59'$ $20''$
Longitude do perihelio	3 . 9 40 0
Inclinaçaõ	30 0 52
Logarithmo da diftancia perihelia	9.999897
Paffagem pelo perihel. Março	20^d 10^h $52'$ *temp.med.*
Movimento	Direĉto.

elementos, que naõ differem mais da verdade, do que coftumaõ differir entre fi os que faõ calculados por diverfos Aftronomos. E affim bem podemos nos cafos ordinarios ficar n'aquella foluçaõ approximada, que naõ requer tanto trabalho, como acima advertimos (*num.* 120).

§. XI.

Calculo da Orbita do Cometa de 1680.

134. Efte Cometa, que de todos os conhecidos he o que paffa mais perto do Sol no perihelio, e da orbita da terra no nodo afcendente, ou na vizinhança d'elle, veio em 1680 dar hum novo teftemunho a Newton da theorica dos movimentos dos corpos celeftes, que taõ felizmente havia defcuberto, e em cuja evoluçaõ occupava por aquelle tempo todas as forças do feu engenho. Como quem tinha nafcido para ler no grande livro do Univerfo os fegredos, que a natureza efcondeo por tantos feculos aos olhos mortaes, logo conheceo pelas obfervações d'aquelle Cometa, que elle, e todos os outros faõ corpos coevos ao mundo, que guardaõ as mefmas leis das forças centraes, fómente com a differença de andarem por trajectorias muito excentricas, e naõ ferem fenfiveis ao alcance da noffa vifta, fenaõ quando de diftancias remotiffimas fe chegaõ para o perihelio. E confiderando tambem, que hum pequeno arco de huma Orbita elliptica muito alongada na vizinhança do vertice, fe confunde fenfivelmen-

mente com huma parabola, logo alcançou que nos Cometas se podia com grande ventagem substituir esta curva em lugar d'aquella; e para a determinar por meio de tres observações ensinou huma construcçaõ, ainda que approximada, muito engenhosa, a qual elle mesmo executou por sua maõ em huma grande figura, para determinar os elementos approximados d'este famoso Cometa de 1680, que muitos com razaõ chamaõ o Cometa Newtoniano.

135. Para determinarmos pois a orbita d'este Cometa pelo cálculo das nossas formulas, usaremos das mesmas observações, de que se servio aquelle grande Geometra, as quaes saõ estas.

Londres. 1680.	*Estil. velh.*	*Longitude.*	*Latitude.*
Dezemb.	$21^d\ 6^h\ 36'\ 59''$	$10^s\ 5^\circ\ 8'\ 12''$	$21^\circ\ 42'\ 13''$ *B*
Janeiro	5 6 1 38	0 8 48 53	26 15 17 *B.*
	25 7 58 42	1 9 35 0	17 56 30 *B.*

E calculando os lugares do Sol pelas Taboas modernas, que tem mais exactidaõ, do que as que havia no tempo de Newton, teremos as quantidades seguintes:

$l =$	$-54^\circ 51' 48''$	$\Sigma =$	$-78^\circ 53' 22''$	$\text{Log.}\, s =$	9.992634
$l' =$	8 48 53	$\Sigma' =$	-63 38 13	$\text{Log.}\, s' =$	9.993034
$l'' =$	39 35 0	$\Sigma'' =$	-43 15 10	$\text{Log.}\, s'' =$	9.994253
$L =$	$21^\circ 42' 13''$	$A =$	$24^\circ 1' 34''$	$C =$	$94^\circ 26' 48''$
$L' =$	26 15 17	$A' =$	72 27 6	$C' =$	63 40 41
$L'' =$	17 56 30	$A'' =$	82 50 10	$C'' =$	30 46 7
$S =$	$35^\circ 38' 12''$	$B =$	$72^\circ 30' 50''$	$\text{Log.}\, g =$	9.780203
$S' =$	15 15 9	$B' =$	82 34 16	$\text{Log.}\, g' =$	9.416771
$S'' =$	20 23 3	$B'' =$	80 15 18	$\text{Log.}\, g'' =$	9.542536
$a =$	1,668681	$s^2 =$	0,966647	$\text{Log.}\, f =$	8.957946
$a' =$	0,532205	$s'^2 =$	0,968429	$\text{Log.}\, f' =$	0.027812
$a'' =$	0,234169	$s''^2 =$	0,973882	$\text{Log.}\, f'' =$	0.240247

$b = -0,127589$ ---	$e = -0,138577$ --	$\Phi t^2 = 6,546061$
$b' = -0,461561$ ---	$e' = -0,555929$ --	$\Phi t'^2 = 1,194528$
$b'' = -0,662394$ ---	$e'' = -1,126028$ --	$\Phi t''^2 = 2,147932$
$h = 0,124029$ ---	$h' = 0,631432$ --	$\mathrm{Log.}\, m = 9.936842$
$\kappa = 0,046080$ ---	$\kappa' = 0,311253$ --	$\mathrm{Log.}\, m' = 0.297526$
$q = 2,088091$ ---	$q' = -0,186731$ --	$\mathrm{Log.}\, \Theta = 8.651321$

136. E tomando os tres coſtumados valores hypotheticos de x', para a primeira operaçaõ da ſoluçaõ approximada, calcularemos as quantidades que ſe ſeguem:

I.		II.		III.	
$x' =$	0,2	$x' =$	0,6	$x' =$	1
$lx' =$	9.301030	$lx' =$	9.778151	$lx' =$	0.000000
$lr' =$	9.977600	$lr' =$	0.001968	$lr' =$	0.078611
$lx =$	9.240876	$lx =$	9.691504	$lx =$	9.905775
$lr =$	9.924525	$lr =$	9.794460	$lr =$	9.716794
$lR' =$	0.252903	$lR' =$	0.211522	$lR' =$	0.235370
$lE' =$	7.715050	$lE' =$	8.447898	$lE' =$	8.954006
$lF' =$	0.476370	$lF' =$	0.473042	$lF' =$	0.463900
$\gamma =$	$-0,927536$	$\gamma' =$	$-0,126587$	$\gamma'' =$	$+2,677302.$

E com os reſultados $\gamma, \gamma', \gamma''$, e a differença dos valores hypotheticos $\eta = 0,4$ calcularemos a formula do *num.* 119, que nos dará a correcçaõ do primeiro valor hypothetico $dx' = +0,04004 \pm 0,38703$; e ſendo inutil neſte caſo o ſinal $-$, teremos $dx = +0,42707$, e por conſeguinte $x' = 0,62707$ proximamente.

137. Mas para nos chegarmos mais para o verdadeiro valor de x', quanto permitte a approximaçaõ de huma das equaçöes, que aqui ſervem, tornaremos a repetir a operaçaõ, eſtreitando os limites das hypotheſes na vizinhança do valor achado

I.

I.		II.		III.	
$x' =$	0,62	$x' =$	0,63	$x' =$	0,64
$lx' =$	9.792392	$lx' =$	9.799341	$lx' =$	9.806180
$lr' =$	0.004909	$lr' =$	0.006427	$lr' =$	0.007977
$lx =$	9.704903	$lx =$	9.711451	$lx =$	9.717906
$lr =$	9.788606	$lr =$	9.785721	$lr =$	9.782867
$lR' =$	0.211117	$lR' =$	0.210976	$lR' =$	0.210876
$lE' =$	8.483462	$lE' =$	8.500792	$lE' =$	8.517815
$lF' =$	0.472692	$lF' =$	0.472511	$lF' =$	0.472326
$\gamma =$	$-$ 0,040552	$\gamma' =$	+ 0,004258	$\gamma'' =$	+ 0,050258.

donde femelhantemente concluiremos $dx' = +$ 0,009065, e $x' =$ 0,629065, e confeguintemente $x =$ 0,513859, e $x'' =$ 1,192514; valores, com os quaes determinariamos immediatamente a orbita, fe nos contentaffemos com a foluçaõ approximada.

138. Recorrendo porém ás formulas exačtas, para corrigirmos os valores precedentes, calcularemos as quantidades feguintes:

$lx =$	9.710844	$lr =$	9.785990	$lR =$	0.315093
$lx' =$	9.798696	$lr' =$	0.006284	$lR' =$	0.210990
$lx'' =$	0.076463	$lr'' =$	0.162832	$lR'' =$	0.392604
$lE =$	8.943622	$lF =$	0.464217	$\delta =$	+ 0,020454
$lE' =$	8.499177	$lF' =$	0.472528	$\delta' =$	+ 0,000019
$lE'' =$	8.207018	$lF'' =$	0.474782	$\delta'' =$	+ 0,011774
$lD =$	0.020843	$l\alpha =$	0.888268	$l\beta =$	0.504830
$lD' =$	9.854608	$l\alpha' =$	0.315119	$l\beta' =$	$-$ 0.407104
$lD'' =$	0.169780	$l\alpha'' =$	0.880826	$l\beta'' =$	1.125833.

e com δ, α, β, &c. pelas formulas do *num.* 121, acharemos $dx = +$ 0,000364, $dx' = -$ 0,000572, e $dx'' = -$ 0,001741; correcções, que fendo applicadas ás quantidades refpečtivas, daraõ $x =$ 0,514223, $x' =$ 0,628493, $x'' =$ 1,190773.

139. E contentando-nos com esta operação, buscaremos as correcções de r', r'', R, E, que serão $dr = -0{,}000191$, $dr'' = -0{,}001287$, $dR = -0{,}001478$, $dE = -0{,}000082$, e conseguintemente teremos Log. $r = 9.785853$, Log. $r'' = 0.162447$, Log. $R = 0.314782$, Log. $E = 8.943175$, $\omega^2 = 0{,}8322269$. Pelo que acharemos Log. $p = 7.796158$, $p = 0{,}006254$, e $\tau'' = 48{,}3358 = 48^d\, 8^h\, 3'\, 31''$. Donde se segue a passagem pelo perihelio a 7 de Dezembro ás $23^h\, 55'\, 11''$ do meridiano de Londres pelo estilo velho, que vem a ser a 18 de Dezembro ás $0^h\, 4'\, 53''$ do meridiano de París pelo estilo Gregoriano.

140. Para indagar o resto dos elementos, acharemos Log. $\lambda = 9.679218$, Log. $\lambda'' = 0.054169$, Log. $\varpi = 9.279124$, Log. $\varpi'' = 9.564448$, donde calculando o valor da Tangente de N, será o numerador $= -0{,}0552923$, e o denominador $= +\ 0{,}0020167$, e conseguintemente $N = -\ 87°\, 54'\, 40''$, que vem a ser o mesmo que $+\ 272°\, 5'\, 20''$. Do mesmo modo acharemos o valor de $I = 60°\, 46'\, 40''$, conhecendo ao mesmo tempo ser directo o movimento do Cometa na sua orbita, por sahir a Tangente d'este angulo positiva. Em fim acharemos $P + U - N = 159°\, 5'\, 53''$; e porque a anomalia correspondente á primeira observação he $U = 168°\, 23'\, 3''$, teremos $P = -\ 97°\, 11'\, 50''$, que vem a ser o mesmo que $262°\, 48'\, 10''$.

141. De todos estes calculos resultão pois os elementos da orbita d'este Cometa na fórma seguinte:

Longitude do nodo ascendente	9^s	2°	5′	20′	
Longitude do perihelio	8	22	48	10	
Inclinação		60	46	40	
Logarithmo da distancia perihelia		7.796188			
Passagem pelo perihel. Dez.	18^d	0^h	4′	53″	*temp. med.*
Movimento		Directo.			

os

os quaes concordaõ proximamente com os de Newton, e Halley, procedendo as pequenas differenças, que nelles ha, de tomarmos as posições, e distancias do Sol differentes, conforme as Taboas que depois d'ellas se aperfeiçoáraõ pela theorica, e pela observaçaõ.

§. XII.

Cálculo da Orbita do Cometa de 1759.

142. Para dar mais outro exemplo, tomemos o Cometa de 1759, que nos annaes da Astronomia ficará para sempre memoravel pela predicçaõ, que fez Halley da sua volta, e pelos calculos immensos, com que M. Clairaut collegio do modo possivel os effeitos, que deviaõ produzir as attracções de Jupiter, e Saturno sobre o tempo periodico d'elle na ultima revoluçaõ. Servir-nos-hemos para isso das observações referidas, e apuradas por M. de La-Lande nas Memorias da Academia de París do mesmo anno, que saõ da maneira seguinte:

París. 1759.	*Temp. m.*	*Longitude.*	*Latitude.*
Abril	$15^d\ 16^h\ 40'\ 23''$	$10^s\ 18^\circ\ 52'\ 12''$	$4^\circ\ 28'\ 44''$ *A*
Maio.	1 8 54 16	5 22 36 7	31 32 16 *A*
	21 9 28 38	5 7 31 51	15 3 16 *A*.

143. Calculando os lugares, e distancias do Sol para os tres instantes d'estas observações, e preparando as quantidades necessarias para a resoluçaõ da questaõ, teremos

$l = -41^\circ\ 7'\ 48''$ --- $\Sigma = 25^\circ 51'\ 5''$ -- $\text{Log.}\, s = 0.002016$
$l' = 172\ 36\ 7$ --- $\Sigma' = 41\ 5\ 49$ -- $\text{Log.}\, s' = 0.003801$
$l'' = 157\ 31\ 51$ --- $\Sigma'' = 60\ 23\ 55$ -- $\text{Log.}\, s'' = 0.005636$

$L = -\ 4^\circ\ 28'\ 44''$ --- $A = -66^\circ 58'\ 53''$ -- $C = -161^\circ\ 20'\ 21''$
$L' = -31\ 32\ 16$ --- $A' = 131\ 30\ 18$ -- $C' = -146\ 16\ 5$
$L'' = -15\ 3\ 16$ --- $A'' = 97\ 7\ 56$ -- $C'' = -15\ 4\ 16$

$S = 34^\circ 32' 50''$	-- $B = 73^\circ 39' 40''$	-- Log. g =	9.777559
$S' = 15\ 14\ 44$	-- $B' = 83\ 15\ 24$	-- Log. g' =	9.426700
$S'' = 19\ 18\ 6$	-- $B'' = 81\ 3\ 40$	-- Log. g'' =	9.530169
$a = 0{,}783301$	-- $s^2 = 1{,}009328$	-- Log. f =	-0.251314
$a' = -1{,}139564$	-- $s'^2 = 1{,}017658$	-- Log. f' =	-0.124372
$a'' = -0{,}242928$	-- $s''^2 = 1{,}026295$	-- Log. f'' =	0.269790
$b = 1{,}186995$	-- $e = 0{,}511258$	-- ϕt^2 =	6,788548
$b' = -0{,}292632$	-- $e' = -0{,}486966$	-- $\phi t'^2$ =	1,308952
$b'' = -0{,}624400$	-- $e'' = -1{,}047322$	-- $\phi t''^2$ =	2,135661
$h = 0{,}799000$	-- $h' = -0{,}219963$	-- Log. m =	0.092940
$\kappa = 0{,}459831$	-- $\kappa' = -0{,}158171$	-- Log. m' =	0.542614
$q = -4{,}076142$	-- $q' = -2{,}111874$	-- Log. Θ =	8.659801

144. E havendo feito a primeira operaçaõ com os tres valores hypotheticos coſtumados de x', aſſim como nos exemplos precedentes, e achando por ella que x' he proximamente 0,25, repetiremos a operaçaõ ſeguinte:

I.		II.		III.	
$x' =$	0,24	$x' =$	0,25	$x' =$	0,26
$lx' =$	9.380211	$lx' =$	9.397940	$lx' =$	9.414973
$lr' =$	0.064966	$lr' =$	0.067574	$lr' =$	0.070182
$lx =$	9.569114	$lx =$	9.586130	$lx =$	9.602465
$lr =$	9.966332	$lr =$	9.966230	$lr =$	9.966241
$lR' =$	0.319473	$lR' =$	0.320881	$lR' =$	0.322343
$lE' =$	8.160524	$lE' =$	8.208730	$lE' =$	8.254342
$lF' =$	0.475021	$lF' =$	0.474773	$lF' =$	0.474514
$\gamma =$	$-0{,}136798$	$\gamma' =$	$+0{,}012096$	$\gamma'' =$	$+0{,}171517$.

donde ſe collige $dx' = +0{,}009213$, e conſeguintemente $x' = 0{,}249213$, $x = 0{,}384430$, e $x'' = 0{,}964835$.

145.

145. Para resolver pois as equações rigorosas, ou buscar as correcções dos valores approximados de x, x', x'', que acabámos de achar, calcularemos as quantidades seguintes:

lx	$= 9.584817$ - -	lr	$= 9.966234$ - -	lR	$= 0.381223$
lx'	$= 9.396571$ - -	lr'	$= 0.067369$ - -	lR'	$= 0.320769$
lx''	$= 9.984453$ - -	lr''	$= 0.170380$ - -	lR''	$= 0.422952$
lE	$= 8.749962$ - -	lF	$= 0.468903$ - -	δ	$= -0,005314$
lE'	$= 8.205030$ - -	lF'	$= 0.474793$ - -	δ'	$= -0,000004$
lE''	$= 8.109480$ - -	lF''	$= 0.475254$ - -	δ''	$= -0,003380$
lD	$= -8.193363$ - -	$l\alpha$	$= 1.140393$ - -	$l\beta$	$= 0.741716$
lD'	$= 0.146942$ - -	$l\alpha'$	$= 0.855183$ - -	$l\beta'$	$= -0.956567$
lD''	$= 0.166600$ - -	$l\alpha''$	$= 1.024392$ - -	$l\beta''$	$= 1.273343.$

as quaes nos daraõ as correcções procuradas $dx = -0,000475$, $dx' = +0,000366$, $dx'' = +0,000633$; e teremos conseguintemente $x = 0,383955$, $x' = 0,249579$, $x'' = 0,965468$.

146. E ficando nos valores antecedentes, que com effeito satisfazem ás equações fundamentaes até os limites, onde chega a exactidaõ das nossas operações numericas, corrigiremos as outras quantidades, de que depende a determinaçaõ dos elementos. E acharemos $dr = +0,0000037$, $dr'' = +0,0004645$, $dR = +0,0004682$, $dE = +0,0000117$. Donde se conclue Log. $r = 9.966236$, Log. $r'' = 0.170516$, Log. $R = 0.381308$, Log. $E = 8.750050$, e $\omega = 1 - E = 0,9437594$. Com estas quantidades achamos Log. $p = 9.777257$, e conseguintemente $p = 0,598766$, e $\tau'' = 68^d\ 22^h\ 28'\ 7''$; donde resulta a passagem pelo perihelio a 13 de Março ás $11^h\ 0'\ 31''$.

147. Para concluir os mais elementos, teremos Log. $\lambda = 9.582952$, Log. $\lambda'' = 9.969571$; Log. $\varpi = -8.476886$, $l\varpi'' = -9.399271$, e acharemos $N = 54^\circ\ 9'\ 41''$, e $I =$

— 17° 27′ 55″; conhecendo ser o Cometa retrogrado, por sahir a inclinaçaõ, ou a sua Tangente negativa. Finalmente acharemos $P + U - N = 173° 48' 4''$, e $U = 72° 52' 54''$; e reflectindo, que a anomalia *U* deve mudar de sinal, por ser a primeira observaçaõ, á qual corresponde, depois da passagem pelo perihelio em Cometa retrogrado, será $P = 300° 50' 39''$. Do que tudo resultaõ os elementos seguintes:

Longitude do nodo ascendente	1^s	24°	9′	41″
Longitude do perihelio	10	0	50	39
Inclinaçaõ		17	27	55
Logarithmo da distancia perihelia		9.777257		
Passagem pelo perihel. Març.	13^d	11^h	0′	31″ *temp. med.*
Movimento		Retrogrado.		

148. Estes elementos naõ devem comparar-se com os que andaõ na Taboa dos Cometas, porque esses foraõ deduzidos na supposiçaõ de huma orbita elliptica, cujo eixo se determinou pelo tempo periodico, conforme a regra de *Kepler*. Devem confrontar-se com outros elementos parabolicos, como saõ os de *Klinkenberg*, referidos nas Memorias da Academia de París, A. 1760, dos quaes naõ differem mais, do que entre si discrepaõ os elementos ellipticos calculados pelo mesmo Author, e pelos grandes Astronomos *La Caille*, *Maraldi*, e *Lalande*.

149. Mas a melhor comparaçaõ, que póde fazer-se, he com as observações. Calculando sobre os nossos elementos os lugares do Cometa para os tres instantes d'ellas, achamos $l = -41° 7' 52''$, $l' = 172° 36' 12''$, $l'' = 157° 31' 50''$; $L = -4° 28' 45''$, $L' = -31° 32' 52''$, $L'' = -15° 3' 15''$; resultados, que differem das observações muito menos, do que póde ser a incerteza d'ellas, confessando hum dos mais habeis Observadores *M. de La Caille*, que este Cometa se mostrou sempre escuro, e confuso, e que as posições d'elle se naõ podiaõ dar por seguras, senaõ nos minutos, naõ sen-

ſendo para admirar, que obſervações feitas ao meſmo tempo differiſſem 2′ entre ſi (Mem. 1760, pag. 60).

150. Se calcularmos porém pelos meſmos elementos o lugar do Cometa para hum tempo bem diſtante das obſervações, donde elles ſe deduzíraõ, acharemos que a 28 de Janeiro $6^h\ 28'\ 22''$, deveria ter a longitude $11^s\ 19^\circ\ 45'\ 43''$, e a latitude boreal $5^\circ\ 36'\ 15''$. Mas pela obſervaçaõ de M. *Meſſier* foi a longitude $11^s\ 20^\circ\ 46'\ 49''$, e a latitude $5^\circ\ 3'\ 46''$, com differenças exorbitantes, e que excedem muito a incerteza, que podia haver nas obſervações de taõ habil Aſtronomo. Procede iſto da inflexaõ do orbe elliptico, que ſe faz já ſenſivel n'aquella diſtancia, e que ſe determinará do modo, que moſtraremos na Segunda Parte.

ME-

MEMORIA

Sobre algumas propriedades dos Coefficientes dos termos do Binomio Newtoniano.

POR FRANCISCO DE BORJA GARÇAÕ STOCKLER.

Theorema I.

Lida em 22 de Novembro de 1797.

A Somma dos coefficientes dos termos do binomio $(1-x)^n$ depois de desenvolvido em serie he nulla sendo n numero inteiro positivo.

Demonstraçaõ.

Desenvolvendo $(1-x)^n$ em serie, teremos

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \&c.$$

mas suppondo $x=1$ fica

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c. = 0$$

Advertencia.

Quando pelo decurso d'esta Memoria tivermos de fallar da somma dos termos d'esta serie a designaremos pela letra A.

Theorema II.

Se os termos da serie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes, a saber, o primeiro por n, o segundo por $(n-1)$, o terceiro por $(n-2)$, e assim suc-

ſucceſſivamente a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 1, e ſerá $= 1$, ſendo $n = 1$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$$

$$n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$n - \frac{n(n-1)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.$$

cuja ſomma repreſento por A'', e a qual ſe reduz a

$$n\left(1 - \frac{(n-1)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.\right)$$

iſto he, a n multiplicado pela ſomma dos termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1 - x)^{n-1}$ a qual repreſento por B, e por tanto ſerá

$$A'' = nB.$$

Mas, ſendo n numero inteiro poſitivo > 1, hé $(n - 1)$ numero inteiro poſitivo, e por tanto pelo Theorema antecedente he $B = 0$, donde ſe deduz, que he tambem $A'' = 0$: mas ſendo $n = 1$, he $B = 1$, e por conſequencia vem a ſer neſte caſo particular

$$A'' = 1.$$

Theorema III.

Se os termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos quadrados dos numeros naturaes, a ſaber, o primeiro por n^2, o ſegundo por $(n - 1)^2$, o terceiro por $(n - 2)^2$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſe-

serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 2; e será $= 2 . 1$, sendo $n = 2$.

Demonstração.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 . 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 \qquad + (n-4)^2 \qquad + \&c.$$

se obtem a serie

$$n^2 - \frac{n(n-1)^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2}{1 . 2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1 . 2 . 3} + \&c.$$

cuja somma represento por $A^{2'}$. Esta serie se obteria tambem multiplicando ordenadamente as duas seguintes

$$n - \frac{n(n-1)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3} + \&c.$$

$$n + (n-1) \quad + (n-2) \qquad + (n-3) \qquad + \&c.$$

e por tanto evidentemente se resolve nas duas seguintes

$$n^2 - \frac{n^2(n-1)}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)}{1 . 2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3} + \&c.$$

$$n(n-1) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= nA^{1'}$, e a da segunda he $= n\underset{(1)}{A}^{1'}$, representando por $\underset{(1)}{A}^{1'}$ a somma dos termos da serie, em que se converteria aquella, cuja somma he $A^{1'}$, se em cada hum dos seus termos se escrevesse $(n - 1)$ em lugar de n. D'aquí se deduz

$$A^{2'} = n\left(A^{1'} + \underset{(1)}{A}^{1'}\right)$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 2, cada huma d'estas sommas $A^{1'}$, e $\underset{(1)}{A}^{1'}$ he nulla pelo Theorema ante-

ce-

cedente, e por conſequencia ſerá tambem $A^{2'} = 0$. Mas pelo meſmo Theorema, ſendo $n = 2$, he $A^{1'} = 0$, e $A^{1'}_{(1)} = 1$. Logo neſte caſo particular ſerá

$$A^{2'} = 2 \cdot 1.$$

Advertencia.

D'aquí em diante por evitar repetições, quando dada huma ſerie qualquer, e eſcolhida huma letra para repreſentar a ſomma dos ſeus termos, houvermos de tratar da ſomma da ſerie, que ſe obteria ſubſtituindo em cada hum dos meſmos termos $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ou em geral $(n-k)$ em lugar de n, repreſentaremos a dita ſomma pela meſma letra, por que ſe houver repreſentado a ſomma da ſerie primitiva, pondo-lhe por baixo o numero k fechado entre parentheſis. Aſſim por exemplo para repreſentar a ſomma dos termos da ſerie, que ſe obteria ſubſtituindo, $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ou em geral $(n-k)$ em lugar de n em cada hum dos termos da ſerie, cuja ſomma he $A^{2'}$, eſcreveremos $A^{2'}_{(1)}$, $A^{2'}_{(2)}$, $A^{2'}_{(3)}$, ou $A^{2'}_{(k)}$; e aſſim em todos os outros caſos.

Theorema IV.

Se os termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ ſe multiplicarem ordenedamente pelos termos da ſerie dos cubos dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n^3, o ſegundo por $(n-1)^3$, o terceiro por $(n-2)^3$; e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 3, e ſerá $= 3.2.1$, ſendo $n = 3$.

Demonſtração.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3 \qquad + (n-4)^3 \qquad + \&c.$$

se obtem a serie

$$n^3 - \frac{n(n-1)^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{1.2.3} + \&c.$$

cuja somma represento por $A^{3\prime}$, e que por hum artificio semelhante, ao que praticamos em a Demonstraçaõ do Theorema antecedente, se reconhece poder resolver-se nas duas seguintes

$$n^3 - \frac{n^2(n-1)^2}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{1.2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2.3} + \&c.$$

$$n(n-1)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= n\,A^{2\prime}$, e a da segunda $= n \underset{(1)}{A^{2\prime}}$, donde se segue que he

$$A^{3\prime} = n\left(A^{2\prime} + \underset{(1)}{A^{2\prime}}\right)$$

porém sendo n numero inteiro positivo > 3, he $(n-1)$ numero inteiro positivo > 2, e por tanto pelo Theorema antecedente he $A^{2\prime} = 0$, e $\underset{(1)}{A^{2\prime}} = 0$; donde se conclue que he tambem $A^{3\prime} = 0$. Mas sendo $n = 3$, he $n - 1 = 2$, e pelo mesmo Theorema he $A^{2\prime} = 0$, e $\underset{(1)}{A^{2\prime}} = 2.1$, valores que substituidos na expressaõ de $A^{3\prime}$ mostraõ ser neste caso particular.

$$A^{3\prime} = 3.2.1.$$

Theorema V.

Se os termos de serie dos coefficientes do binomio $(1-n)^n$ se multiplicarem ordenadamente pelos termos da se-

ſerie das quartas potencias dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n^4, o ſegundo por $(n-1)^4$, o terceiro por $(n-2)^4$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo >4, e ſerá $=4.3.2.1$, ſendo $n=4$.

Demonſtração.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}-\&c.$$

$$n^4+(n-1)^4+(n-2)^4+(n-3)^4 \qquad +(n-4)^4 \qquad +\&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$n^4-\frac{n(n-1)^4}{1}+\frac{n(n-1)(n-2)^4}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4}{1.2.3}+\&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A^{4\prime}$, e que pelo meſmo artificio praticado nas Demonſtrações dos Theoremas antecedentes ſe moſtra poder reſolver-ſe nas duas

$$n^4-\frac{n^2(n-1)^3}{1}+\frac{n^2(n-1)(n-2)^3}{1.2}-\frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^3}{1.2.3}+\&c.$$

$$n(n-1)^3-\frac{n(n-1)(n-2)^3}{1}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{1.2}-\&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $=n\,A^{3\prime}$, e a da ſegunda $=n\,\underset{(1)}{A^{3\prime}}$, donde ſe ſegue que he

$$A^{4\prime}=n\left(A^{3\prime}+\underset{(1)}{A^{3\prime}}\right)$$

porém, ſendo n numero inteiro poſitivo >4, he $n-1$ numero inteiro poſitivo >3, e por tanto he pelo Theorema antecedente $A^{3\prime}=0$, e $\underset{(1)}{A^{3\prime}}=0$, e por conſequencia tambem $A^{4\prime}=0$. Mas ſendo $n=4$, he $n-1=3$, e pelo

lo mesmo Theorema he $A^{3'} = 0$, e $\underset{(1)}{A^{3'}} = 3.2.1$, valores que substituidos na expressaõ de $A^{4'}$ mostraõ, que he neste caso particular

$$A^{4'} = 4.3.2.1.$$

Corollario.

Attendendo á natureza e processo das Demonstrações dos Theoremas precedentes, se póde concluir em geral por huma bem clara inducçaõ. » Que multiplicando ordenada- » mente os termos da serie dos coefficientes do binomio » $(1 - x)^n$ pelos termos da serie das potencias de hum » gráo qualquer m dos numeros naturaes; a saber, o pri- » meiro por n^m, o segundo por $(n-1)^m$, o terceiro por » $(n-2)^m$, e assim successivamente, a somma dos ter- » mos da serie

$$n^m - \frac{n(n-1)^m}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^m}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^m}{1.2.3} + \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações, a qual representaremos » por $A^{m'}$, será nulla, sendo n numero inteiro positivo $> m$, » e que, sendo $m = n$, será

$$n^n - \frac{n(n-1)^n}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^n}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^n}{1.2.3} + \&c.$$

» ou

$$A^{n'} = n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1.$$

» isto he, que multiplicando ordenadamente a serie dos » coefficientes do binomio $(1 - x)^n$, em que o expoente » n he numero inteiro positivo, pelos termos da serie das » potencias do gráo n dos numeros naturaes, a somma dos » termos da serie resultante d'estas multiplicações será » igual ao producto de todos os numeros naturaes desde » 1 até n. »

Ap-

Applicaçaõ.

Na Memoria ſobre os verdadeiros principios do Methodo das Fluxões, impreſſa no primeiro tomo d'eſta Collecçaõ, demonſtramos que, repreſentando φ huma funçaõ qualquer de qualquer numero de quantidades fluentes, e $F\varphi$ huma funçaõ qualquer de φ, ſerá, ſuppondo $d\varphi$ conſtante,

$$d^n F\varphi = \frac{F(\varphi + ntd\varphi) - \frac{n}{1}F(\varphi + (n-1)td\varphi) + \frac{n(n-1)}{1.2}F(\varphi + (n-2)td\varphi) \ldots \pm F\varphi}{t^n (0)}$$

Formula em que o denominador $t^n(0)$ ſignifica, que ſe deve dividir o numerador por t^n, e depois de feita a diviſaõ ſuppôr $t = 0$. He bem ſabido que, ſuppondo que em $F\varphi$ ſe eſcreve $\varphi + \omega$ em lugar de φ, $F\varphi$ ſe converte em $F(\varphi + \omega)$, e que deſinvolvendo eſta Funçaõ em ſerie ſe tem

$$F(\varphi + \omega) = F\varphi + P^{1\prime}\omega + P^{2\prime}\omega^2 + P^{3\prime}\omega^3 + P^{4\prime}\omega^4 + \&c.$$

ſendo $P^{1\prime}$, $P^{2\prime}$, $P^{3\prime}$, &c. Funções de φ independentes de ω; por tanto ſe fizermos ſucceſſivamente $\omega = ntd\varphi$; $\omega = (n-1)td\varphi$; $\omega = (n-2)td\varphi$, e aſſim por diante até $\omega = td\varphi$ acharemos

$$F(\varphi + ntd\varphi) = \ldots\ldots F\varphi + nP^{1\prime}td\varphi + n^2 P^{2\prime}t^2 d\varphi^2 + \&c.$$

$$-nF(\varphi + (n-1)td\varphi) = \ldots -n\left(F\varphi + (n-1)P^{1\prime}td\varphi + (n-1)^2 P^{2\prime}t^2 d\varphi^2 + \&c.\right)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}F(\varphi + (n-2)td\varphi) = \frac{n(n-1)}{1.2}\left(F\varphi + (n-2)P^{1\prime}td\varphi + (n-2)^2 P^{2\prime}t^2 d\varphi^2 + \&c.\right)$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}F(\varphi + (n-3)td\varphi) = -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\left(F\varphi + (n-3)P^{1\prime}td\varphi + (n-3)^2 P^{2\prime}t^2 d\varphi^2 + \&c.\right)$$

ſuppondo feitas as multiplicações indicadas em os ſegundos membros d'eſtas expreſsões, e ſommando todos os termos, que ficaõ em huma meſma columna, teremos

$$t^n d^n F\varphi = AF\varphi + A^{1\prime}P^{1\prime}td\varphi + A^{2\prime}P^{2\prime}t^2 d\varphi^2 + \ldots + A^{n\prime}P^{n\prime}t^n d\varphi^n + \&c.$$

Mas pelo Theor. I. he $A = 0$, e pelo Corollario antecedenceden-

lo mesmo Theorema he $A^{3'}=0$, e $\underset{(1)}{A}^{3'}=3.2.1$, valores que substituidos na expressaõ de $A^{4'}$ mostraõ, que he neste caso particular

$$A^{4'}=4.3.2.1.$$

Corollario.

Attendendo á natureza e processo das Demonstrações dos Theoremas precedentes, se póde concluir em geral por huma bem clara inducçaõ. » Que multiplicando ordenada-» mente os termos da serie dos coefficientes do binomio » $(1-x)^n$ pelos termos da serie das potencias de hum » gráo qualquer m dos numeros naturaes; a saber, o pri-» meiro por n^m, o segundo por $(n-1)^m$, o terceiro por » $(n-2)^m$, e assim successivamente, a somma dos ter-» mos da serie

$$n^m-\frac{n(n-1)^m}{1}+\frac{n(n-1)(n-2)^m}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^m}{1.2.3}+\&c.$$

» resultante d'estas multiplicações, a qual representaremos » por $A^{m'}$, será nulla, sendo n numero inteiro positivo $>m$, » e que, sendo $m=n$, será

$$n^n-\frac{n(n-1)^n}{1}+\frac{n(n-1)(n-2)^n}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^n}{1.2.3}+\&c.$$

» ou

$$A^{n'}=n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1.$$

» isto he, que multiplicando ordenadamente a serie dos » coefficientes do binomio $(1-x)^n$, em que o expoente » n he numero inteiro positivo, pelos termos da serie das » potencias do gráo n dos numeros naturaes, a somma dos » termos da serie resultante d'estas multiplicações será » igual ao producto de todos os numeros naturaes desde » 1 até n. »

Applicaçaõ.

Na Memoria ſobre os verdadeiros principios do Methodo das Fluxões, impreſſa no primeiro tomo d'eſta Collecçaõ, demonſtramos que, repreſentando φ huma funçaõ qualquer de qualquer numero de quantidades fluentes, e $F\varphi$ huma funçaõ qualquer de φ, ſerá, ſuppondo $d\varphi$ conſtante,

$$d^n F\varphi = \frac{F(\varphi+ntd\varphi) - \frac{n}{1}F(\varphi+(n-1)td\varphi) + \frac{n(n-1)}{1.2}F(\varphi+(n-2)td\varphi) \ldots \pm F\varphi}{t^n\,(o)}$$

Formula em que o denominador $t^n\,(o)$ ſignifica, que ſe deve dividir o numerador por t^n, e depois de feita a deviſaõ ſuppôr $t=o$. He bem ſabido que, ſuppondo que em $F\varphi$ ſe eſcreve $\varphi+\omega$ em lugar de φ, $F\varphi$ ſe converte em $F(\varphi+\omega)$, e que deſinvolvendo eſta Funçaõ em ſerie ſe tem

$$F(\varphi+\omega) = F\varphi + P^{1\prime}\omega + P^{2\prime}\omega^2 + P^{3\prime}\omega^3 + P^{4\prime}\omega^4 + \&c.$$

ſendo $P^{1\prime}$, $P^{2\prime}$, $P^{3\prime}$, &c. Funções de φ independentes de ω; por tanto ſe fizermos ſucceſſivamente $\omega = ntd\varphi$; $\omega = (n-1)td\varphi$; $\omega = (n-2)td\varphi$, e aſſim por diante até $\omega = td\varphi$ acharemos

$$F(\varphi+ntd\varphi) = \ldots\ldots\; F\varphi + \quad nP^{1\prime}td\varphi + n^2 P^{2\prime} t^2 \ldots$$

$$-nF(\varphi+(n-1)td\varphi) = \ldots\; -n\Big(F\varphi+(n-1)P^{1\prime}td\varphi+(n-1)^2 \ldots$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}F(\varphi+(n-2)td\varphi) = \frac{n(n-1)}{1.2}\Big(F\varphi+(n-2)P^{1\prime}td\varphi+(n-2)^2 \ldots$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}F(\varphi+(n-3)td\varphi) = -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\Big(F\varphi+(n-3)P^{1\prime}td\varphi+ \ldots$$

ſuppondo feitas as multiplicações indicadas em os ſegundos membros d'eſtas expreſsões, e ſommando todos os termos, que ficaõ em huma meſma columna, teremos

$$t^n d^n F\varphi = AF\varphi + A^{1\prime}P^{1\prime}td\varphi + A^{2\prime}P^{2\prime}t^2 d\varphi^2 + \ldots + A \ldots$$

Mas pelo Theor. I. he $A=o$, e pelo Corollario ...

cedente cada huma das Funções $A^{1'}$, $A^{2'}$, $A^{3'}$, &c. até $A^{(n-1)'}$ he nulla; e he $A^{n'} = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n$. Logo fubftituindo eftes valores nos feus competentes lugares, dividindo por t^n, e fuppondo depois $t = 0$, ficará

$$d^n F\varphi = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n.P^{n'} d\varphi^n.$$

Formula da qual, fuppondo fucceffivamente $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; &c. fe deduz

$$d\,F\varphi = P^{1'} d\varphi.$$
$$ddF\varphi = 1.2.P^{2'} d\varphi^2.$$
$$d^3F\varphi = 1.2.3.P^{3'} d\varphi^3.$$
$$d^4F\varphi = 1.2.3.4.P^{4'} d\varphi^4.$$
$$d^5F\varphi = 1.2.3.4.5.P^{5'} d\varphi^5.$$
&c.

e que por tanto moftra fer

$$P^{1'} = \frac{dF\varphi}{d\varphi}$$
$$P^{2'} = \frac{ddF\varphi}{1.2d\varphi^2}$$
$$P^{3'} = \frac{d^3F\varphi}{1.2.3.d\varphi^3}$$
$$P^{4'} = \frac{d^4F\varphi}{1.2.3.4.d\varphi^4}$$
- - - - -
- - - - -
$$P^{n'} = \frac{d^nF\varphi}{1.2.3\ldots(n-1)n}$$

valores, que fubftituidos na Formula

$$F(\varphi + \omega) = F\varphi + P^{1'}\omega + P^{2'}\omega^2 + P^{3'}\omega^3 + P^{4'}\omega^4 + \&c.$$

a reduzem a

$F(\varphi+\omega)$

$$F(\varphi+\omega) = F\varphi + \frac{\omega dF\varphi}{d\varphi} + \frac{\omega^2 ddF\varphi}{1.2.d\varphi^2} + \frac{\omega^3 d^3 F\varphi}{1.2.3.d\varphi^3} + \&c.$$

que he justamente a Formula de Taylor, cuja demonstraçaõ indicamos em a já citada Memoria, por meio de huma inducçaõ menos luminosa sim do que a presente, mas que além de naõ diferir d'ella essencialmente, tem a ventagem de ser mais breve.

Theorema VI.

Se os termos da serie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros triangulares; a saber, o primeiro por $\frac{n(n-1)}{2}$, o segundo por $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, o terceiro por $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, e assim successivamente, a somma da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 2, e será $= 1$, sendo $n = 2$.

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por $A1$, a qual se reduz a

$$\frac{n}{1}\left((n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} + \&c.\right)$$

e por tanto será

$$A1 = \frac{1}{2} n \overset{1'}{\underset{(1)}{A}}$$

Porem, ſendo n numero inteiro poſitivo > 2, he $(n-1)$ numero inteiro poſitivo > 1, e por conſequencia (Theor. II.) $\underset{(1)}{A''} = 0$; logo tambem $A1 = 0$. Mas ſendo $n = 2$, he $(n-1) = 1$; e pelo meſmo Theorema he $\underset{(1)}{A''} = 1$, valor que ſubſtituido na expreſſaõ de $A1$, moſtra que he neſte caſo particular

$$A1 = \frac{2.1}{2}.$$

Theorema VII.

Se os termos da ſerie, que reſulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da ſerie dos numeros triangulares, ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n, o ſegundo por $(n-1)$, o terceiro por $(n-2)$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicaçóes ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 3, e ſerá $= \frac{3.2.1}{2}$, ſendo $n = 3$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A1''$, e a qual ſe reſolve evidentemente nas duas

$$\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.1.2} + \&c.$$

a ſom-

a somma da primeira das quaes he $= nA1$, e a da segunda $= n \underset{(1)}{A1}$, donde se conclue que he

$$A1'' = n\left(A1 + \underset{(1)}{A1}\right)$$

porém cada huma d'estas sommas $A1$ e $\underset{(1)}{A1}$, he nulla pelo Theorema antecedente, sendo n numero inteiro positivo > 3, e por consequencia he tambem $A1'' = 0$. Mas sendo sendo $n = 3$ he $n - 1 = 2$, e pelo mesmo Theorema antecedente he $A1 = 0$, e $\underset{(1)}{A1} = \frac{2.1}{2}$: logo neste caso particular será

$$A1'' = \frac{3.2.1}{2}.$$

Theorema VIII.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n^2, o segundo por $(n-1)^2$, o terceiro por $(n-2)^2$; e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 4, e será $= \frac{4.3.2.1}{2}$ sendo $n = 4$.

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^3(n-1)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja

cuja fomma reprefento por $\overset{2\prime}{A1}$, e a qual fe refolve nas duas

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)}{2.1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)}{2.1.2} - \&c.$$

a fomma da primeira das quaes he $= n\overset{1\prime}{A1}$, e da fegunda $= n \underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}}$, donde fe conclue que he

$$\overset{2\prime}{A1} = n\left(\overset{1\prime}{A1} + \underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}}\right)$$

Porém, fendo n numero inteiro pofitivo > 4, he $(n-1)$ numero inteiro pofitivo > 3, e pelo Theorema antecedente he $\overset{1\prime}{A1} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}} = 0$, e por confequencia tambem $\overset{1\prime}{A1} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}} = \frac{3.2.1}{2}$; valores, que fubftituidos na expreffaõ $\overset{2\prime}{A1}$ moftraõ que he nefte cafo particular.

$$\overset{2\prime}{A1} = \frac{4.3.2.1}{2}.$$

Theorema IX.

Se os termos da ferie, que refulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da ferie dos numeros triangulares, fe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ferie dos cubos dos numeros naturaes; a faber, o primeiro por n^3 , o fegundo por $(n-1)^3$, o terceiro por $(n-2)^3$, e affim fucceffivamente, a fomma dos termos da ferie refultante d'eftas multiplicações ferá nulla, fendo n numero inteiro pofitivo > 5; e ferá $= \frac{5.4.3.2.1}{2}$, fendo $n = 5$.

De-

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$n^3 + (n-1)^3 \quad + (n-2)^3 \quad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^4(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^4(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $\overset{3'}{A}1$, e a qual ſe reſolve nas duas

$$\frac{n^4(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)^3(n-2)}{2.1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3(n-4)}{2.1.2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= n\overset{2'}{A}1$, e a da ſegunda $= n\underset{(1)}{\overset{2'}{A}1}$, donde ſe ſegue que he

$$\overset{3'}{A}1 = n\left(\overset{2'}{A}1 + \underset{(1)}{\overset{2'}{A}1}\right)$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 5, cada huma d'eſtas ſommas he nulla pelo Theorema antecedente, e por tanto ſerá tambem $\overset{3'}{A}1 = 0$. Mas ſendo $n = 5$, he $n - 1 = 4$, e pelo meſmo Theorema he $\overset{2'}{A}1 = 0$; e $\underset{(1)}{\overset{2'}{A}1} = \frac{4.3.2.1}{2}$, valores que ſubſtituidos na expreſſaõ de $\overset{3'}{A}1$, moſtraõ que neſte caſo particular he

$$\overset{3'}{A}1 = \frac{5.4.3.2.1}{2}.$$

Corollario.

Attendendo á natureza, e analogia do proceſſo das

Demonstrações dos tres Theoremas precedentes poderemos concluir em geral » Que se os termos da serie, que » resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do » binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos numeros » triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie das potencias do gráo m dos numeros na- » turaes, a saber, o primeiro por n^m, o segundo por » $(n-1)^m$, o terceiro por $(n-2)^m$, e assim successiva- » mente a somma $A1^{m'}$ dos termos da serie

$$\frac{n^{m+1}(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)^{m+1}(n-2)}{2.1}+\frac{n(n-1)(n-2)^{m+1}(n-3)}{2.1.2}-\&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n nu- » mero inteiro positivo $> m+2$, e que sendo $m=n+2$ » será

$$\frac{n^{n-1}(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)^{n-1}(n-2)}{2.1}+\frac{n(n-1)(n-2)^{n-1}(n-3)}{2.1.2}-\&c.$$

» ou

$$A1^{(n-2)'}=\frac{n(n-1)(n-2)\,....\,3.2.1}{2}=\frac{A^{n'}}{2}.$$

Theorema X.

Se os termos da serie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros triangulares, a saber, o primeiro por $\frac{n^2(n-1)^2}{2^2}$, o segundo por $\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2}$, o terceiro por $\frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2}$, e assim successivamente a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo >4, e será $=\frac{4.3.2.1}{2^2}$ sendo $n=4$.

De-

Demonstração.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} + \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2} + \frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2} + \frac{(n-3)^2(n-4)^2}{2^2} + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2\,1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2\,1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por $A2$, e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{2^2\,1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2^2\,1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2^2\,1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^2}{2^2\,1.2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= \frac{n^2}{2^2} \underset{(1)}{A}^{2\prime}$, e a da segunda $= \frac{n(n-1)}{2^2} \underset{(2)}{A}^{2\prime}$, donde se segue que he

$$A2 = \frac{n^2}{2^2} \underset{(1)}{A}^{2\prime} + \frac{n(n-1)}{2^2} \underset{(2)}{A}^{2\prime}$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 4, he $n-2$ numero inteiro positivo > 2, e por tanto pelo Theorema III. $\underset{(1)}{A}^{2\prime} = 0$, e $\underset{(2)}{A}^{2\prime} = 0$, donde se conclue, que será tambem $A2 = 0$. Mas sendo $n = 4$, he pelo mesmo Theorema $\underset{(1)}{A}^{2\prime} = 0$, e $\underset{(2)}{A}^{2\prime} = 2.1$, valores que substituidos na expressaõ de $A2$ mostraõ, que neste caso particular he

$$A2 = \frac{4.3.2.1}{2^2}.$$

Theo-

Theorema XI.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos quadrados dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes, a saber, o primeiro por n, o segundo por $(n-1)$, o terceiro por $(n-2)$, e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 5, e será $= \frac{5.4.3.2.1}{2^2}$, sendo $n = 5$.

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

$$n + (n-1) \qquad + (n-2) \qquad + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^3(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^2}{2^2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por $\overset{\prime\prime}{A2}$, e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^3(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{2^2.1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= nA2$, e a da segunda $= n\underset{(1)}{A2}$, donde se segue que he

$$\overset{\prime\prime}{A2} = n\left(A2 + \underset{(1)}{A2}\right)$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 5, he $(n-1)$ nu-

numero inteiro positivo > 4, e por tanto pelo Theorema antecedente he $A2 = o$, e $\underset{(1)}{A2} = o$; e por consequencia tambem $A2 = o$. Mas sendo $n = 5$, he $n - 1 = 4$, e pelo mesmo Theorema $\overset{1'}{A2} = o$, e $\underset{(1)}{A2} = \frac{4.3.2.1}{2.^2}$, valores que substituidos na expressaõ de $\overset{1'}{A2}$ mostraõ, que he neste caso particular

$$\overset{1'}{A2} = \frac{5.4.3.2.1}{2.^2}.$$

Theorema XII.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ pelos termos da serie dos quadrados dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n^2, o segundo por $(n - 1)^2$, o terceiro por $(n - 2)^2$, e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 6, e será $= \frac{6.5.4.3.2.1}{2.^2}$, sendo $n = 6$.

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2.^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2.^2\,1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2.^2\,1.2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^4(n-1)^2}{2.^2} - \frac{n(n-1)^4(n-2)^2}{2.^2\,1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2.^2\,1.2} - \&c.$$

cuja somma, seguindo a analogia estabelecida, represento por $\overset{2'}{A2}$, e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^4(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)^3(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^3(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3(n-4)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a fomma da primeira das quaes he $= n A_2^{1\prime}$, e a da fegunda $= n \underset{(1)}{A_2^{1\prime}}$, donde fe fegue que he

$$A_2^{2\prime} = n\left(A_2^{1\prime} + \underset{(1)}{A_2^{1\prime}}\right)$$

Porém, fendo n numero inteiro pofitivo > 6, he $n - 1$ numero inteiro pofitivo > 5, e pelo Theorema antecedente he $A_2^{1\prime} = 0$, e $\underset{(1)}{A_2^{1\prime}} = 0$, donde fe conclue, que he tambem $A_2^{2\prime} = 0$. Mas fendo $n = 6$, he $n - 1 = 5$, e pelo mefmo Theorema $A_2^{1\prime} = 0$, e $\underset{(1)}{A_2^{1\prime}} = \frac{5.4.3.2.1}{2^2}$, valores que fubftituidos na expreffaõ de $A_2^{2\prime}$ moftraõ, que he nefte cafo particular.

$$A_2^{2\prime} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^2}.$$

Theorema XIII.

Se os termos da ferie, que refulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da ferie dos quadrados dos numeros triangulares, fe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ferie dos cubos dos numeros naturaes; a faber, o primeiro por n^3, o fegundo por $(n-1)^3$, o terceiro por $(n-2)^3$, e affim fucceffivamente, a fomma dos termos da ferie refultante d'eftas multiplicações ferá nulla, fendo n numero inteiro pofitivo > 7, e ferá $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^2}$, fendo $n = 7$.

De-

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2_{\cdot}} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2_{\cdot}1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2_{\cdot}1.2} + \&c.$$

$$n^3 + (n-1)^3 \qquad + (n-2)^3 \qquad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^5(n-1)^2}{2^2_{\cdot}} - \frac{n(n-1)^5(n-2)^2}{2^2_{\cdot}1} + \frac{n(n-1)(n-2)^5(n-3)^2}{2^2_{\cdot}1.2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $\overset{3\prime}{A2}$, e a qual ſe reſolve nas duas

$$\frac{n^5(n-1)^2}{2^2_{\cdot}} - \frac{n^2(n-1)^4(n-2)^2}{2^2_{\cdot}1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^2_{\cdot}1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^4(n-2)^2}{2^2_{\cdot}} - \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^2_{\cdot}1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4(n-4)^2}{2^2_{\cdot}1.2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= n\overset{2\prime}{A2}$, e a da ſegunda $= n\underset{(1)}{\overset{2\prime}{A2}}$, donde ſe ſegue que he

$$\overset{3\prime}{A2} = n\left(\overset{2\prime}{A2} + \underset{(1)}{\overset{2\prime}{A2}}\right)$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 7, as duas ſommas $\overset{2\prime}{A2}$, e $\underset{(1)}{\overset{2\prime}{A2}}$ ſaõ nullas, e por tanto he tambem $\overset{3\prime}{A2} = 0$, Mas ſendo $n = 7$, he $n - 1 = 6$, e pelo meſmo Theorema he $\overset{2\prime}{A2} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{2\prime}{A2}} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^2_{\cdot}}$, donde ſe conclue, que neſte caſo particular he

$$\overset{3\prime}{A2} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^2_{\cdot}}$$

Corollario.

Attendendo á natureza e analogia do proceſſo das Demonſtrações dos tres Theoremas antecedentes, podemos concluir em geral » Que ſe os termos da ſerie, que reſul-

» ta

„ ta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do bino-
„ mio $(1-x)^n$ pelos termos da ferie dos quadrados dos
„ numeros triangulares, fe multiplicarem ordenadamente
„ pelos termos da ferie das potencias do gráo m dos nu-
„ meros naturaes; a faber, o primeiro por n^m, o fegundo
„ por $(n-1)^m$, o terceiro por $(n-2)^m$, e affim fucceffivamente a fomma $A2^{m\prime}$ dos termos da ferie

$$\frac{n^{m+2}.(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^{m+2}(n-2)^2}{2^2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{m+2}(n-3)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

„ refultante d'eftas multiplicaçőes ferá nulla, fendo n nu-
„ mero inteiro pofitivo $> m+4$, e que fendo $n = m+4$,
„ ferá

$$\frac{n^{n-2}(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^{n-2}(n-3)^2}{2^2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-2}(n-3)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

„ ou

$$A2^{(n-4)\prime} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{2^2} = \frac{A^{n\prime}}{2^2}$$

Theorema XIV.

Se os termos da ferie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ fe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ferie dos cubos dos numeros triangulares; a faber, o primeiro por $\frac{n^3(n-1)^3}{2^3}$, o fegundo por $\frac{(n-1)^3(n-2)^3}{2^3}$, o terceiro por $\frac{(n-2)^3(n-3)^3}{2^3}$, e affim fucceffivamente, a fomma dos termos da ferie refultante d'eftas multiplicaçőes ferá nulla, fendo n numero inteiro pofitivo > 6, e ferá $= \frac{6.5.4.3.2.1}{2^3}$, fendo $n = 6$.

Demon-

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} + \frac{(n-1)^3(n-2)^3}{2^3} + \frac{(n-2)^3(n-3)^3}{2^3} + \frac{(n-3)^3(n-4)^3}{2^3} + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por $A3$, e a qual se poderia semelhantemente obter multiplicando ordenadamente as duas seguintes

$$\frac{n(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

e que por tanto, pela repetiçaõ do artificio praticado nas Demonstrações dos Theoremas antecedentes, se resolve nas tres seguintes

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n^3(n-1)(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n^3(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

$$\frac{2n^2(n-1)(n-2)^3}{2^3} - \frac{2n^2(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{2n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^3}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^3}{2^3\cdot 1} + \&c.$$

A somma da primeira das quaes he $= \frac{n^3}{2^3}\underset{(1)}{A}^{3'}$, a da segunda $= \frac{2n^2(n-1)}{2^3}\underset{(2)}{A}^{3'}$, a da terceira $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3}\underset{(3)}{A}^{3'}$; donde se segue que he

$$A3 = \frac{n^3}{2^3}\underset{(1)}{A}^{3'} + \frac{2n^2(n-1)}{2^3}\underset{(2)}{A}^{3'} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3}\underset{(3)}{A}^{3'}$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 6, he $n - 3$ numero inteiro positivo > 3, e por tanto pelo Theorema IV. he $\underset{(1)}{A}^{3\prime} = 0$, $\underset{(2)}{A}^{3\prime} = 0$, e $\underset{(3)}{A}^{3\prime} = 0$, e por consequencia tambem $A3 = 0$. Mas sendo $n = 6$, he $n - 3 = 3$, e pelo mesmo Theorema he $\underset{(1)}{A}^{3\prime} = 0$, $\underset{(2)}{A}^{3\prime} = 0$, $\underset{(3)}{A}^{3\prime} = 3.2.1$, valores, que substituidos na expressaõ de $A3$ mostraõ, que neste caso particular he

$$A3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^3}$$

Theorema XV.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ pelos termos da serie dos cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n, o segundo por $(n-1)$, o terceiro por $(n - 2)$, e assim successivamente, a somma da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 7, e será $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^3}$, sendo $n = 7$.

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

$$n \quad + (n-1) \quad + (n-2) \quad + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^4(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^4(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por $A3^{\prime\prime}$, e a qual se resolve evidentemente nas duas $\frac{n^4(n-1)^3}{2^3}$

$$\frac{n^4(n-1)^3}{2^3} - \frac{n^2(n-1)^3(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3(n-4)^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= n\,A3$, e a segunda $= n \underset{(1)}{A3}$, donde se segue que he

$$\overset{\prime\prime}{A3} = n\left(A3 + \underset{(1)}{A3}\right)$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 7, he pelo Theorema antecedente $A3 = 0$, e $\underset{(1)}{A3} = 0$, por ser $n-1 > 6$, logo tambem será $\overset{\prime\prime}{A3} = 0$. Mas sendo $n = 7$, he $n - 1 = 6$, e pelo mesmo Theorema he $A3 = 0$, e $\underset{(1)}{A3} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^3}$, valores que sendo substituidos na expressaõ de $\overset{\prime\prime}{A3}$ mostraõ, que neste caso particular he

$$\overset{\prime\prime}{A3} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^3}.$$

Theorema XVI.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ pelos termos da serie dos cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n^2, o segundo por $(n - 1)^2$, o terceiro por $(n - 2)^2$, e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 8, e será $= \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2^3}$, sendo $n = 8$.

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3}$$

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n(n-2)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^5(n-1)^3}{2^5} - \frac{n(n-1)^5(n-2)^3}{2^5\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^5(n-3)^3}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por $\overset{2'}{A3}$, e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^5(n-1)^3}{2^3} - \frac{n^2(n-1)^4(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^4(n-2)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4(n-4)^3}{2^3\cdot 1.2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= n\overset{1'}{A3}$, e a da segunda $= n\underset{(1)}{\overset{1'}{A3}}$, donde se segue que he

$$\overset{2'}{A3} = n\left(\overset{1'}{A3} + \underset{(1)}{\overset{1'}{A3}}\right)$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 8, he $n - 1$ numero inteiro positivo > 7, e por tanto pelo Theorema antecedente he $\overset{1'}{A3} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1'}{A3}} = 0$, e por consequencia he tambem $\overset{2'}{A3} = 0$. Mas sendo $n = 8$, he $n - 1 = 7$, e pelo mesmo Theorema $\overset{1'}{A3} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1'}{A3}} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^3}$, valores que substituidos na expressaõ de $\overset{2'}{A3}$ mostraõ, que he neste caso particular

$$\overset{2'}{A3} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2^3}.$$

Corol-

Corollario.

A marcha do Calculo no processo das Demonstrações dos Theoremas antecedentes assás claramente mostra, que sem necessidade de acumular mais Theoremas a elles analogos podemos concluir em geral » Que se os termos da » serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coeffi- » cientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos » cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem orde- » nadamente pelos termos da serie das potencias do gráo » m dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n^m, » o segundo por $(n-1)^m$, o terceiro por $(n-2)^m$, e as- » sim successivamente, a somma $\overset{m,}{A_3}$ dos termos da serie

$$\frac{n^{m+3}(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^{m+3}(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{m+3}(n-3)^3}{2^3\cdot 1\cdot 2} - \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n nu- » mero inteiro positivo $> m+6$, e que sendo $n = m+6$, » será

$$\frac{n^{n-3}(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^{n-3}(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-3}(n-3)^3}{2^3\cdot 1\cdot 2} - \&c.$$

» ou

$$\overset{(n-6)'}{A_2} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2^3} = \frac{A^{n'}}{2^3}$$

Conclusaõ.

Comparando o processo do Calculo nas Demonstrações dos Theoremas VI, X, e XIV podemos tambem concluir em geral. » Que multiplicando ordenadamente os coeffi- » cientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos de serie das » potencias do gráo k dos numeros triangulares; a saber, » o primeiro por $\frac{n^k(n-1)^k}{2^k}$, o segundo por $\frac{(n-1)^k(n-2)^k}{2^k}$,

» o terceiro por $\frac{(n-2)^k(n-3)^k}{2^k}$, e aſſim ſucceſſivamente, a
» ſomma A_k dos termos da ſerie

$$\frac{n^k(n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^k(n-2)^k}{2^k.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^k(n-3)^k}{2^k.1.2} + \&c.$$

» reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n nu-
» mero inteiro poſitivo $> 2k$, e que ſendo $n = 2k$, ſerá

$$A_k = \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots 3.2.1}{2^k}.$$

Semelhantemente poderemos concluir, attendendo á natureza e proceſſo das Demonſtrações dos outros Theoremas desde o Theorema XIV até ao Theorema XVI » Que ſe
» os termos da ſerie, que reſulta da multiplicaçaõ or-
» denada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos ter-
» mos da ſerie das potencias do gráo k dos numeros trian-
» gulares, ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da
» ſerie das potencias do gráo m dos numeros naturaes,
» a ſomma A_k^m dos termos da ſerie

$$\frac{n^{k+m}(n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^{k+m}(n-2)^k}{2^k.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{k+m}(n-3)^k}{2^k.1.2} - \&c.$$

» reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n nu-
» mero inteiro poſitivo $> 2k+m$, e que ſendo $n = 2k+m$,
» ſerá

$$\frac{n^{n-k}(n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^{n-k}(n-2)^k}{2^k.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-k}(n-3)^k}{2^k.1.2} - \&c.$$

» ou

$$A_k^{(n-2k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1}{2^k} = \frac{A^n}{2^k}$$

Ap-

Applicaçaõ.

Se na expreſſaõ de $\overset{n}{d}F\varphi$ na ſuppoſiçaõ de $d\varphi$ conſtante, ſe ſubſtitue $F(\varphi + ntd\varphi + \frac{n(n-1)}{2}t^2dd\varphi)$ em lugar de $F(\varphi + ntd\varphi)$; $F\left(\varphi + (n-1)td\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2}t^2dd\varphi\right)$ em lugar de $F(\varphi + (n-1)td\varphi)$, e aſſim ſemelhantemente em todos os outros termos, de que conſta o ſeu numerador, teremos a expreſſaõ de $\overset{n}{d}F\varphi$ na ſuppoſiçaõ de $dd\varphi$ conſtante. Mas deſenvolvendo em ſerie cada hum dos ditos termos, teremos

$$F\left(\varphi + ntd\varphi + \frac{n(n-1)}{2}t^2dd\varphi\right) = F\varphi + nP^{1\prime}td\varphi + n^2P^{2\prime}t^2d\varphi^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}P^{1\prime}t^2dd\varphi + \frac{2n^2(n-1)}{2}P^{2\prime}t^3d\varphi dd\varphi + \ldots$$

$$+ \frac{n^2(n-1)^2}{2^2}P^{2\prime}t^4dd\varphi^2 + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} + n^{n-1}P^{(n-1)\prime}t^{n-1}d\varphi^{n-1} + n^nP^{n\prime}t^nd\varphi^n + \&c. \\ + (n-1)\frac{n^{n-1}(n-1)}{2}P^{(n-1)\prime}t^nd\varphi^{n-2}dd\varphi + n.\frac{n^n(n-1)}{2}P^{n\prime}t^{n+1}d\varphi^{n-1}dd\varphi + \&c. \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{n^{n-1}(n-1)^2}{2^2}P^{(n-1)\prime}t^{n+1}d\varphi^{n-3}dd\varphi^2 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{n^n(n-1)^2}{2^2}P^{n\prime}t^{n+2}d\varphi^{n-2}dd\varphi^2 + \&c. \\ + \&c. \qquad\qquad + \&c. \end{array}\right\}$$

$$-nF\left(\varphi+(n-1)td\varphi+\frac{(n-1)(n-2)}{2}t^2dd\varphi\right)=-n\left(F\varphi+(n-1)P^{1\prime}td\varphi\right.$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}P^{1\prime}t^2dd\varphi$$

$$+(n-1)^2P^{2\prime}t^2d\varphi\quad+\ldots\ldots+(n-1)^{n-1}P^{(n-1)\prime}t^{n-1}d\varphi^{n-1}$$

$$+\frac{2(n-1)^2(n-2)}{2}P^{2\prime}t^3d\varphi dd\varphi+\ldots+(n-1)\frac{(n-1)^{n-1}(n-2)}{2}P^{(n-1)\prime}t^n d\varphi^{n-2}dd\varphi$$

$$+\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2}P^{2\prime}t^4dd\varphi^2+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{(n-1)^{n-1}(n-2)^2}{2^2}P^{(n-1)\prime}t^{n+1}d\varphi^{n-3}dd\varphi^2$$

$$+\&c.$$

$$\left.\begin{array}{l}+(n-1)^nP^{n\prime}t^nd\varphi^n+\&c.\\+n\frac{(n-1)^n(n-2)}{2}P^{n\prime}t^{n+1}d\varphi^{n-1}dd\varphi+\&c.\\+\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-1)^n(n-2)^2}{2^2}P^{n\prime}t^{n+1}d\varphi^{n-2}dd\varphi^2+\&c.\\+\&c.\end{array}\right\}$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}F\left(\varphi+(n-2)td\varphi+\frac{(n-2)(n-3)}{2}t^2dd\varphi\right)=\frac{n(n-1)}{2}\left(F\varphi+(n-2)P^{1\prime}td\varphi\right.$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)}{2}P^{1\prime}t^2dd\varphi$$

$$+(n-2)^2P^{2\prime}t^2d\varphi^2\quad+\ldots\ldots+(n-2)^{n-1}P^{(n-1)\prime}t^{n-1}d\varphi^{n-1}$$

$$+\frac{2(n-2)^2(n-3)}{2}P^{2\prime}t^3d\varphi dd\varphi+\ldots+(n-1)\frac{(n-2)^{n-1}(n-3)}{2}P^{(n-1)\prime}t^nd\varphi^{n-2}dd\varphi$$

$$+\frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2}P^{2\prime}t^4dd\varphi^2+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{(n-2)^{n-1}(n-3)^2}{2^2}P^{(n-1)\prime}t^{n+1}d\varphi^{n-3}dd\varphi^2$$

$$+\&c.$$

$$\left.\begin{array}{l}+(n-1)^nP^{n\prime}t^nd\varphi^n+\&c.\\+\frac{n(n-2)^n(n-3)}{2}P^{n\prime}t^{n-1}d\varphi^{n-1}dd\varphi+\&c.\\+\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)^n(n-3)^2}{2^2}P^{n\prime}t^{n+2}d\varphi^{n-2}dd\varphi^2+\&c.\\+\&c.\\-\&c.\end{array}\right\}$$

som-

ſommando em todas eſtas expreſsões os termos, que ſe correſpondem em cada columna; iſto he aquelles, que em cada columna ſe acharem ter por factor huma meſma potencia de t, teremos

$$\overset{n}{t}\,\overset{n}{d}F\varphi = AF\varphi + \overset{1\prime}{A}\,\overset{1\prime}{P}\,t\,d\varphi + \overset{2\prime}{A}\,\overset{2\prime}{P}\,t^2 d\varphi^2 + \dots + \overset{n\prime}{A}\,\overset{n\prime}{P}\,t^n d\varphi^n + \&c.$$

$$+ A1\overset{1\prime}{P}\,t^2 dd\varphi + 2\overset{1\prime}{A1}\,\overset{2\prime}{P}\,t^3 d\varphi\, dd\varphi + \dots + \frac{n}{1}\overset{(n-1)\prime}{A1}\,\overset{n\prime}{P}\,t^{n+1} d\varphi^{n-1} dd\varphi + \&c.$$

$$+ A2\overset{2\prime}{P}\,t^4 dd\varphi^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1.2}\overset{(n-2)\prime}{A2}\,t^{n+2} d\varphi^{n-2} dd\varphi^2 + \&c.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\overset{(n-3)\prime}{A3}\,t^{n+3} d\varphi^{n-3} dd\varphi^3 + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Mas todos os termos, em que t ſe acha elevado a huma potencia menor do que n, ſaõ nullos pelos Theoremas antecedentes; iſto he, ſaõ nullos todos os termos da primeira linha, que ſe achaõ antes de $\overset{n\prime}{A}\,\overset{n,}{P}\,\overset{n}{t}\,\overset{n}{d\varphi}$ por ſer $A = 0$, $\overset{1\prime}{A} = 0 \dots \overset{(n-1)\prime}{A} = 0$. Saõ nullos todos os termos da ſegunda linha, que antecedem o termo $(n-1)\overset{(n-2)}{A1}\,\overset{(n-1)\prime}{P}\,\overset{n}{t}\,d\varphi^{n-2} dd\varphi$ por ſer $A1 = 0$ $\overset{1\prime}{A1} = 0 \dots \overset{(n-3)\prime}{A1} = 0$. Semelhantemente ſaõ nullos todos os termos da terceira linha, que antecedem o termo $\frac{(n-2)(n-3)}{2}.\overset{(n-4)\prime}{A2}\,\overset{(n-2)\prime}{P}\,\overset{n}{t}\,d\varphi^{n-4} dd\varphi^2$; e aſſim por diante. Ora dividindo ambos os membros d'eſta Equaçaõ por $\overset{n}{t}$, e ſuppondo depois $t = 0$, todos os termos ſubſequentes aos mencionados, iſto he, todos os termos, em que t ſe acha elevado a potencias mais altas do que n, ſe aniquillaõ; e por tanto fica

$$d^{n} F\varphi = A^{n,} P^{n,} d\varphi^{n} + \frac{n-1}{1.} A1^{(n-2),} P^{(n-1),} d\varphi^{n-2} dd\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$$

$$A2^{(n-4),} P^{(n-2),} d\varphi^{n-4} dd\varphi^{2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} A3^{(n-6),} P^{(n-3),} d\varphi^{n-6} dd\varphi^{3}$$

$+$ &c.

Expreſſaõ que tambem ſe póde eſcrever d'eſta ſorte

$$d^{n} F\varphi = A^{n,}\Big(P^{n,} d\varphi^{n} + \frac{(n-1)}{2.1} P^{(n-1),} d\varphi^{n-2} dd\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{2^{2}.1.2}$$

$$P^{(n-2),} d\varphi^{n-4} dd\varphi^{2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2^{3}.1.2.3} P^{(n-3),} d\varphi^{n-6} dd\varphi^{3} + \&c.\Big)$$

por ſer $A1^{(n-2),} = \frac{A^{n,}}{2}$; $A2^{(n-4),} = \frac{A^{n,}}{2^{2}}$; $A3^{(n-6),} = \frac{A^{n,}}{2^{3}}$; &c.;

ou tambem aſſim

$$d^{n} F\varphi = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n\Big(P^{n,} d\varphi^{n} + \frac{(n-1)}{2.1} P^{(n-1),} d\varphi^{n-2} dd\varphi$$

$$+ \frac{(n-2)(n-3)}{2^{2}.1.2} P^{(n-2),} d\varphi^{n-4} dd\varphi^{2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2^{3}.1.2.3}$$

$$P^{(n-3),} d\varphi^{n-6} dd\varphi^{3} + \&c. \Big)$$

por ſer $A^{n,} = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n$. Formula, que publiquei ſem demonſtraçaõ na minha já citada Memoria ſobre os verdadeiros Principios do Methodo das Fluxões, e que naõ ſeria facil deduzir por inducçaõ dos reſultados particulares achados pelas ſucceſſivas hypotheſes de $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ &c.

Eſcolio.

O caminho, que ſegui para achar as formulas geraes das Fluxões na ſuppoſiçaõ de $d\varphi$ conſtante, e de $dd\varphi$ conſtante, póde conduzir igualmente ao deſcobrimento de

For-

Formulas semelhantes para o caso de se suppor constante outra qualquer Fluxaõ de φ : mas os processos do calculo, supposto que analogos, seraõ muito mais extenços pelo grande numero de proposições, que será preciso primeiro demonstrar: facil he porém de ver, que tudo se reduzirá a examinar em que caso se torna nulla a somma de huma serie, cujos termos saõ produzidos pela multiplicaçaõ successiva de cada hum dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos de qualquer serie de potencias dos numeros naturaes, e dos numeros figurados; e qual he o valor da somma da dita serie no primeiro caso, em que, segundo os successivos valores de n, ella deixa de ser nulla. A primeira parte d'esta indagaçaõ admite huma soluçaõ facil; por quanto com pouca reflexaõ se vê, que considerando os numeros naturaes como quantidades de huma só dimençaõ, os numeros triangulares como quantidades de duas dimenções, os piramidaes como quantidades de tres dimenções, e assim successivamente, em quanto n fôr maior que a somma das dimenções de cada termo da serie em questaõ, a somma d'esta será nulla. Tambem naõ he dificil de ver, que o primeiro caso, em que ella deixará de ser nulla, será quando n fôr igual ao numero das dimenções dos termos da dita serie: achar porém qual seja o valor da somma nesse caso particular, he justamente em que reside a dificuldade da questaõ, e o que se naõ póde determinar antecipadamente sem o soccorro do Calculo. Como a soluçaõ d'esta questaõ nos naõ offerece utilidade sensivel, e immediata, por isso nos contentamos com ter aberto a carreira para ella, de maneira que qualquer a possa seguir sem difficuldade, huma vez que entenda ser util adiantar mais algum passo nesta materia.

OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS.

Feitas no Real Collegio de Mafra

Por D. Joaquim da Assumpçaõ Velho.

Observaçaõ do Eclipse total da Lua de 10 de Setembro de 1783.

O Ceo claro e limpo ao principio da noite prometia huma observaçaõ desembaraçada e seguida; mas hum vento brando de S.O. espalhou pelo Ceo algumas nevoas altas, e nuvens espessas, que embaraçáraõ principalmente no meio, e fim da observaçaõ, o fazella completamente. A pendula estava perfeitamente regulada pelo tempo medio, verificada por muitas observações anteriores, e ultimamente rectificada por huma boa Merediana no mesmo dia da observaçaõ, e no seguinte. O Snr. Jeronymo Allen, Missionario Inglez do Collegio de S. Pedro, e S. Paulo de Lisboa, bem conhecido pelas suas luzes nas Sciencias Fysicas, e Mathematicas, veio de proposito ao meu Gabinete para ter parte na observaçaõ: e o Illustrissimo Snr. D. Domingos José Xavier de Lima Telles, Cavalheiro da Ordem de Malta, e Tenente da Armada Real, se dignou ajudarnos com hum zelo bem distincto, e proprio da sua applicaçaõ a semelhantes observações. O Snr. Allen, e eu observamos separadamente por dous Oculos Achromaticos de M. Dollond., o do Snr. Allen tem a lente objectiva de duas pollegadas de abertura, e tres pés e meio de foco, o meu tem a mesma lente de $2\frac{1}{4}$ pollegadas de abertura, e sinco pés de foco: a nossa observaçaõ separada foi inteiramente concorde naquelles pontos, que ambos marcámos: e ella junta he, como se segue

Tem-

Tempo da Pendula.

9^h	2′	3″	Principio certo da Penumbra.
9	5	7	Distinguia-se bem a Penumbra nas vizinhanças de Grimaldus, e pelo que se podia julgar, a direçaõ desta Penumbra era de L.E. $\frac{1}{4}$ S.E. a respeito do Disco Lunar.
9	7	41	Toca a sombra no Disco da Lua, e principia a immersaõ.
9	7	49	Chega a Penumbra a Grimaldus, e Aristarcho.
9	11	27	Principia a immersaõ de Kepleio.
9	13	0	Total immersaõ de Aristarcho na Sombra.
9	13	12	Principia a immersaõ de Heraclides.
9	14	24	Chega a Penumbra a Copernico.
9	20	31	Chega a Sombra a Copernico.
9	23	54	Total immersaõ de Copernico na Sombra.
9	26	5	Chega a Penumbra a Tycho.
9	28	13	Entra Plataõ na Sombra.
9	29	29	Total immersaõ de Plataõ na Sombra.
9	35	0	Chega a Sombra a Tycho.
9	37	33	Total immersaõ de Tycho.
9	39	36	Immersaõ total de Meneláo.
9	41	20	Immersaõ total de Plinio.
9	48	3	Pricipia a immersaõ de Mare Nectaris.
9	54	7	Principia a immersaõ de Mare Crisium.
9	59	28	Immersaõ total do Mare Crisium.
10	5	54	Immersaõ total do Disco Lunar.

Naõ foi possivel observar o estado de apparencia, em que ficava a Lua em todo o tempo da sua Immersaõ, por causa de hum grande nevoeiro, e algumas nuvens espessas, que a encobríraõ inteiramente, e por esta mesma razaõ se naõ pode determinar bem o principio da Emersaõ do Disco Lunar, e com muito trabalho, e ainda com alguma duvida he que se podéraõ marcar os pontos seguintes:

11′	42″	0	Principiava a Emersaõ de Grimaldus.
11	48	30	Já Grimaldus estava inteiramente fóra da Sombra.
11	57	12	Total Emersaõ de Heraclides.
12	9	28	Total Emersaõ do Copernico.
12	46	40	Emersaõ total do Disco Lunar, e fim do Eclipse.

O fim da Penumbra naõ se pôde observar por causa dos nevoeiros, e nuvens, que sobrevieraõ.

Observaçaõ do Eclipse total da Lua no dia 3 de Janeiro de 1787.

A Noite desta observaçaõ foi summamente favoravel: o Ceo conservou-se sempre claro e sereno, e daria toda a occasiaõ a hum Astronomo, bem provido de Instrumentos para muitas observações completas. Eu fiz esta juntamente com hum meu Collega o Snr. D. Diogo da Annunciaçaõ Huet, Professor da Cadeira de Filosofia Racional: o Snr. Huet usou de hum oculo achromatico de Dollond de $3\frac{1}{2}$ pés de foco, augmentando o diametro dos objectos 55 vezes: o de que eu usei he igualmente achromatico do mesmo Dollond, e augmenta 22 vezes os objectos. A differente força d'estes dous oculos naõ foi indifferente á observaçaõ; como no progresso da Emersaõ a sombra veio a ser summamente escura, e espessa, o oculo de maior força naõ distinguia absolutamente mancha alguma antes da Emersaõ, o de menos força alcançava sufficientemente muitas das mais notaveis. O tempo foi determinado pelas alturas correspondentes do Sol, tomadas em muitos dias, que precedêraõ, e se seguíraõ ao da observaçaõ.

Tempo verdadeiro.

9^h	$3'$	$0''$	Parece á vista simples que a Lua entra na Penumbra.
9	12	0	Já o Limbo oriental da Lua se vê muito offuscado.
9	20	16	Parece principiar a Immersaõ da Lua na Sombra.
9	21	13	Principio certo da Immersaõ.
9	23	41	Grimaldus principia a entrar na Sombra.
9	24	59	Grimaldus entra inteiramente na Sombra.
9	26	54	Galileo.
9	28	19	
9	32	24	Keplero.
9	33	21	
9	33	52	Aristarco.
9	36	6	

Tempo verdadeiro.

9h	40′	18″	Copernico.
9	42	46	
9	43	50	Tycho.
9	45	27	
9	55	56	Plataó.
9	57	1	
9	57	1	Mare ferenitatis.
10	6	19	
10	2	38	Eudoxo.
10	3	34	
10	3	0	Ariftoteles.
10	4	31	
10	13	58	Mare Crifium.
10	18	36	
10	21	4	Immerfaõ total da Lua.

Foi muito difficultofo determinar o verdadeiro principio da Immerfaõ, porque fe naõ podiaõ obfervar bem os limites entre a fombra, e a penumbra: as primeiras manchas fôraõ ainda marcadas com alguma duvida, pela mefma razaõ. No progreffo da Immerfaõ a fombra veio a fer mais bem terminada, e entaõ a Immerfaõ das manchas, e a total da Lua foi marcada mais exactamente. A fombra era fummamente efcura, e efpeffa antes da Immerfaõ total. As manchas defappareceraõ quafi inteiramente pouco tempo depois da fua Immerfaõ.

A Lua ficou vifivel, e o feu difco bem terminado em todo o tempo da total Immerfaõ, a fua côr era de hum vermelho efcuro, e affogueado com differentes ondas efcuras, que fucceffivamente foraõ mudando de fitio. Algum tempo antes da Emerfaõ a côr vermelha, que cobria a Lua fe defvaneceu taõ confideravelmente, que todas as manchas appareciaõ muito diftinctamente, fobre tudo as da parte oriental da Lua, o que fazia duvidar fe a Emerfaõ era, ou naõ já principiada: fó depois de alguns minutos defta duvida he que conheci os limites da fombra, e que obfervei o principio da Emerfaõ.

Tem-

Tempo verdadeiro.

11^h	59′	26″	Principia a Emerſaõ da Lua.
12	2	42	Grimaldus inteiramente fóra da Sombra.
22	4	12	Galileo total Emerſaô.
12	6	22	Ariſtarcho principia a ſahir.
12	7	42	Ariſtarcho ſahe inteiramente da Sombra.
12	11	26	Keplero inteiramente fóra da Sombra.
12	20	4	Tycho principia a Emerſaõ.
12	21	22	Tycho total Emerſaõ.
12	23	15	Plataõ ſahe da Sombra.
12	29	20	Eudoxo principia a apparecer.
12	29	57	Eudoxo apparece de todo.
12	54	7	Mare Criſium total Emerſaõ.
12	56	30	Total Emerſaõ da Lua.

Depois de principiar a Emerſaõ a côr avermelhada da Lua ſe mudou para hum ſinzento eſcuro, que foi augmentando gradualmente com o progreſſo da Emerſaõ, formando-ſe cada vez mais negra, e eſpeſſa.

NO-

NOTICIA DAS OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS

Feitas em o anno de 1790

POR CUSTODIO GOMES DE VILLAS-BOAS.

ESte anno foi pouco fertil de obſervações; porque de quatro Eclipſes do Sol que houveraõ, o que ſuccede raras vezes, nenhum foi viſivel no noſſo horizonte. Houveraõ mais dois Eclipſes da Lua, que ambos fôraõ viſiveis em Lisboa, e em toda a Europa; mas naõ podemos obſervar ſe naõ o de 28 de Abril, que eſteve huma noite excellente para iſſo; porém deſcontamos depois eſta fortuna a 22 de Outubro, que era a noite do ſegundo, a qual eſteve encuberta, e carregada de nuvens, nevoa, e chuva, de ſorte que apenas ſe pôde conhecer que a Lua ſe eclipſara.

As obſervações dos Satellites de Jupiter tambem fôraõ poucas; porque nos mezes de Julho, Agoſto, Setembro, e Outubro, que ſaõ os melhores para as obſervações, andava o planeta muito perto do Sol, e naõ ſe podiaõ vêr os Satellites; nem ainda o meſmo Planeta nos mezes de Agoſto, e Setembro, em que eſteve em conjunçaõ a 4 deſte ultimo. Os outros Planetas naõ eſtavaõ em circumſtancias de nos darem que fazer, e das Eſtrellas fizemos algumas obſervações, que vamos expôr juntamente com as outras pela ordem chronologica, porque fôraõ feitas, e expoſtas em tempo verdadeiro como os mais annos. Fôraõ feitas com os meſmos inſtrumentos, e a pendula regulada da meſma maneira por alturas correſpondentes, como diſſemos no frontespicio das obſervações, que imprimimos nas Ephemerides de 1791.

Algumas obſervações de Saturno, que pertencem a eſte anno, já fôraõ publicadas nas meſmas Ephemerides, e por iſſo naõ fazemos aquí mençaõ dellas.

Observações de 1790.

EM JANEIRO.

A 5	Imm. do 2.° Satellite de Jupiter ás . .	9^h	54′	13″
25	Imm. do 1.° Satellite de Jupiter as . .	9	10	11

EM MARÇO.

A 10	Em. do 2.° Satellite de Jupiter ás . .	12	0	33
	Boa obſervaçaõ.			
12	Em. do 1.° Satellite de Jupiter ás . .	11	50	32
14	Em. do meſmo Satellite . . ás . .	6	19	28
26	Em. de κ de ♋ no limb. lum. da Lua ás. .	7	8	2

algum tanto duvidoſa; porque quando vi a Eſtrella já eſtava fóra da Lua.

A 22 as duas Immersões do 3.° Satellite de Jupiter, que deviaõ acontecer a 15, e a 22, ambas obſervei com cuidado, e nenhuma pude vêr, de que infiro que o Satellite eſtava detraz do planeta, quando entrou na ſombra, e a de 15 ſuccedeu muito antes do tempo em que a dava o calculo; iſto he, ás 10 hor. e 30 min. com pouca differença.

EM ABRIL.

A 28 *Observaçaõ do Eclipse da Lua.*

Principio da Penumbra ás	9^h	16′	10″
Penumb. mais forte ás	9	31	10
Julguei ter começado o Eclipſe ás	9	33	57
Começa a Imm. de Keplero ás	9	39	18
Começa a Imm. de Mare humorum A ás . .	9	48	39
Imm. de Mare nubium B ás	9	49	1
Imm. total de Plato 17 ás.	9	54	35
Inſula Sinus Medii 19 ás.	10	3	25

Co-

Começa a Imm. de Tycho ás	10^h	$4'$	$26''$
Imm. total da mesma ás	10	6	19
Imm. de hum ponto branco ás	10	8	39
Imm. de Mare serenitatis P ás	10	15	43
Começa a Imm. de Mare Crisium H ás .	10	19	41
Imm. de Tarentius 47 ás	10	21	40
Imm. total de Mare Crisium ás	10	24	38
Imm. total da Lua ás	10	31	40

Logo que começou o Eclipse, começou tambem a Lua a fazer-se côr de fogo, e assim se foi espalhando esta côr até que as 11 horas se achava toda igual, mas a côr era fraca, e deixava vêr perfeitamente a Lua. A noite estava muito clara e serena, soprando huma viraçaõ do Norte. As 11^h $5'$ $11''$ eclipsou-se huma Estrella pequena na parte inferior do Limbo, que custava a vêr. As 11^h $23'$ $15''$ eclipsou-se outra igualmente pequena quasi no mesmo ponto, poucos segundos depois eclipsou-se outra terceira, ainda mais pequena, e pouco mais acima. As 11^h $59'$ $46''$ Imm. de outra Estrella, que parecia da 6.ª grandeza, pouco mais abaixo donde devia começar o Eclipse. Cinco, ou seis minutos antes disso se fez a Em. da 2.ª, que perdi por amor daquella.

Começa a Emersaõ da Lua ás	12^h	$7'$	$50''$
Em. de Helicon 12 ás	12	16	29
Em. de Copernico ás	12	20	11
Meio da Em. de Tycho 21 ás.	12	28	52
Em. de Insula Sinus Medii 19 ás . . .	12	40	38
Começa a sahir Mare Crisium ás . . .	12	57	41
Acaba de sahir a mesma ás	13	1	40
Fim do Eclipse total ás	13	5	46
Ainda se vê a Penumbra ás	13	7	43
Apenas se vê a Penumbra com oculo, mas ainda he mui sensivel á vista simples ás	13	9	40

EM

EM MAIO.

A 27 Em. de β de Capricornio ás . . . 7 22 48

mas poderia acontecer mais cedo, porque quando ví a Estrella já estava fóra, e o Crepusculo era muito forte porque era ao sol posto, mas naõ me parece que tinha mais de $15''$ ou $20''$ de erro.

EM JUNHO.

A 7 Em. do 2.° Satellite de Jupiter ás . . . $9^h\ 0'\ 1''$

Em 22 de Outubro naõ pude observar o Eclipse da Lua, porque choveu, só perto das 11 horas ví que ella estava já quasi eclipsada de todo.

EM DEZEMBRO.

A 4 Imm. do 1.° Satellite de Jupiter ás . . $15^h\ 47'\ 26''$

MEMORIAS
DOS
CORRESPONDENTES.

ENSAIO SOBRE AS BRACHYSTOCHRONAS,

E

REFLEXÕES

Sobre as Prop. 42, e 76 do II. Tomo da Mechanica de Euler.

POR FRANCISCO DE PAULA TRAVASSOS.

§. 1. DEterminar a linha, que hum movel ſolicitado no vacuo pela propria gravidade deve deſcrever no menor tempo poſſivel entre dous pontos naõ exiſtentes na meſma vertical, nem horizontal, he o famoſo Problema propoſto por Joaõ Bernoulli nas Actas de Leipſick em 1696. Os mais célebres Geometras o achàraõ digno das ſuas meditações: delle com tudo ſó entaõ apparecêraõ as ſoluções de Leibnitz, Newton, Jacob Bernoulli, e o Marquez do Hoſpital, os quaes por caminhos differentes, e particulares achàraõ todos ſer a Cycloide a linha pedida.

§. 2. Alguns annos depois por occaſiaõ das indagações ſobre as Iſoperimetras eſte grande Geometra, e ſeu irmaõ Jacob Bernoulli eſtabelecêraõ algumas regras geraes para a ſoluçaõ dos problemas de ſemelhante natureza, nos quaes ſe trata de achar, naõ a maxima ou minima ordenada em huma curva dada, o que ſe conſegue pelos principios ordinarios do Calculo Differencial, mas as meſmas curvas, em que certa expreſſaõ integral indefinida propoſta ſeja hum Maximum, ou Minimum a reſpeito de todas as outras curvas poſſiveis.

§. 3. Eſtas regras aſſim diſperſas fôraõ reduzidas a methodo por Euler na obra intitulada *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes* &c., em

que ensina a resolver semelhantes problemas com huma generalidade, a que antes delle parecia naõ poder chegarse, e depois naõ haver mais que esperar. Com tudo de la Grange nas Memorias de Turim para 1760, e 1761 offereceo hum methodo puramente analytico, mostrando, que as formulas de Euler naõ tem a generalidade, que elle dá ás suas, fazendo variar ao mesmo tempo todas as ordenadas, e abscissas da curva em lugar de huma só ordenada: donde resulta, que a curva variada pode naõ ter ponto algum commum com a curva do Maximum, ou Minimum.

§. 4. Eis-aqui o problema fundamental, e a soluçaõ, que delle se acha na Mem. citada.

Problema.

» Sendo proposta huma formula integral indefinida re-
» presentada por $\int Z$, em que Z designa huma funçaõ
» qualquer determinada das variaveis x, y, z, &c., e
» suas differenças dx, dy, dz, &c. d^2x, d^2y, d^2z, &c. &c.,
» achar a relaçaõ, que estas variaveis devem ter entre si,
» para que a formula $\int Z$ seja hum Maximum, ou Mi-
» nimum?

Soluçaõ.

» Segundo o methodo conhecido de *Maximis*, et *Mi-*
» *nimis* será preciso differenciar a proposta $\int Z$, conside-
» rando as quantidades x, y, z, &c. dx, dy, dz, &c. d^2x,
» &c. &c. como variaveis, e fazer a differencial, que re-
» sulta, igual a zero. Marcando pois estas variações por
» δ, se terá a equaçaõ do Maximum, ou Minimum
» $\delta\int Z = 0$; ou, o que he equivalente, $\int\delta Z = 0$. Ora
» seja Z tal, que

» $\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \&c.$

+

» $+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + R\delta d^3 y +$ &c.
» $+ \upsilon\delta z + \varpi\delta dz + \chi\delta d^2 z + \rho\delta d^3 z +$ &c.
» $+$ &c.
» virá a equaçaõ
» $\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2 x + \int r\delta d^3 x +$ &c.
» $+ \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2 y + \int R\delta d^3 y +$ &c.
» $+ \int \upsilon\delta z + \int \varpi\delta dz + \int \chi\delta d^2 z + \int \rho\delta d^3 z +$ &c. $= 0$.

» Mas pelos principios do Methodo das variações he
» $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2 x = d^2\delta x$, e assim nas mais expressões;
» além disto pelo methodo das integrações por partes se
» acha
» $\int p d\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$; $\int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2 q\delta x$;
» $\int r d^3\delta x = r d^2\delta x - dr\delta x + d^2 r\delta x - \int d^3 r\delta x$;
» e assim por diante. Logo a equaçaõ precedente se mu-
» dará nesta
» $(A) \ldots \int(n - dp + d^2 q - d^3 r +$ &c.$)\delta x + \int(N - dP +$
» $d^2 Q - d^3 R +$ &c.$)\delta y + \int(\upsilon - d\varpi + d^2\chi - d^3\rho +$ &c.$)\delta z +$
» &c. $+ (p - dq + d^2 r -$ &c.$)\delta x + (q - dr +$ &c.$)d\delta x +$
» $(r -$ &c.$)d^2\delta x +$ &c. $+ (P - dQ + d^2 R -$ &c.$)\delta y +$
» $(Q - dR +$ &c.$)d\delta y + (R -$ &c.$)d^2\delta y +$ &c. $+ (\varpi - d\chi +$
» $d^2\rho -$ &c.$)\delta z + (\chi - d\rho +$ &c.$)d\delta z + (\rho -$ &c.$)d^2\delta z$
» $+$ &c. $= 0$: donde se tirará primeiramente a equaçaõ
» indefinida $(B) \ldots (n - dp + d^2 q - d^3 r +$ &c.$)\delta x +$

» (N—

» $(N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\,\delta y + (\nu - d\varpi + d^2 \chi - d^3 \rho + \&c.)\,\delta z$

» $+ \&c. = 0$; e depois a equaçaõ determinada (C)....

» $(p - dq + d^2 r - \&c.)\,\delta x + (q - dr + \&c.)\,d\delta x + (r - \&c.)\,d^2 \delta x$

» $+ \&c. + (P - dQ + d^2 R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR + \&c.)\,d\delta y$

» $+ (R - \&c.)\,d^2 \delta y + \&c. + (\varpi - d\chi + d^2 \rho - \&c.)\,\delta z$

» $+ (\chi - d\rho + \&c.)\,d\delta z + (\rho - \&c.)\,d^2 \delta z + \&c. = 0.$

» Eſta equaçaõ ſe refere ao ultimo ponto da integral » $\int Z$; mas he preciſo obſervar, que, como cada hum dos » termos, v. g. $p\delta x$, depende de huma integraçaõ par- » cial da formula $\int p d\delta x$, ſe pode ajuntar-lhe, ou dimi- » nuir-lhe huma quantidade conſtante. Ora a condiçaõ, » pela qual eſta conſtante deve determinar-ſe, he, que ella » faça deſvanecer o termo $p\,\delta x$ no ponto, em que prin- » cipia a integral $\int p\,d\,\delta x$: ſerá logo preciſo diminuir de » $p\,\delta x$ o ſeu valor neſte ponto: donde reſulta a regra ſe- » guinte. Seja o primeiro membro da equaçaõ (C) ex- » preſſo em geral por M, e ſeja o valor de M no pon- » to, em que principia a integral $\int Z$, deſignado por $'M$, » e no ponto, em que eſte integral acaba, deſignado por » M': ter-ſe-ha $M' - 'M = 0$ por expreſſaõ completa da » equaçaõ (C).

» Com tudo para ſe desfazer nas equaçóes achadas » das differenças indeterminadas δx, δy, δz, &c. $d\delta x$, » $d\delta y$, $d\delta z$, &c. &c. ſe examinará, ſe pela natureza do » problema ha entre ellas alguma relaçaõ dada; e ten- » do-as reduzido ao menor numero poſſivel, ſe fará de- » pois o coefficiente de cada huma das que ficarem, igual » a zero.

» Se ellas ſaõ abſolutamente independentes humas das

» ou-

» outras, a equaçaõ (B) nos dará logo as feguintes:

» $n - dp + d^2q - d^3r +$ &c. $= 0$,

» $N - dP + d^2Q - d^3R +$ &c. $= 0$,

» $\nu - d\varpi + d^2\chi - d^3\rho +$ &c. $= 0$, »

§. 5. Tal he o problema geral, de que vou fazer applicaçaõ aos tres feguintes objectos.

I.° Indagar a aquaçaõ geral das brachyftochronas, quaefquer que fejaõ as forças, que follicitem o movel tanto no vacuo, como nos meios refiftentes fegundo qualquer lei.

II.° Deduzir da equaçaõ geral a falfidade das Prop. 47, e 76 do fegundo Tomo da Mechanica de Euler, nas quaes efte celebre Geometra eftabelece por caracter das brachyftochronas a igualdade entre as forças centrifuga, e normal.

III.° Subftituir o verdadeiro caracter das brachyftochronas tirado da fua equaçaõ.

I.

§. 6. Problema. Achar a linha brachyftochrona tanto no vacuo, como nos meios refiftentes em qualquer hypothefe de forças, que follicitem o movel?

Soluçaõ. Defignando por x a abfciffa vertical, por y, e z as duas coordenadas horizontaes, e orthogonaes, a expreffaõ do tempo ferá $\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{u}$, ou $\int\frac{ds}{u}$, fendo ds o elemento da curva, e u a velocidade effectiva em cada ponto. Pela comparaçaõ defta com a expreffaõ geral $\int Z$ temos $Z = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{u}$, e $\delta Z =$

$$\frac{dx}{u\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,\delta dx + \frac{dy}{u\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,\delta dy +$$

$$\frac{dz}{u\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,\delta dz - \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{u^2}\,\delta u$$: mas pe-

los principios de Dynamica, reprefentando por T a força tangencial, he no vacuo $udu = Tds$, e confeguintemente $u\delta u = T\delta s$; logo $\delta Z = \frac{dx}{uds}\,\delta dx + \frac{dy}{uds}\,\delta dy + \frac{dz}{uds}\,\delta dz -$

$$\frac{Tds}{u^3}\,\delta s = \frac{dx}{uds}\,\delta dx + \frac{dy}{uds}\,\delta dy + \frac{dz}{uds}\,\delta dz -$$

$\frac{Tds}{u^3}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; e fazendo $\frac{\delta y}{\delta x} = p$, $\frac{\delta z}{\delta x} = q$,

ferá $\delta Z = \frac{dx}{uds}\,\delta dx + \frac{dy}{uds}\,\delta dy + \frac{dz}{uds}\,\delta dz - \ldots$

$\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}.\,\delta x$. Logo no valor geral de δZ ferá

$$n = -\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3},\ p = \frac{dx}{uds},\ P = \frac{dy}{uds},\ \varpi = \frac{dz}{uds},$$

e todas as mais quantidades $q, r, N, Q, R, \nu, X, \rho$, &c. iguaes a nada.

§. 7. Ora, como o problema he achar em geral entre todas as linhas poffiveis aquella do mais breve defcenfo, e naõ ha por confequencia relaçaõ alguma dada entre as differenças δx, δy, &c., mas faõ abfolutamente independentes humas das outras, teremos as tres equaçoes feguintes: (1.ª) $\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3} + d\left(\frac{dx}{uds}\right) = 0$, (2.ª) $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = 0$, (3.ª) $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0$. E como eftas tres equaçoes devem reprefentar huma curva unica, he precifo, que ellas fe poffaõ reduzir a duas fómente. Com effeito fe acha a primeira, fommando a (2.ª) multiplicada por $\frac{2dy}{uds}$ com a (3.ª) multiplicada por $\frac{2dz}{uds}$, integrando, fubftituindo $1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2$ por $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$, e differenciando de novo.

§. 8.

§. 8. Integrando por tanto as duas $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = o$, e $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = o$, temos $\frac{dy}{uds} = a$, $\frac{dz}{uds} = b$; logo $\frac{dy}{dz} = \frac{a}{b}$, que he equaçaõ á linha recta, projecçaõ orthogonal da curva fobre o plano horizontal. Donde fe conclue, que a curva eftá em hum plano vertical, e he por confequencia de fimples curvatura. Se a referirmos pois a duas coordenadas orthogonaes tomadas no feu mefmo plano, huma x, e outra t, que tenha a mefma origem que y, e z, ferá $t = \sqrt{y^2 + z^2} = y\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = z\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$. Logo $y = \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $dy = \frac{adt}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $z = \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $dz = \frac{bdt}{\sqrt{a^2+b^2}}$, e $ds = \sqrt{dx^2 + dt^2}$.

§. 9. Subftituindo por dy o feu valor na equaçaõ $\frac{dy}{uds} = a$, ou o de dz na outra $\frac{dz}{uds} = b$, virá de qualquer forte $uds = \frac{dt}{\sqrt{a^2+b^2}} = cdt$; e $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2 - u^2}}$.

§. 10. Se o meio he refiftente, e a refiftencia reprefentada em geral por R, em lugar de $n = -\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}$, que achámos na hypothefe do vacuo, ferá $n = -(T-R)\,ds\,\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}$, ficando tudo o mais da mefma forte, e as tres equações, que vem nefta hypothefe, fe reduzem ás mefmas duas $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = o$, e $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = o$. Logo

$dt =$

$dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ he a equaçaõ geral das brachyſtochronas, aſſim no vacuo, como nos meios reſiſtentes.

§. 11. Eſta equaçaõ he conforme com a que ſe acha no N°. 37 das obras de Joaõ Bernoulli; em que depois de moſtrar, que a brachyſtochrona naõ deve differir da curva, que hum raio de luz deſcreve, atraveſſando hum meio diaphano de denſidade continuamente variavel, ſegundo qualquer lei, acha para a curva deſcripta pelo raio de luz a dita equaçaõ: e a deduz de hum principio fyſico, ou antes metafyſico eſtabelecido por Fermat, e demonſtrado depois por Leibnitz, e Huyghens; a ſaber, Que hum raio de luz, paſſando de hum meio menos denſo para outro mais denſo, ſe refrange de ſorte, que o caminho desde o ponto luminoſo até o illuminado ſe faça no menor tempo poſſivel: donde ſe infere, que a razaõ entre o ſeno do angulo de incidencia, e o do angulo de refracçaõ he a inverſa das denſidades, ou a direĉta das velocidades, com que o raio penetra os meios.

§. 12. Como o methodo precedente ſe applica da meſma ſorte, ou a curva deva ter a propriedade de Maximum, ou de Minimum, fazia-ſe preciſo hum criterio para diſtinguir eſtes dous caſos.

Eſte he, o que deu le Gendre nas Mem. da Acad. Real das Scienc. de Pariz para 1786; aonde moſtra, que ſe v he funçaõ de x, y, p, q, r, &c. ſendo $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, &c. a quantidade $\int v dx$ ſerá hum Maximum, ou hum Minimum, ſegundo que $\frac{d^2v}{dr^2}$ for huma quantidade negativa, ou poſitiva, entendendo por r a ultima das quantidades p, q, r, &c., e ſendo $\frac{d^2v}{dr^2}$ o coefficiente de dr na differencial de $\frac{dv}{dr}$.

§. 13.

§. 13. Fazendo applicaçaõ ao presente problema, em que $\int \frac{ds}{u} = \int \frac{dt\sqrt{1+p^2}}{u}$ (fazendo $\frac{dx}{dt} = p$) he a expressaõ do Maximum, ou Minimum, teremos $v = \frac{\sqrt{1+p^2}}{u}$, $\frac{dv}{dp} = \frac{p}{u\sqrt{1+p^2}}$, e $\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{1}{u(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$, quantidade positiva. Logo o tempo na curva achada, ou $\int \frac{dt\sqrt{1+p^2}}{u}$ he hum Minimum.

§. 14. Para fazermos alguma applicaçaõ da equaçaõ geral das brachystochronas, supponhamos, que o movel he sollicitado no vacuo por huma força acceleratriz variavel P, que obra unicamente no sentido vertical.

Teremos nesta hypothese $udu = Pdx$; donde $u^2 = 2\int Pdx$, e $u = \sqrt{2\int Pdx}$: o que substituido na equaçaõ geral $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2-u^2}}$ a torna em $dt = \frac{dx\sqrt{2\int Pdx}}{\sqrt{c^2-2\int Pdx}}$; da qual se deduz facilmente $ds = \frac{cdx}{\sqrt{c^2-2\int Pdx}}$; que he a mesma, que se acha na Prop. 41 do segundo tomo da Mechanica de Euler.

Se o movel além da força acceleratriz vertical P fôr sollicitado tambem por outra acceleratriz horizontal Q, será $udu = Pdx + Qdt$, e $u = \sqrt{2\int(Pdx+Qdt)}$; logo $dt = \frac{dx\sqrt{2\int(Pdx+Qdt)}}{\sqrt{c^2-2\int(Pdx+Qdt)}} = \frac{dx\sqrt{2\int Tds}}{\sqrt{c^2-2\int Tds}}$, por ser a força tangencial $T = \frac{Pdx+Qdt}{ds}$..

Se o meio fôr resistente, e a resistencia representada

por R, será $udu = (T-R)\,ds$; logo $u = \sqrt{2\int(T-R)ds}$;

e $dt = \frac{dx\sqrt{2\int(T-R)ds}}{\sqrt{c^2-2\int(T-R)ds}}$.

II.

§. 15. Vamos agora ver, como da equação achada se deduz a falsidade das Prop. 42, e 76 do seg. tomo da Mechanica de Euler.

Da equação $uds = cdt$, ou $\frac{u}{\left(\frac{dt}{ds}\right)} = c$ se tira pela differenciação $du\left(\frac{dt}{ds}\right) = ud\left(\frac{dt}{ds}\right)$; mas chamando r ao raio osculador, he $d\left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{dx}{r}$; logo será $du\left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{udx}{r}$; donde $\frac{u^2}{r} = \frac{ududt}{dx.ds}$. E sendo no vacuo $udu = Tds = Pdx + Qdt$, teremos $\frac{u^2}{r} = (Pdx + Qdt)\frac{dt}{ds.dx} = P\frac{dt}{ds} + \frac{Qdt^2}{ds\,dx} = P\frac{dt}{ds} + Q\frac{(ds^2 - dx^2)}{ds.dx} = Q\frac{ds}{dx} + \frac{Pdt - Qdx}{ds}$. Mas $\frac{u^2}{r}$ he a expressaõ da força centrifuga, e $\frac{Pdt-Qdx}{ds}$ a da força normal, que chamemos N. Logo $\frac{u^2}{r} = Q\frac{ds}{dx} + N$. Donde se segue, que *na brachystochrona no vacuo será a força centrifuga igual á normal unicamente*, *quando* $Q = 0$; isto he, *quando as forças acceleratrizes forem sómente verticaes*: e por consequencia tambem na hypothese da gravidade obrar por direcções parallelas; na qual, como acima disse, foi primeiramente resolvido este problema, e achada a Cycloide.

§. 16. Nos meios resistentes he $udu = (T - R)\,ds =$

Pdx

$Pdx + Qdt - Rds$. Logo a equaçaõ $\frac{u^2}{r} = \frac{ududt}{ds.dx}$ se torna em $\frac{u^2}{r} = \frac{Qds}{dx} - \frac{Rdt}{dx} + N$: e por consequencia *nos meios resistentes nunca he na brachystochrona a força centrifuga igual á normal.*

§. 17. De tudo isto se conclue, que *a força centrifuga he igual á normal na linha do mais breve descenso somente, quando o móvel no vacuo fôr sollicitado por forças acceleratrizes unicamente verticaes variaveis, ou constantes*; e por consequencia *que a Prop. 76 he sempre falsa, e a 42 só naõ he falsa, quando as forças acceleratrizes fôrem unicamente verticaes.*

§. 18. Tomando pois por principio o caracter estabelecido por Euler, representado pela equaçaõ $\frac{u^2}{r} = N$, só acharemos a verdadeira equaçaõ da brachystochronas, quando o movel fôr sollicitado no vacuo por forças acceleratrizes sómente verticaes.

Seja por exemplo sollicitado sómente pela força da gravidade constante: teremos nesta hypothese $u^2 = 2gx$, $N = g\frac{dt}{ds}$; logo $\frac{u^2}{r} = N$ se torna em $\frac{2gx}{r} = g\frac{dt}{ds}$, ou

$$\frac{2gx}{\frac{dx}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}} = g\frac{dt}{ds}\text{; donde se tira } \frac{dx}{2x} = \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}\text{; integrando ,}$$

$\frac{1}{2}\log. x = \log. \left(\frac{dt}{ds}\right) + \frac{1}{2}\log. a$; $\sqrt{x} = \frac{dt}{ds}\sqrt{a}$, $ds = \frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, ou $dt = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$, que he a equaçaõ á Cycloide, e identica com a que nesta hypothese se tira da equaçaõ geral $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2-u^2}}$.

Seja

Seja sollicitado o movel pela força acceleratriz vertical variavel P, e $Q = 0$; será $u^2 = 2\int Pdx$, $N = \frac{Pdt}{ds}$:

logo $\frac{u^2}{r} = N$ será $\frac{\frac{2\int Pdx}{dx}}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)} = P\frac{dt}{ds}$, $\frac{Pdx}{2\int Pdx} = \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}$; e integrando, $\frac{1}{2}\log.(\int Pdx) = \log.\left(\frac{dt}{ds}\right) + \log. c$, e $\sqrt{\int Pdx} = \frac{cdt}{ds}$, ou $dt = \frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{c^2 - \int Pdx}}$; que he a mesma, que no §. 14 se deduzio da equaçaõ geral.

§. 19. Mas se o movel fôr sollicitado ao mesmo tempo pelas forças acceleratrizes P, e Q, naõ se poderá da equaçaõ $\frac{u^2}{r} = N$ tirar a verdadeira equaçaõ da brachystochrona.

Com effeito nesta hypothese será $u^2 = 2\int(Pdx + Qdt)$, e $N = \frac{Pdt - Qdx}{ds}$; logo $\frac{u^2}{r} = N$ se tornará em ...
$\frac{\frac{2\int(Pdx + Qdt)}{dx}}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)} = \frac{Pdt - Qdx}{ds}$, ou $2\int(Pdx + Qdt)\, d\left(\frac{dt}{ds}\right) =$

$Pdx.\frac{dt}{ds} - \frac{Qdx^2}{ds} = Pdx.\frac{dt}{ds} - \frac{Q(ds^2 - dt^2)}{ds} = (Pdx + Qds)\frac{dt}{ds} - Qds$; da qual se tira $\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}} = \frac{Pdx + Qdt}{2\int(Pdx + Qdt)} -$

$\frac{Qds^2}{2dt\int(Pdx + Qdt)} = \frac{Tds}{2\int Tds} - \frac{Qds^2}{2dt\int Tds}$; a qual só póde reduzir-se á verdadeira equaçaõ achada no §. 14, quando $\frac{Qds^2}{2dt\int Tds} = 0$, ou quando $Q = 0$.

§. 20.

§. 20. Ainda que a certeza, e evidencia dos principios, de que me servi, e a identidade da equaçaõ, que delles deduzi, com a que Joaõ Bernoulli derivou de principios totalmente differentes, naõ deixe lugar a duvidar das conclusões, que tirei; com tudo a authoridade de Euler he de tanto pezo, que julgo preciso mostrar o paralogismo, que ha na sua demostraçaõ.

§. 21. Na Prop. 40 chama elle v a altura devida á velocidade no ponto M, $v+du$ a devida á velocidade em m, e $v+du+ddw$ a devida á velocidade em n. Ora, sendo v a altura devida á velocidade em M, se o movel se movesse pela vertical BMG, seria $v+dv$ a altura devida á velocidade em G. Logo, estando os pontos G, m, n na mesma horizontal, temos $v+dv$, $v+du$, $v+du+ddw$ por alturas devidas ás velocidades em G, m, e n. Mas no Corol. 3.° da Prop. 40 suppõe, que sempre $du=dv$. Logo suppõe implicitamente, que sempre as velocidades saõ as mesmas em G, e m; o que com tudo só tem lugar, quando as forças acceleratrizes saõ unicamente verticaes, como elle mesmo mostra no Prop. 12, Corol. 1.°, e 2.° do II. Tom. da Mechanica.

Logo, sendo a Prop. 42 deduzida desta igualdade, he evidente, que ella só será verdadeira, quando a dita igualdade tiver lugar; isto he, no caso de serem as forças acceleratrizes unicamente verticaes: o que concorda com o que acima conclui.

Entaõ porém naõ só he $du=dv$, mas tambem $ddw=0$; porque as velocidades nos pontos G, m, e n, e em todos os mais, que estivessem na mesma horizontal, seraõ iguaes. He isto com effeito, o que se observa na Prop. 41.

III.

§. 22. Se na equaçaõ $\frac{u^2}{r}=\frac{udu.dt}{ds.dx}$ substituirmos por udu o seu valor Tds no vacuo, e $(T-R)ds$ nos meios resisten-

tes, teremos no primeiro caso $\frac{u^2}{r} = T\frac{dt}{dx}$, e no segundo $\frac{u^2}{r} = (T-R)\frac{dt}{dx}$. Mas $\frac{dt}{dx}$ he a tangente do angulo, que a curva, ou a sua tangente faz em cada pontò com a vertical. Logo da equaçaõ geral das brachystochronas se deduzem as duas seguintes Proposições, que estabelecem o seu verdadeiro caracter.

Prop. I.ª

Nas brachystochronas no vacuo he a força centrifuga igual á força tangencial multiplicada pela tangente do angulo, que a curva, ou a sua tangente faz em cada ponto com a vertical.

Prop. II.ª

Nas brachystochronas nos meios resistentes he a força centrifuga igual á dita tangente multiplicada pela differença entre a força tangencial, e a resistencia do meio.

§. 23. Se quizermos por exemplo a equaçaõ da brachystochrona no vacuo, quando o movel he sollicitado por quaesquer forças acceleratrizes vertical, e horizontal, da equaçaõ $\frac{u^2}{r} = T\frac{dt}{dx}$ teremos $\frac{2\int Tds}{r} = T\frac{dt}{dx}$, ou $2\int \frac{Tds.d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dx} = Tds.\frac{dt}{ds.dx}$; ou $\frac{Tds}{2\int Tds} = \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}$, e integrando $\frac{1}{2}$ log. $(\int Tds) =$ log. $\left(\frac{dt}{ds}\right)$ + log. c; $\sqrt{\int Tds} = c\frac{dt}{ds}$, e $dt = \frac{dx\sqrt{\int Tds}}{\sqrt{c^2 - \int Tds}}$.

§. 24. Semelhantemente se achará a equaçaõ das brachystochronas nos meios resistentes pelo caracter estabelecido na Prop. II.ª

OB-

OBSERVAÇAÕ ANATOMICA

De hum feto humano, que em consequencia de hum parto laborioso passou á bexiga urinaria.

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

A Noticia dos mais raros fenomenos da natureza, sendo com prazer acolhida na Republica Litteraria, tanto pela instrucçaõ que dahi nasce, como pela satisfaçaõ que resulta para o Filosofo, que medita sobre as operações naturaes, admira os seus maravilhosos effeitos, buscando imitallos, e indaga seus desvios para remediàllos, ou prevenillos, se lhe fôr possivel: he justo, que eu me apresse a publicar o seguinte facto, que a Anatomia me deu a conhecer.

Huma mulher de 25 annos de idade, robusta, e de temperamento biliioso, estando já no principio do setimo mez da sua gravidaçaõ, foi acommettida por huma violenta paixaõ, a qual durando quatro dias consecutivos, lhe causou notaveis desaranjos na economia animal, enfraquecendo principalmente as forças tonicas e digestivas, e irritando summamente o genero nervoso. Por conseguinte abortou incompletamente, quero dizer, houveraõ grandes dores no hyppogastrio, e na regiaõ lombar, acompanhadas de fortes contracções do utero, do diaphragma, e dos musculos abdominaes, rompêraõ-se as tunicas, que envolviaõ o feto, evacuou-se o liquido, em que nadava, e por fim sobreveio a hemorrhagia, que precede a separaçaõ da placenta, a qual pouco depois tambem sahio.

Por tanto causou justa admiraçaõ, que o feto naõ sahisse

se á luz, naõ obstante os extraordinarios esforços da mãi, e o continuo tenesmo, em consequencia dos quaes sentio ella huma violenta dor no ventre inferior, e depois começou a achar-se melhor. Desde entaõ deixáraõ as ourinas de sahir pela urétra, e vinhaõ pela vagina misturadas com os lóchios, o que fez suspeitar com fundamento, que havia communicaçaõ da bexiga para o utero, em consequencia de alguma rotura causada pelos violentos esforços da mãi. Gradualmente se foi augmentando depois a sensibilidade do abdomen pela inflammaçaõ, que ahi se formava; os lochios degeneráraõ em materia podre, e de cheiro cadaveroso, a qual irritava, e roía as partes por onde passava. Entaõ naõ houve mais duvida ácerca de estar morto o feto, e com effeito as suas putridas exhalações, communicando-se á massa humoral por meio dos vasos lynfaticos inhalantes, deraõ origem a huma hectica.

Ao principio de Julho de 1792 esta infeliz mulher se recolheu ao Hospital geral desta Cidade do Porto, isto já seis mezes depois do frustrado aborto: queixava-se entaõ de continua afflicçaõ, e de grande calor interno, e tambem *pelas* partes genitaes: o seu pulso era pequeno, e ligeiro; hum tumor duro, e desigual occupava a parte inferior do ventre, e julgava-se que era produzido pelos ossos do feto reprimidos no utero pela constricçaõ do seu collo, e por isso se applicáraõ alguns relaxantes emollientes, ordenou-se que ella tomaria semicupios tepidos todos os dias, fizeraõ-se algumas injecções no utero, pelas quaes se extrahiaõ alguns ossinhos, e prescreveo-se o uso da quina para restaurar as forças, e oppôr-se á degeneraçaõ septica dos humores; mas foi logo interrompida a sua administraçaõ, por quanto a doente dizia com razaõ, que ella lhe augmentava os calores, e ardores.

A 20 de Agosto sahiraõ alguns ossos por esforços naturaes, e já entaõ as pernas começavaõ a inchar; o fluxo alvino era frequente; a doente naõ podia dormir, e tinha suores frios pela cabeça, e agudas dores no ventre; o pulso

ſo eſtava apreſſado, e muito abatido. A 29 ſahiraõ mais oſſos, e entaõ me diſſe a enferma, que ſe achava muito mal, e que tinha dores por todo o corpo; no dia ſeguinte appareceraõ todos os ſymptomas mortaes, a fyſionomia ſe fez hippocratica, extinguio-ſe a falla, a lingoa ficou ſecca, e negra, e da meſma ſorte os dentes, os olhos ſe fixáraõ tendo perdido o ſeu luſtre natural, e o pulſo juntamente com a reſpiraçaõ perdeu a regularidade.

A 31, tendo a morte finalizado tantos ſoffrimentos, abri o cadaver, e eis-aqui os fenomenos, que ſe me appreſentáraõ: logo que comecei a inciſaõ dois dedos aſſima do embigo, onde eſtava a ponta do tumor, fez-ſe huma exploſaõ de ar corrupto, e appareceraõ as pontas de algumas coſtellas do feto já deſcarnadas, e denegridas: continuando a inciſaõ até abaixo, e ſeparando a ſynfiſe do pubis, abri todo o tumor, naõ podendo evitallo por cauſa da intima adherencia, que havia entre o ſeu involucro, e os muſculos abdominaes; e era por ventura o utero que continha os oſſos, como ſe tinha penſado? naõ certamente.. eſte ſingular fenomeno me cauſou juſta admiraçaõ, e excitou-me a proſeguir a minha indagaçaõ; era pois a bexiga urinaria, onde ſe achavaõ os reſtos do feto; com effeito deſcobri na ſua parte poſterior huma grande rotura correſpondente á vagina; entaõ ſoppus que na occaſiaõ do aborto, tendo-ſe o feto appreſentado obliquamente, fôra obrigado pelos violentos esforços da mãi a romper, e forçar a entrada para a bexiga, ou iſto foſſe logo, quando ella ſentio a forte dor, ou depois em conſequencia da ſupuraçaõ daquellas partes offendidas, e dilaceradas.

A bexiga eſtava por todos os lados adherente ás partes circunviſinhas, e o utero no eſtado natural, porém cuberto de huma groſſa membrana, a qual o unia á bexiga; os inteſtinos entortilhados eſtavaõ collados huns aos outros, tudo por conſequencia immediata da longa inflammaçaõ do abdomen, a qual coagulando o muco, que lubrificava eſtas viſceras, o tranſtornou em membranas.

 En-

Entre os offos do feto encontrei huma groffa lombriga morta, e naõ defcobrindo paffagem por onde ella poderia ter vindo dos inteftinos, penfei, naõ que foffe originada da podridaõ, como dizia Ariftoteles, mas fim de hum ovo (pois *omne vivum ex ovo*) ahi introduzido pela rotura da vagina por meio do ar, ou tambem pelo chylo da mãi, pois em fetos recem-nafcidos fe tem achado muitas vezes lombrigas.

Subindo aos hyppocondrios notei, que o figado eftava muito obftruhido ainda que com a côr natural, e que a bexiga do fel abundava de atrabiles, cuja degeneraçaõ, de que tanto fallou Hippocrates, alguns Medicos tem negado fem razaõ; o baço pelo contrario tinha menor diametro, e maior confiftencia, do que em eftado natural.

Quantos outros fenomenos fingulares teriaõ enriquecido os noffos annaes, e illuftrado a Medicina, fe acafo entre nós naõ exiftiffe geralmente hum horror infenfato contra as indagações Anatomicas. Nos paizes mais cultos da Europa já as leis franqueáraõ efte caminho para a util inftrucçaõ, mas naõ fei para quando differimos arrancar efte abufo, moftrondo ao público as vantagens, que dahi refultariaõ para o bem da fociedade, e quanto he prejudicial a fua obftinaçaõ.

SIN-

SINGULAR OBSERVAÇAÕ,

Que confirma a sympathia do estomago com a cabeça.

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

O Author da natureza conftruio de hum modo taõ fabio e artificiofo o corpo humano, que ficáraõ fuas partes mutuamente dependendo humas das outras, e como por alliança unidas eftreitamente, a fim de confpirárem para a confervaçaõ do todo; de forte, que fendo huma dellas offendida, as mais daõ promptamente indicios claros do feu refentimento, e lhe preftaõ todo o auxilio; ifto por intervençaõ do principio vital, e do fyftema nervofo, mufcular, fanguineo, e cellular. *Consentiente una, consentiunt omnes* (†). Hippocrates nas fuas admiraveis obfervações.

Mas efta correfpondencia fe moftra mais intima entre humas, que outras partes, como por exemplo, entre o eftomago, e a cabeça. Defta he que pertendo fallar, vifto fer o feu conhecimento mais util, e mais neceffario para a praxe Medica, expondo finalmente huma curiofa obfervaçaõ, que a confirma, e attefta de hum modo naõ equivoco.

Efta maravilhofa fabrica do noffo Fyfico, á que já os Antigos attenderaõ com particularadade, dando-lhe o nome de *consenso, ou sympathia*, merece todo o cuidado no tratamento das moleftias; por quanto decide as indicações, e os meios de as fatisfazer: tambem fornece ao Fyfiologifta objecto de obfervações intereffantes para a explicaçaõ de alguns fenomenos, os quaes, naõ obftante a fua naturalidade, fe apprefentaõ com afpecto admiravel e eftupendo.

De

De todas as visceras he o estomago aquella, que tem com todas as partes do corpo a mais insigne sympatia; por quanto naõ só as excita, e fortalece instantaneamente, pela força tonica dos alimentos (como se observa logo que se come) e as nutre depois com a substancia alimentar, que produz a digestaõ; mas tambem as faz participantes dos sentimentos de suas afflicções, e incommodos.

Nem isto he muito de admirar, se com effeito o Creador supremo o constituio parte principal do corpo, e fonte alimentar, donde as mais houvessem de receber quotidianamente os auxilios necessarios, para a reparaçaõ dos continuos estragos das funcções da vida; o que moveo Hippocrates a dizer, *Ventriculus dat omnibus, et ab omnibus accipit; marisque potestatem habet*; Van-Helmont pela mesma razaõ nelle collocou o assento da vida, e o maior poder do corpo.

Com tudo o seu commercio mais intimo, e a sua maior influencia he sobre a cabeça; razaõ porque ordinariamente dimanaõ delle as molestias da cabeça; o que deu motivo para a util divisaõ dellas em Idiopaticas, e sympaticas.

As obras dos mais celebres Medicos, tanto modernos como antigos, abundaõ de observações e factos, que provaõ a realidade desta uniaõ; Hippocrates, Galeno, Hoffmann, Stoll, Tissot, e outros muitos notáraõ, frequentes vezes, que a saburra estomacal era a causa de agudas dores de cabeça, de Frenezía, Manía, Vertigens, Ophthalmias, Othalgias, e Odonthalgias; a Apoplexia ordinariamente provém da nimia repleçaõ do estomago (como vi succeder em França a hum amigo, e condiscipulo), e tambem do seu vicio bilioso, e pituitoso; da sua inaniçaõ, ou atonia resulta sempre a vertigem, o desfalecimento, e tambem o delirio chronico, assim como observou Vith; finalmente he constante, que a sua irritabilidade natural, ou excitada por qualquer estimulo, produz convulções nas partes superiores, a Epilepsia, o Trismo, e outras queixas nervosas, e por ultimo a alienaçaõ do espirito; disto fôraõ teste-

testemunhas Van-Swieten, Stoll, Rosen, e Harrisio; e a pratica no-lo mostra todos os dias.

Nem eu descubro outra fonte, donde tragaõ origem os delirios das febres gastricas, os chamados feitiços, e muitos desarranjos do cerebro, os quaes hum emetico dissipa instantaneamente. Van-Helmont nos refere, que tendo certo homem comido duas oitavas de sementes de Meimendro branco, *Hyosciamus albus*, ficára subitamente louco, mas que hum vomitorio logo o restituíra ao antigo estado: muitos effeitos deste genero sabemos terem causado as Daturas, a Belladona, e outras da Pentandria, como tambem o Ranunculo malvado, o Rhaphano Rhaphanistro, o Lólio temulento &c.

A observaçaõ, que vou expôr, e que he digna de occupar por hum instante a imaginaçaõ de qualquer observador da natureza, prova sufficientemente, que hum estimulo fysico reprezado no estomago, vellicando os seus numerosos e sensiveis nervos, e promovendo as suas oscilações, e as das tunicas musculares, por onde se distribuem, faz com que estas se communiquem logo á cabeça; onde perturbando, e atropelando a regularidade da circulaçaõ dos espiritos animaes, e desarranjando por conseguinte as funções intellectuaes, induzem o desvarío, e a alienaçaõ da alma; a qual sem a perfeita harmonia do sensorio commum, naõ póde cogitar, nem imaginar recta e perfeitamente.

Huma mulher de 42 annos de idade, robusta, e de bom temperamento, tendo sido conduzida por outras, que se diziaõ amigas, a huma merenda fóra da Cidade, estas depois de a terem regalado com alguns guizados, e licôres espirituosos a ponto de a embriagarem, lhe fizeraõ comer insensivelmente huns bolos doces, dentro dos quaes tinhaõ maliciosamente semeado pedaços de cabellos grossos, e entortilhados no intento de a enfeitiçarem; voltando ella muito satisfeita, naõ sentio incommodo algum nas vinte e quatro horas seguintes, excepto a inappetencia de comer; passado este intervallo, começou a queixar-se de nau-

 sea,

ſea, e oppreſſaõ no eſtomago, ao que brevemente ſuccedeu a alienaçaõ do eſpirito, e demencia, com perda de todo o conhecimento, até de ſeu marido.

Neſte miſero eſtado permaneceu dois dias, ſem que nelles comeſſe, ou bebeſſe couſa alguma, nem taõ pouco ſe entregaſſe ao ſomno; hora parecendo meditar profundamente, hora alegrar-ſe muito, e por fim enchendo-ſe de furor maniaco, e querendo ſahir para fóra.

Sendo eu chamado em ſeu auxilio, depois de ter ouvido a narraçaõ de todas as precedencias, ſuſpeitando que a indigeſtaõ de algum máo alimento, que houveſſe comido na tal merenda, foſſe a cauſa primaria deſta doença, reſolvi dar-lhe immediatamente dous grãos de tartaro emetico desfeitos em agoa ſufficiente; com effeito meia hora depois de tomado eſte remedio, tive a ſatisfacçaõ de ver ſahir pelo vomito hum bolo de cabellos duros, e entortilhados, de grandeza de huma caſtanha, em cuja ſuperficie appareciaõ algumas pontas; entaõ, como por milagre, recuperou a doente o ſeu antigo juizo, e logo ſe queixou de eſtar muito moida, e muito debilitada; porém a reſpeito do como lhe tinha acontecido aquelle caſo, baſtantemente lhe admirava, e ácerca do que tinha dito, e feito, durante a alienaõ do eſpirito, me aſſegurou que nada ſabia, nem de couſa alguma ſe lembrava.

Eis-aqui como eſta mulher foi enfeitiçada, e como no Brazil os Negros enfeitiçaõ, ſervindo-ſe de meios ſemelhantes, e de alguns venenos, que unicamente atácaõ os nervos.

Segundo eſta expoſiçaõ, facilmente ſe collige a razaõ de todos eſtes fenomenos, e a ſua explicaçaõ; o que julgo ſer deſte modo: nas primeiras vinte e quatro horas, naõ ſentio eſta mulher incommodo algum notavel, por eſtarem os cabellos diſperſos, e involvidos pela maſſa dos alimentos; porém logo que eſta foi digerida, e expellida do eſtomago, ficando unicamente os cabellos, por ſerem ſummamente indigeſtos, fôraõ-ſe ajuntando, e entortilhan-

lhando huns nos outros pelas mesmas contracções do estomago nauseado; de maneira que estando formado o bolo, as pontas da sua circunferencia vellicavaõ, e offendiaõ os nervos do estomago, cuja irritaçaõ communicando-se ao cerebro, ahi causava commoções, que perturbando a ordem dos espiritos, davaõ lugar ao desarranjo das funções da alma; porém huma vez que foi lançado pelo vomito o estimulo, causa primaria de tudo, cessáraõ as oscilações, e se restabeleceu promptamente a harmonia do sensorio commum, e a antiga saude.

OBSERVAÇAÕ

De huma Thisica tuberculosa, e de huma concreçaõ calcárea, achada no utero.

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

HUma mulher de 27 annos de idade, e de constituiçaõ delicada, queixava-se, ha tempos, de tosse secca, alguma dyspnêa, e calor sobrenatural nos bofes, ao que ás vezes succedia a expectoraçaõ de muco tenue, misturado com alguns raios de sangue vivo; a constipaçaõ cutanea, que tinha ordinariamente, naõ só por causa da fatal inconstancia de temperatura, que este clima tem experimentado, ha alguns annos a esta parte, mas ainda pelo seu natural relaxamento de póros, dirigia todas as fluxões para os bofes, como centro mais fraco, e incapaz de reacçaõ; por cujo motivo ficando elles continuadamente opprimidos pela abundancia e tenacidade das materias da perspiraçaõ, lentamente se fôraõ formando tuberculos, e vomicas, donde nasceu a Thisica pulmonar.

Conduzio muito para o rapido progresso desta queixa o desprezo, que della fazia a doente, entregando-se com excesso a bebidas espirituosas, e a alimentos de má qualidade, sem recorrer á Medicina, antes que a molestia se arraigasse, e se fizesse mais poderosa que a natureza; esta incomprehensivel arte do Creador, ou força Divina, que por leis sabias, e constantes rege o universo, mantendo as leis primordiaes, oppondo-se á destruiçaõ dos entes, e reproduzindo-os, por huma regular successaõ!

Sendo eu chamado para tratalla, tive o dissabor de fa-

fazer hum prognostico funesto, em razaõ do auge, a que vi a molestia levada, e naõ encubri a insufficiencia das minhas forças, para vencer taõ poderoso inimigo; estava pois a doente muito extenuada, mas ainda com bastantes forças; o que admirava, visto o seu fastio, e a colliquaçaõ, que se fazia pela expectoraçaõ, suores, e diarrhéa; o pulso era duro, apressado, e irregular; a tosse vehemente, e tambem a suffocaçaõ.

Isto naõ obstante, determinei pôr em pratica todos os meios, que nos prescreve a arte em casos semelhantes, para abater o calor hectico, resolver as estagnações, e tuberculos dos bofes, repellindo, e evacuando as materias, e por fim corroborando-os, e dissipando a sua irritaçaõ; entre outros remedios, usei do Lichen Islandico, da Veronica, e Polygala; planta esta, que aqui florece abundantemente, sem que ninguem a conheça (como muitas outras Medicinaes), e que, segundo tenho experimentado, merece bem os elogios de Collin, e Stoll.

Porém tudo foi baldado (como se podia crer); chegou apressadamente a morte, e a doente lhe tributou a sua devida homenagem; entaõ propuz abrilla, naõ só para que os parentes vissem o deploravel estado do peito, mas ainda para que se desenganassem a respeito da presumpçaõ, que tinhaõ de prenhez, em attençaõ a alguns indicios, que precedêraõ, e principalmente a hum tumor duro, que a doente sentia na regiaõ uterina, o qual bastantemente a incommodava; com effeito, sendo accolhida a minha proposiçaõ (ainda que com bastante repugnancia) executei-a com grande satisfacçaõ, por me ser aqui ordinariamente vedado lêr em semelhantes livros os segredos da natureza, e observar por esta via o genio das molestias, e os meios de que se servem para contaminar, e aniquilar a maquina humana; mas ah! que louco prejuizo! por ventura naõ he este o caminho, por onde temos vindo a ser uteis á humanidade, analysando as doenças no seu mesmo centro, e aprendendo como, e onde as devemos combater? naõ he

por esta manobra, que nos fazemos dignos do sagrado deposito da saude humana, instruindo-nos no conhecimento da estructura do corpo, e do jogo, e uso de todas as suas partes, para saber remediar o seu desarranjo?

Abrindo primeiramente o abdomen, divisei estar o utero fóra do diametro natural, isto he, do tamanho de huma laranja, aberto este tumor, fiquei assás maravilhado de achar a sua cavidade cheia de huma materia calcarea, de mediocre consistencia, a qual tendia a calculo; o que me fez recordar do singular caso, que se acha nas *Anecdotas de Medicina*, de huma Franceza da Cidade de Sens, a qual nove mezes depois de ter concebido, abortou incompletamente, por ficar dentro a criança, cujo tumor de dia em dia se foi endurecendo; por fim morrendo ella 24 annos depois, se lhe achou no utero hum globo de gesso, dentro do qual estava o esqueleto do feto, quasi petrificado.

Sendo o utero o emunctorio geral, para onde se dirigem todos os humores superfluos, e grosseiros, como diz o célebre Rodrigo de Castro, he natural que ahí se formem lentamente incrustações, e concreções terrosas, e lapideas, dos depositos das ditas fluxões, por via do calor natural da parte, o qual dissipa os humores mais tenues, e une os mais grossos, e feculentos; o que succede em todas as cavidades do corpo, como consta pela tradição dos Anatomicos.

Tambem conduzem para as concreções uterinas as fézes, que deixaõ os menstruos reprimidos, ou suprimidos; o que penso ter succedido á minha doente, por quanto só depois da sua falta de assistencia he que o tumor se foi manifestando no ventre inferior; Schéele, e Bergmann imagináraõ como causa d'estas concreções calculosas o predominio de certo ácido, a que chamaõ *Lithico*, o qual dissolvendo partes sólidas, e precipitando humores, fornece-lhes hum sedimento terroso; bem como succede nos gotosos, e rheumaticos inveterados.

Abrindo depois o thorax, achei nelle grande extravasaçaõ

ſaçaõ de ſôro ; producto da tranſſudaçaõ das vêas pulmonaes, e vaſos lynfaticos, por cauſa do ſangue, que ahi regurgitava, e eſtagnava, e tambem da falta de reabſorpçaõ, ou inhalaçaõ. Pelos bofes eſtavaõ diſperſos muitos tuberculos de differente grandeza, e conſiſtencia; e na parte eſquerda achei huma vômica, cujo humor era branco, e de máo cheiro; donde colligi a razaõ por que a doente nunca ſe pôde deitar, nem inclinar ſobre aquelle lado, por motivo da grande ancia, e ſuffocaçaõ, que lhe ſobrevinha immediatamente.

He para notar-ſe, que ſem embargo d'eſtas lesões, e da toſſe violenta, que continuamente a mortificava, ella naõ ſentia dôr alguma no peito; o que próva a inſenſibilidade dos bofes em tal circunſtancia; a expectoraçaõ nunca foi purulenta, nem de máo cheiro; razaõ por que nunca preſumi haver ulceraçaõ interna, mas ſim tuberculos, cuja inflammaçaõ, e ſuppuraçaõ promovem a Thiſica; o que frequentemente ſuccede neſta Cidade.

Porto 20 de Outubro de 1794.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE HABITAE

AB ANDREA RODRIGUES.

CUm major ſequentium obſervationum pars facta ſit in ſpecula Aſtronomica, ubi Eclipſium tempore tenemur adeſſe, ſciendum eſt 1.° Palatium Imperatoris, et domos Europeorum ſitum eſſe in urbe Tartarorum, in cujus angulum, qui reſpicit ortum, eſt Imperialis ſpecula in propugnaculo ad moenia, qui locus diverſus eſt a *Tribunale* Aſtronomico, quod in eadem Civitate Tartara non multum diſtat a Palatio: praedicta ſpecula diſtat 6″ ſecunda temporis ad ortum a Pekinenſe meridiano, qui ſecat urbem, et Palatium, ac primus a Sinis numeratur meridianus. Collegium vero Patrum Luſitanorum diſtat ad occaſum a meridiano 7″ temporis ſecunda, et a ſpecula 13″; et Reſidentia S. Joſephi P.P. etiam Luſitanorum, quae ſita eſt fere juxta magnam Palatii januam Orientalem, diſtat fere unum ſecundum temporis ad ortum à meridiano, et ab ſpecula 5″ temporis.

Sciendum 2.° has obſervationes factas eſſe ad tempus verum, ſeu app. ad quod adaptatum, correctumque fuit horologium partim per altitudines Solis correſpondentes, partim per lineam meridianam, in iis quae factae ſunt in ſpecula interdum diſiderantur ſecunda, ea de cauſa, quia quiſque debet portare ſuum parvum horologium, in quo raro notantur ſecunda, Sinenſes enim, quamvis de calculo ſint valde ſoliciti, de obſervatione tamen parum curant; nam ſtatim poſt obſervationem monetur Imperator de obſervatione diligenter facta, et ad adamuſſim calculo correſpondente, nec aliter moneri poteſt.

Sciendum 3.° Sinenſes dividere diametrum Lunae, ac Solis in decem partes aequales, ſeu digitos, ſingulos deinde digi-

digitos partiuntur in 60 minuta, ac quodlibet minutum in 60 secunda, idcirco sequentes observationes factae sunt more Sinensi.

Anno 1753 die 16 Maii in Collegio Pekinensi observavit Pater Augustinus Alerstein Mercurium in Sole. Ingresus h. 6. 44′ mane: medium h. 10. 9′. Totalis egressus h. 1. 32′ p. merid. in medio Mercurius distabat à centro Solis ad austrum h. 24.

Anno 1755 die 12 Januarii Luna texit Aldeberam: Ingressus recta contra Galileum h. 11 6′ 14″ p.-merid. egressus per Langrenum h. 12 26′ 58″ med. noctis. In residentia.

Anno 1760 die 13 Junii observavi in residentia Solis Eclipsim. Initium h. 4 26′ 0 p. merid. maximam obscurationem h. 5 57′ fin. h. 6 23′ 4″ dig. 9 42′. Dubitavit Imperator de magnitudine istius Eclipsis, vocansque coram se P. Alerstein, tunc temporis Tribunalis Praesidem, illum interrogavit quomodo ita magna fuit Eclipsis, cum in magna obscuratione, adhuc coelum erat satis clarum; et nondum satisfactus expedivit statim cursores ad Provincias *Hu Kuam*, et *Xan tum*, an revera ibi esset, sicut praenunciabatur; responsumque accepit a Proregibus, quod tempora maioris obscurationis adhuc viderentur homines tamquam arbores.

Anno 1762 die 17 Octobris observavi in residentia Init. Eclip. Solis h. 4 40′ p. merid. occidit Sol. h. 5 40′ cum dig. 5 40′.

Anno 1765 die 30 Augusti observavi in residentia tubo 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 51′ 2″ p. merid. Immers. h. 10 50′ 20″: Emers. momentum h. 12 31′ 36″ fin. h. 1 30′ 38″ p. med. noctem: dig. 19.

Anno 1766 die 25 Februarii in resid. tubo 7 ped. observavi Lunae Eclipsim Init. h. 2 18′ 42″ mane: max. obscur. h. 3 15′ 0, fin. h. 4 30′ 32″: dig. 3 34′.

Anno 1766 die 19 Aprilis in resid. Luna obtexit dimidiam partem Jovis: appulsus ad limbum Lunae h. 8 59′ 30″: Egres. totalis h. 9 8′ 55″.

Anno 1768 die 23 Decembris in resid. observavi tub. 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 4′ 44″ p. merid. Immers. h. 10 4′ 42″ : Emmers. h. 11 43′ 4″ fin. h. 12 41′ 58″: dig. 18 44′.

Anno 1770 in resid. observavi init. Eclip. Solis die 25 Maii h. 7 31′ 16″ mane : fin. h. 9 20′ 26″ dig. 4 8′

Anno 1771 die 23 Octobris in resid. tub. 5 ped. observavi Init. Eclip. Lunæ h. 11 20′ 20″ p. merid. : finem h. 1 37′ 50″ : dig. 4 10′.

Anno 1772 die 29 Januarii Luna obtexit Scorpionis stelam υ. Appulsus h. 4 16′ 35″ : Egressus h. 5 33′.

Anno 1772 die 11 Octobris observavi in resid. Init. Eclip. Lunæ h. 11 13′ 42″ p. merid. Immers. h. 12 22′ 10″ Emmers. h. 2 2′ 25″ : fin. h. 3 13′ 30″ , dig. 16 40′.

Anno 1773 die 23 Martii in resid. tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 1. 0′ 12″ max. obscurat. h. 2. 20′ 10″ : fin. h. 3 37′ 20″ dig. 4 : nimis aberravit haec Eclip. a calculo Tribunalis.

Anno 1773 die 26 Decembris Luna obtexit Aldeberam h. 4 54′ p. merid. Egres. h. 5. 34′ 0″.

Anno 1774 die 6 Setembris observavi in resid. tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 7. 15′ 30″ mane : max. obscurat. h. 8 13′ 2″ : fin. h. 9 19′ 15″ dig. 3 50′.

Anno 1775 in specula Astronomica die 15 Januarii tubo 5 ped. observavi Init. Eclip. Lunae recta contra Harpalum, h. 9 19′ 30″ : sum. obscur. h. 10 40′ 30″ : fin. 12 6′ 8″ p. m.

Anno 1775 die 26 Augusti in specula tubo 6 ped. cum dimidio observavi Init. Eclip. Solis h. 11 23′ 56″ ; Coelum erat aliquantulum nebulosum Solis tamen distingui potuit, max. obscur. in camera obscura h. 12 54′ 58″ : fin. h. 2 46′ 56″ : dig. 4 48′.

Anno 1775 die 6 Decembris Luna texit Aldeberam. Ingres. inter Grimaldum, et Aristarcum h. 5 34′ 30″ : egres. juxta Mare crisium h. 6 31′ 38″ : in resid.

An-

Anno 1776 die 21 Januar. praenuntiabat. Solis Eclip. Init. ex calculo h. 9. 36 mane: med. h. 10 20′ : fin. h. 11 6: dig. 1 47′: at propter tempus nebulosum observari non licuit.

Anno 1776 die 4 Febr. in specula tubo 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 8 4′ 30″ p. merid. Luna recta contra Gazendum. Immers. h. 9 5′. Emers. h. 10 53′ : fin. h. 11 57′ 50″: dig. 18. Citius incepit, quam calculus praedicebat.

Anno 1777 die 23 Januarii in specula. Init. Eclip. Lunae h. 10 38′ 30″ max. obscurat. h. 12 4: fin. h. 1 23′ 30″: p. med. noct. dig. 5 38′.

Anno 1777 die 20 Julii in specula tub. 5 ped. Init. Eclip. Lunae h. 7 56′ 30″: med. h. 8 32′, fin. h. 9 7′ 30″: dig. 0 57′ quia non perveniebat ad dig. unum de more; non fuit monitus Imperator de observatione.

Anno 1779 die 24 Novembris in specula tubo 6 ped. cum dimid. Init. Eclip. Lunae h. 1 57′ mane, Immers. h. 2 56′. Emers. h. 4 36′, fin. h. 5 35′: toto Eclipsis tempore Luna fuit conspicua, post totalem Immers. apparebat fusca, ac sanguinolenta, dig. 17 30′.

Anno 1780 die 18 Maii in ortu Lunae h. 7 10′ p. merid. praedicebat. Eclipsis Lunae, dig. 9 7′ post. max. obscurationem, sed vapores ita crassi ut Lunae faciem omnino impedirent: apparuit tandem eclipsata Luna h. 7 30′; ac pars maior eclipsata ita obtenebrata apparebat, ut nihil albedinis, aut rubedinis inspiceret, eodem modo usque ad finem, quem in specula tubo 6 ped. observavi h. 8 30′ p. merid.

Anno 1782 die 21 Setemb. in specula Init. Eclipsis Lunae h. 9 5′ 30″ p. merid.: fum. obscur. h. 10 12′ : fin. 11 12′ : dig. 3 16′: Eandem observavit in residentia P. Joannes de Seixas. Init. h. 9 6′ 30″ : fin. h. 11 12′ 29″.

Anno 1783 die 19 Martii in specula Init. Eclip. Lunae h. 3 18′ 30″ mane. Immerf. h. 4 18′ : Luna occidit h. 6 2′ ante Emersionem. Acceleravit aliquantulum a calculo Tribunalis.

An-

Anno 1784 die 16 Augusti expectabatur hic Eclipsis Solis Init. h. 5 32′ mane; summam h. 6 14′ : fin. h. 6 59′ : dig. 1 5′ ; at coelum fuit ita nebulosum ut nihil observari potuerit; imo post h. 8. incaepit pluvia non parva, et ita monitus a nobis fuit Imperator.

Anno 1784 die 30 Augusti in specula tub. 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 13′ p. merid. sum. h. 10 34′ : fin. h. 11 56′ : dig. 6 40′.

Anno 1785 die 5 Augusti in specula tub. 6 ped. cum dimidio Init. Eclip. Solis h. 6 38′ ; sum. h. 7 39′ : fin. h. 8 49′ : dig. 4 17′ : adamussim cum calculo Tribunalis.

Anno 1786, 1787, ac 1788 : jam misi in Lusitaniam.

Anno 1789 d. 17 Novembris in specula tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 9 7′ 12″ : sum. h. 10 21′ : fin. h. 11 39′ 58″ mane : dig. in camera obscura 5 39′. Eandem Eclip. observavit in residentia P. Ignatius Franciscus tubo 5 ped. Init. h. 9 7′ 17″ : fin. h. 11 39′ 52″ : coelum erat clarissimum : acceleravit a calculo Tribunalis aliquot min.

Anno 1791 die 18 Aprilis. Imperatoris *Kien Lum* 56. Lunae tertiae die 16. In residentia S. Josephi Patrum Lusitanorum tubo 7 ped. cum dimidio observavi Lunae Eclipsim. Horologium correptum per lineam merid.

Init. Eclipsis	hor.	11.	3′	30″	p. m. temp. vero.
Sum. obscurat.	h.	12. 31		20	p. mer.
Finem Eclip.	h.	1. 58		20	p. med. noct.
Durat Eclip.	h.	2. 54		50	
Dig. Eclip.	7 40′				

Coelum erat satis clarum, quamvis, toto Eclipsis tempore, flaret ventus australis vehemens. Lunae pars obscurata ita nigra, ut nihil distingueretur, aut appareret usque ad finem Eclipsis.

An-

Anno 1793 die 26 Februarii, id est, Imp. *Kien Lum* anno 58 Lunae primae die 16 tubo 6 ped. in residentia S. Josephi observavi Initium Eclipsis Lunae partialis, recta fere contra Petavium ad laevam partes superioris disci Lunae h. 5 10′ 30″ : aer satis serenus usque ad h. 6 10′ temp. ver., quo tempore amplius videri non potuit propter montes occidentales in quibus Luna se abscondit cum Eclip. dig. 4 50′.

Anno Imperatoris *Kien Lum* 58. Lunae setimae die 15, id est, anno 1793 die 21 Augusti, sereno coelo, tubo 6 ped. observavi Pekini in residentia S. Josephi P.P. Lusitanorum Initium Eclipsis Lunae partialis a parte sinistra inferioris limbi orientalis recta inter Aristotelem, ac Platonem tempore vero h. 9 15′ 4″ p. merid. : max. obscurationem h. 10 39′ 4″ : finem h. 12 3′ 3″ : dig. 7 20′ more Sinensi, sive 8 48′ more Europ.

Anno 1794 die 15 Februarii Pekini in resid. S. Josephi tubo 5 ped. observavi Lunae Eclip. incipientem a superiori Lunae limbo partis sinistrae recta fere contra Ticonem Init. h. 3. matutina 54′ 50″ tempo vero. Immersionem totalem h. 5 2′ 30″ ; max. obscurationem h. 5 33′ 0″ : occidit Luna h. 6 43′ cum Eclip. dig. Sinens. 11 31′ ab inferiori Lunae limbo dextrae partis. Coelo sereno.

Anno *Kien Lum* 60 Lunae primae die prima, id est, anno Christi 1795. die 21 Januarii observavi Pekini in resid. S. Josephi PP. Lusitanorum Solis Eclip. horisontalem : ortus Solis h. 7 11′ : apparuit Sol sereno Coelo, cum Eclipsi dig. 7 19′ a parte inferiori sinistra Solis, post max. obscurationem, quae ex calculo praenuntiabatur h. 6. 54′, dig. 8 54′ more Sinico : fin. ejusdem Eclip. h. 8. 0′ 40″ temp. vero.

Eodem anno 60 Imper. Lunae sextae die 17, id est, 1795 die prima Augusti observavi in eadem resid. S. Josephi tubo 6 ped. initium Eclip. Lunae partialis h. 2. matutina 4′ 55″ erant tamen aliquae nubeculae circa Lunae limbum : medium Eclip. h. 3 13′ 53″ : fin. ejus h. 4 22′ 52″ temp. vero : dig. 2 16′ more Sinensi.

Accedit Observatio Eclipsis Solis die 15 Julii 1730, habita Pekini in publico ejus Regiae Observatorio, a PP. Ignatio Kegler, et Andrea Pereira Societatis Jesu.

EO die coelum a summo mane dense obnubilatum, ac postea in pluvias resolutum, copiosos imbres dejecit proxima ante Eclipsim hora; ita ut Eclipsim alii quidem observari posse pene jam desperarent, alii vero non apparituram sibi gratularentur: cum ex insperato sub ipsum Eclipsis initium sistere pluviae, simulque nubes rarescere caeperunt, ac post horae quadrantem per rariora nubila nudis oculis spectabile apparere corpus Solis, superne ex parte borea non nihil ad dexteram, seu occidentem versus Eclipsi infectum circiter sesquidigitum. Igitur purgata e vestigio area, et madore utcunque absterso, exprompsimus, quod pro observatione coram spectatoribus multis commonstranda praeparaveramus organon, ad speciem Solis scilicet per telescopium 6 pedum sinicorum excipiendam in orthogonaliter subjecta mensula, e cujus centro ad amplitudinem apparentis speciei accurate descriptus erat circulus per 10 digitos more Sinico divisus. Parati quoque habebantur in charta munda plures circuli similiter divisi, et super illum successive applicandi, in quibus praesignatae erant phases eclipticae per singulos digitos apparuturae, secundum inclinationes Lunae ad lineam verticalem Solis. Interim vero dum Sol tenues nubes penitus evinceret, clareque distinctam in disco speciem redderet, aliud ad Solem dirigebatur telescopium duabus lentibus objectivis instructum, in ea inter se distantia, ut filare reticulum, in foco telescopii dispositum, pariterque per 10 digitos divisum, exacte quadraret apparenti magnitudini Solis atque per istud primo observatus fuit appulsus Lunae.

H.

H. 11 40′ a. m. ad dig. III. id est Europ. dig.			3 36′
H. 11 51′ . . . . ad dig. IV.			4 48.

Postea clarissime allucente Sole per hujus speciem in disco notati fuerunt, ut sequitur.

H. o. 2′. p. m. ad centrum	seu dig. V. Europ.	6	o′
H. o. 14	ad dig. VI.	7	12
H. o. 26½.	ad dig. VII. . .	8	24
H. o. 40	ad dig. VIII. . .	9	36
H. o. 51 max. Eclip.	dig. VIII¼. . .	9	54
H. I. 2 regress.	ad dig. VIII. . .	9	36
H. I. 16 20″	ad dig. VII. . .	8	24
H. I. 27 50.	ad dig. VI. . . .	7	12

Dein rursus tenui nebula involutus Sol suam speciem infuscavit, telescopio tamen praefato clare visibilis ad cujus reticulum observatus est

H. I. 39′ p. m. regress.	ad dig. V. seu cent.	6	o′
H. I. 50	ad dig. IV. . . .	4	48
H. 2. o	ad dig. III. . . .	3	36

Iterum emergens e nebula Sol clarissimam exhibuit speciem, ad quam porro notati sunt

H. 2. 9′ 20″ recessus	ad dig. II. . . .	2	24
H. 2. 18 20	ad dig. I. . . .	1	12

H. 2. 27 10 finis Eclipsis, qui itidem per aliud telescopium excellens 14 pedum Sinicorum eodem momento est annotatus.

Horologium denique correxit, atque direxit Sol ipse tum in magno sciatherico, armillaque aequatoria Observatorii singula minuta horaria commonstrans, tum per captas aliquot altitudines eadem momenta temporis comprobans.

Praeterea aliquot in Sole macularum occultationes, et retectiones observatae sunt. Macula maior, quae erat in

ipsa

ipsa perepheria dig. II. ad Nord-Ost immersa est h. 0 22′ p. m. sequentes aliae minores ibidem inter dig. II. et I. immersae sunt 1.ª h. 0. 27′ 50″ ; 2.ª h. 0. 31′ 40″ ; 3.ª h. 0. 37′ 10″ ; 4.ª h. 0. 38′ 35″. Maculae duae inter dig. III. et IV. versus Sud-west retectae sunt una h. 1. 18′ 45″; altera h. 1. 23′ 50″, quarum immersiones non fuerunt annotatae. Maculae 4 ad Nord-ost retecte fuerunt 1.ª h. 2. 5′ 20″ ; 2.ª h. 2. 7′ 30″ ; 3.ª h. 2. 11′ 25″ ; 4.ª h. 2. 12′ 25″.

OB-

OBSERVATIO ECLIPSIS LUNARIS HABITA, DIE 3 JANUARII ANNO 1787, IN COLLEGIO ROMANO A JOSEPHO CALANDRELLI.

Telescopio achromatico pollicum 18, *micrometro objectivo achromatico instructo, diametrum apparentem amplificante vicibus* 40.

	Temp. ver.
Initium penumbrae sensibilis	10^{h}48′ 18″
Initium umbrae verae	10 50 13.

Micrometri partes exponentes Lunae Phases obcuras.	Temp. ver.	Micrometri partes exponentes Lunae Phases obscuras in egres.	Temp. ver.
1470	10^h 56′ 28″	110	13^{h}34′ 38″
1185	11 1 49	305	- 38 58
1030	- 7 12	345	- 41 11
995	- 13 42	476	- 43 46
807	- 18 42	504	- 45 46
681	- 24 6	587	- 48 13
425	- 31 15	665	- 50 13
318	- 33 50	729	- 52 40
280	- 37 53	824	- 54 22
236	- 40 28	861	- 56 11
101	- 44 40	909	- 57 59
Immersio totalis - - -	- 11 48 33	948	- 58 31
Emersionis initium ab		990	14 2 14
umbra - - - - - -	- 13 27′ 44″	1110	- 4 13
Emersio totalis ab umbra	14 26 45	1115	- 5 40
Emersio totalis a penum-		1180	- 7 27
bra - - - - - - -	14 28 43	1256	- 9 24
		1340	- 11 18
		1365	- 12 41
	Microm. Part.	1435	- 14 5
Diameter Solaris die 3 Januarii		1500	- 15 51
pluries mensurata - - - - - -	1752	1511	- 17 12
Diameter Lunaris pluries tum		1580	- 20 14
ante tum post Eclipsim men-		1663	- 21 22
surata - - - - - - - - -	1801	1736	- 22 59

Toto observationis tempore Coelum valde sudum fuit, et tantum initio Eclipsis, levissima nubecula initium penumbrae incertum reddidit.

OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS

Feitas na Cidade de S. Paulo, com hum Oculo Achromatico de 3 ½ pés.

POR FRANCISCO DE OLIVEIRA BARBOSA.

Eclises dos Satellites de Jupiter.

1788.	Dezembro.		d.	19.	I.	1.° S. I.	As	12^h	52′	0″
1789.	Fevereiro.		b.	28.	I.	3.° S. I.	As	9	34	54
		m.	b.	28.	E.	1.° S. I.	As	9	54	30
	Março.	m.	b.	16.	E.	2.° S. I.	As	11	5	30
			d.	22.	I.	4.° S. I.	As	10	43	37
		m.	b.	23.	E.	1.° S. I.	As	10	13	40
	Dezemb.	m.	b.	8.	I.	1.° S. I.	As	12	13	40
1790.	Fevereiro.		b.	1.	I.	1.° S. I.	As	8	32	13
			d.	17.	E.	1.° S. I.	As	9	5	38
	Março.	m.	b.	10.	E.	2.° S. I.	As	9	30	32
			b.	19.	E.	1.° S. I.	As	11	16	37

Noticia do Eclipse total da Lua de 28 de Abril de 1790.

Na noite do dia 28 de Abril de 1790, a mais bella, e ſerena que jámais ví, ou poderei vêr, obſervei neſta Cidade de S. Paulo da America Meridional o Eclipſe total da Lua. Eſte Phenomeno, que era annunciado no Almanack

nack Inglez, e que devia principiar em Greenwich ás $10^{h}\ 10'\ 15''$ naõ succedeu aquí antes das $7^{h}\ 3'\ 20''$, segundo pude avaliar com a Luneta Achromatica do Quadrante Astronomico de 1 pé de raio, pertencente á Collecçaõ de Instrumentos da 2.ª Partida, destinada para a Demarcaçaõ de Limites entre as Corôas de Portugal, e de Hespanha nesta Capitanía de S. Paulo.

Neste dia appareceu a Lua no horizonte desta Cidade as $5^{h}\ 35'$; por cuja causa achava-se ao tempo do Phenomeno em huma mais que sufficiente altura, para estar inteiramente livre dos vapôres do horizonte, quando os houvesse: mas naõ sei por que causa foi este dia taõ privilegiado pela natureza, que cessou inteiramente este infallivel, e constante Phenomeno.

Durou a nevoa neste dia singular até ás dez horas da manhã, e ficou depois disso toda a athmosfera taõ bella, o azul celeste taõ puro, e o horizonte taõ izento de vapôres, que sería determinado o principio do Eclipse, e mais circumstancias com a mesma exactidaõ, com que se determinou na mesma altura, em que se achava a Lua, quando este Phenomeno succedesse algum tempo antes. Além disto, naõ se percebia vento algum; e estava o calor taõ temperado, que chegou o Thermometro ao Meio-dia á 74° á pezar de ser já aquí principio de Inverno.

Tinha regulado a Pendula Astronomica por alturas correspondentes com toda a exactidaõ no dia 27; fiz o mesmo no dia 28, e ainda no dia 29, para que naõ houvesse mais outra incognita, do que o instante prefixo do Phenomeno, que se devia determinar, segundo o alcance do Oculo, e perspicacidade da vista do Observador. Chegou finalmente o annunciado instante; e á pezar da pouca commodidade, que tinha para observar este celebre, e natural Phenomeno, sempre fiz as observações seguintes.

Prin-

Principio do Eclipse total da Lua . . .	7h	3′	20″
Imm. tot. de Grim. 1.ª	7	6	50
Imm. tot. de Gal. 2.ª	7	8	50
Imm. de Kepl. 4.ª.	7	10	50
Imm. tot.	7	13	40
Imm. Mar. Hum. A.	7	16	40
Imm. tot.	7	22	10
Imm. de Copern. 11.ª	7	18	40
Imm. tot.	7	20	50
Imm. tot. de Plato 17.ª.	7	25	40
Imm. Mar. Seren. F.	7	31	30
Imm. de Tyc. 21.ª	7	34	10
Imm. tot.	7	36	40
Imm. tot. de Procl. 35.ª	7	48	50
Imm. Mar. Cris. H.	7	49	50
Imm. tot.	7	54	50
Imm. Tot. da Lua	8	1	0
Principio da Clar. ou Em.	9	37	30
Em. de Grim. tot. 1.ª	9	40	20
Em. de Arist. tot. 3.ª.	9	46	30
Em. de Kepl. tot. 4.ª	9	50	30
Em. de Copern. tot. 11.ª	9	57	15
Em. de Tyc. tot. 21.ª.	10	0	40
Em. de . . . tot.	10	7	30
Em. de . . . tot.	10	21	0
Em. de Mar. Cris. H.	10	28	10
Em. tot.	10	31	50
Fim do Eclipse total	10	35	0
Fim da Penumbra.	10	37	30

Com-

Comparaçaõ das Phases observadas em S. Paulo, com as que fóraõ observadas em Lisboa no Observatorio da Academia.

POR CUSTODIO GOMES DE VILLAS-BOAS.

Principio do Eclipse em Lisboa ás	9^h	32′	57″
O mesmo em S. Paulo ás	7	3	20
Differença dos meridianos	2	29	37
Começa a Imm. de Keplero ás	9	39	18
a mesm. em S. Paulo ás	7	10	50
Differença	2	28	28
Começ. a Imm. de Mar. Hum. A.	9	48	39
a mesma em S. Paulo	7	16	40
Differ.	2	31	59
Immersaõ total de Plato 17.ª	9	54	35
a mesma em S. Paulo ás	7	25	40
Differ.	2	28	55
Começa a Imm. do Tych 21. ás	10	4	26
a mesma em S. Paulo	7	34	10
Differ.	2	30	16
Immersaõ total do Tycho ás	10	6	19
a mesma em S. Paulo	7	36	40
Differ.	2	29	39
Começ. a Imm. de Mar. Crif. H. ás	10	19	41
a mesma em S. Paulo ás	7	49	50
Differ.	2	29	51
Imm. total de Mare Crisium ás	10	24	38
a mesma em S. Paulo ás	7	54	50
Differ.	2	29	48
Immersaõ total da Lua ás	10	31	40
a mesma em S. Paulo ás	8	1	0
Differ.	2	30	40

Começa a Emersaõ da Lua ás	12^h	7′	50″
a mes. em S. Paulo ás	9	37	30
Differ. . .	2	30	20
Emersaõ total do Tycho 21. ás	12	29	39
a mesma em S. Paulo ás	10	0	40
Differ. . .	2	28	59
Começa a Em. de Mar. Cris. H.	12	57	41
a mesma em S. Paulo	10	28	10
Differ. . .	2	29	31
Emersaõ total de Mare Cris.	10	1	40
a mesma em S. Paulo	10	31	50
Differ. . .	2	29	50
Fim do Eclipse total ás	13	5	46
o mesmo em S. Paulo	12	35	0
Differ. dos meridianos	2	30	41
Fim da Penumbra ás	13	7	43
a mesma em S. Paulo	10	37	30
Differ. dos meridianos	2	32	13

Temos pois, que de 29 observações feitas em S. Paulo se achaõ 15 correspondentes ás minhas, que fôraõ 27; e por tanto temos 15 resultados, comprehendidos entre 2^h 28′ 28″, e 2^h 31′ 59″; cujo meio entre todos dá 2^h 29′ 56″; porém como as observações do principio e fim do Eclipse, e do principio e fim da obscuraçaõ total, saõ mais certas, tomando hum meio entre os 4 resultados, que ellas daõ, temos 2^h 30′ 21″ pela differença dos meridianos daquí a S. Paulo.

Já em outro tempo determinamos a mesma longitude por 8 observações do 1.° Satellite de Jupiter, feitas, e mandadas pelo nosso Socio Bento Sanches d'Horta, as quaes deraõ 2^h 30′ 17″, cujo resultado naõ differe se naõ 4″ deste ultimo, e por conseguinte o meio entre ambos he 2^h 30′ 19″. Assim a longitude de S. Paulo está determinada com bastante certeza. Contada do 1.° Meridiano vem a ser 331°. 26′ 15″, e referida ao de Paris, 49° 3′ 45″.

F I M.

IN-

INDICE

Das Memorias, que contém este Segundo Tomo.

DEMONSTRAÇAÕ *do Theorema de Newton sobre a relaçaõ, que tem os coefficientes de qualquer equaçaõ algebrica com as sommas das potencias das suas raizes, e applicaçaõ do mesmo Theorema ao desenvolvimento em serie dos productos compostos de infinitos factores*, por Francisco de Borja Garçaõ Stockler - - - - - - - - pag. 1.

Memoria *sobre huma especie de petrificaçaõ animal*, pelo P. Joaõ de Loureiro - - - - - - - - - - - - - - 47.

Exame Phisico, e Historico *se ha, ou tem havido no Mundo diversas especies de homens*, pelo mesmo. - - - 56.

Descripçaõ Botanica *das Cibebas Medicinaes*, pelo mesmo. 82.

Consideraçaõ Phisica, e Botanica *da planta Aerides, que nasce, e se alimenta no Ar*, pelo mesmo. - - - 88.

Memoria, *em que se dá noticia de diversas especies de abelhas, que daõ mel, proprias do Brasil, e desconhecidas na Europa*, por Vicente Coelho de Seabra. - - - - - - - 99.

Observações Meteorologicas *feitas no Real Collegio de Mafra no anno de* 1785, por D. Joaquim da Assumpçaõ Velho. - - - - - - - - - - - - - - - - - 105.

Observações Meteorologicas *feitas no Real Collegio de Mafra no anno de* 1786, pelo mesmo. - - - - - - - 132.

Memoria *sobre os instrumentos de Reflexaõ*, por José Maria Dantas Pereira. - - - - - - - - - - - - - 159.

Reflexões *sobre certas sommações successivas dos termos das series arithmeticas, applicadas ás soluções de diversas questões algebricas*, pelo mesmo. - - - - - - - - 168.

Descripçaõ *de hum Monstro de especie Humana, existente na Cidade de S. Paulo na America Meridional*, por Bento Sanches Dorta. - - - - - - - - - - - - - - 187.

Observações Astronomicas *feitas na Cidade de S. Paulo na America Meridional*, pelo mesmo. - - - - - 190.

Me-

INDICE.

Memoria *sobre as Equações de Condição das Funcções Fluxionaes*, por Francisco de Borja Garção Stockler. - - - - 196.
Descripção *de hum Feto humano monstruoso, nascido em Coimbra no dia* 28 *de Novembro de* 1791, por Francisco Tavares. - - - - - - - - - - - - - - - - - - 296.
Loxodromia da Vida Humana, ou Memoria *em que se mostra, qual seja a carreira da nossa especie pelos espaços da nossa presente existencia*, por José Joaquim Soares de Barros. - - - - - - - - - - - - - - - - - 306.
Memoria *sobre o Restabelecimento da quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento*, por Manoel do Espirito Santo Limpo. - - - - - - - - - - 322.
Observações Astronomicas, e Meteorologicas *feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de* 1784, por Bento Sanches Dorta. - - - - - - - - - - - - - - 347.
Observações Astronomicas, e Meteorologicas *feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de* 1785, pelo mesmo. 369.
Determinação *das Orbitas dos Cometas*, por José Monteiro da Rocha. - - - - - - - - - - - - - - - 402.
Memoria *sobre algumas propriedades dos Coefficientes dos termos do Binomio Newtoniano*, por Francisco de Borja Garção Stockler. - - - - - - - - - - - - - - - 480.
Observações Astronomicas *feitas no Real Collegio de Mafra*, por D. Joaquim da Assumpção Velho. - - - - 512.
Noticia das Observações Astronomicas *feitas em o anno de* 1790, por Custodio Gomes de Villas-Boas - - 517.

Memorias dos Correspondentes.

Ensaio sobre as Brachystochronas, e Reflexões *sobre as Prop.* 42, *e* 76 *do II. Tomo da Mechanica de Euler*, por Francisco de Paula Travassos. - - - - - - - - - 3.
Observação Anatomica *de hum feto humano, que em consequencia de hum parto laborioso passou á bexiga urinaria*, por Manoel Joaquim de Sousa Ferrás - - - - 17.
Singular Observação *que confirma a sympathia do estomago com a cabeça*, pelo mesmo. - - - - - - - 21.

Ob-

Obſervaçaõ *de huma Thiſica tuberculoſa* , *e de huma concreçaõ calcárea* , *achada no utero* , pelo meſmo. - - 26.
Obſervationes Aſtronomicae Habitae , ab Andrea Rodrigues. - - - - - - - - - - - - - - - - 30.
Obſervatio Eclipſis Lunaris habita, die 3 Januarii anno 1787, in Collegio Romano , a Joſepho Calandrelli. - - 39.
Obſervações Aſtronomicas *feitas na Cidade de S. Paulo* , *com hum Oculo Achromatico de* 3 ½ *pés* , por Franciſco de Oliveira Barboſa. - - - - - - - - - - - - 40.
Comparaçaõ das Phaſes obſervadas em S. Paulo , *com as que fôraõ obſervadas em Lisboa no Obſervatorio da Academia* , por Cuſtodio Gomes de Villas-Boas. - - - - 43.

CATALOGO

Das Obras já impressas, e mandadas compôr pela Academia Real das Sciencias de Lisboa: com os preços, por que cada huma d'ellas se vende brochada.

I. BREVES Instrucções aos Correspondentes da Academia sobre as remessas dos productos naturaes para formar hum Museo Nacional, *folheto* 8.° - - - - - - - - - - 120

II. Memorias sobre o modo de aperfeiçoar a Manufactura do Azeite em Portugal remettidas á Academia, por João Antonio Dalla-Bella, Socio da mesma, 1. vol. 4.° - - - - - - 480

III. Memorias sobre a Cultura das Oliveiras em Portugal remettidas á Academia pelo mesmo Author, 1. vol. 4.° - - - - - 480

IV. Memorias de Agricultura premiadas pela Academia, 2. vol 8.° 960

V. Paschalis Josephi Mellii Freirii Historia Juris Civilis Lusitani Liber singularis, 1. vol. 4.° - - - - - - - - - - - - - - - 640

VI. Ejusdem Institutiones Juris Civilis, et Criminalis Lusitani, 5. vol. 4.° - 2400

VII. Olmîa, Tragedia coroada pela Academia. *folh.* 4.° - - - 240

VIII. Vida do Infante D. Duarte, por André de Rezende, *folh.* 4.° 160

IX. Vestigios da Lingoa Arabica em Portugal, ou Lexicon Etymologico das palavras, e nomes Portuguezes, que tem origem Arabica, composto por ordem da Academia, por Fr. João de Sousa, 1. vol. 4.° - - - - - - - - - - - - - - - - - 480

X. Dominici Vandelli Viridarium Grysley Lusitanicum Linnæanis nominibus illustratum, 1. vol 8.° - - - - - - - - - - - 200

XI. Ephemerides Nauticas, ou Diario Astronomico para o anno de 1789, calculado para o meridiano de Lisboa, e publicado por ordem da Academia, 1. vol. 4.°. - - - - - - - - - - - - 360

O mesmo para os annos seguintes até 1798. inclusivamente.

XII. Memorias Economicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa, para o adiantamento da Agricultura, das Artes, e da Industria em Portugal, e suas Conquistas, 3. vol. 4.° - - - 2400

XIII. Collecção de Livros ineditos de Historia Portugueza, dos Reinados dos Senhores Reys D. João I., D. Duarte, D. Affonso V., e D. João II., 3. vol. *folh.* - - - - - - - - - - 5400

XIV. Avisos interessantes sobre as mortes apparentes, mandados recopilar por ordem da Academia, *folh.* 8.° - - - - - - - - *gr.*

XV. Tratado de Educação Fysica para uso da Nação Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco de Mello Franco, Correspondente da mesma, 1. vol. 4.° 360

XVI. Documentos Arabicos da Historia Portugueza, copiados dos originaes da Torre do Tombo com permissão de S. Magestade, e vertidos em Portuguez, por ordem da Academia, pelo seu Correspondente Fr. João de Sousa, 1. vol. 4.° - - - - - - - - 480

XVII. Observações sobre as principaes causas da decadencia dos Portuguezes na Asia, escritas por Diogo de Couto em fórma de Dialogo, com o titulo de *Soldado Pratico*; publicadas por or-

dem da Academia Real das Sciencias de Lisboa, por Antonio Caetano do Amaral, Socio Effectivo da mesma, 1. tom. *in* 8.° *mai.* 480

XVIII. Flora Cochinchinensis; sistens Plantas in Regno Cochinchinæ nascentes. Quibus accedunt aliæ abservatæ in Sinensi Imperio, Africa Orientali, Indiæque locis variis, labore ac studio Joannis de Loureiro Regiæ Scientiarum Academiæ Ulyssiponensis Socii: Jussu Acad. R. Scient. in lucem edita, 2. vol. *in* 4.° *mai.* 2400

XIX. Synopsis Chronologica de Subsidios, ainda os mais raros, para a Historia, e Estudo critico da Legislação Portugueza; mandada publicar pela Academia Real das Sciencias, e ordenada por José Anastasio de Figueiredo, Correspondente do Numero da mesma Academia, 2. vol. 4.° - - - - - - - - - - - - - - 1800

XX. Tratado de Educação Fysica para uso da Nação Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco José de Almeida, Correspondente da mesma, 1. vol. 4.° 360

XXI. Obras Poeticas de Pedro de Andrade Caminha, publicadas de ordem da Academia, 1. vol. 8.° - - - - - - - - - - 600

XXII. Advertencias sobre os abusos, e legitimo uso das Agoas Mineraes das Caldas da Rainha, publicadas de ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco Tavares, Socio Livre da mesma Academia, *folh.* 4.° - - - - - - - - - - - - - - - - 120

XXIII. Memorias de Litteratura Portugueza, 6. vol. 4.° - - - 4800

XXIV. Fontes Proximas do Codigo Filippino, por Joaquim José Ferreira Gordo, Correspondente da Academia, 1. vol. 4.° - 400

XXV. Diccionario da Lingoa Portugueza, 1. vol. *fol. mai.* - - - 4800

XXVI. Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducção ao Methodo das Fluxões por Francisco de Borja Garção Stockler, Socio da Academia - - - - - - - - - - - - - - - - - 240

XXVII. Ensáio Económico sóbre o Comércio de Portugal, e suas Colónias, oferecído ao Principe do Brazil N. S., e publicádo de ordem da Académia Reál das Sciências pelo seu Sócio Jozé Joaquim da Cunha de Azerêdo Coutinho. - - - - - - - - 480

XXVIII. Tratado de Agrimensura por Estevaõ Cabral, Socio da Academia, em 8.° - - - - - - - - - - - - - - - - - 240

XXIX. Analyse Chimica da Agoa das Caldas, por Guilherme Withering, em Portuguez e Inglez. *folh.* 4.° - - - - - - - - 240

XXX. Principios de Tactica Naval por Manoel do Espirito Santo Limpo, Correspondente do Numero da Academia, 1. vol. 8.° - 480

XXXI. Memorias da Academia Real das Sciencias, 2. vol. *fol.* - 4000

XXXII. Memorias para a Historia da Capitania de S. Vicente, 1. vol. 4.° - 480

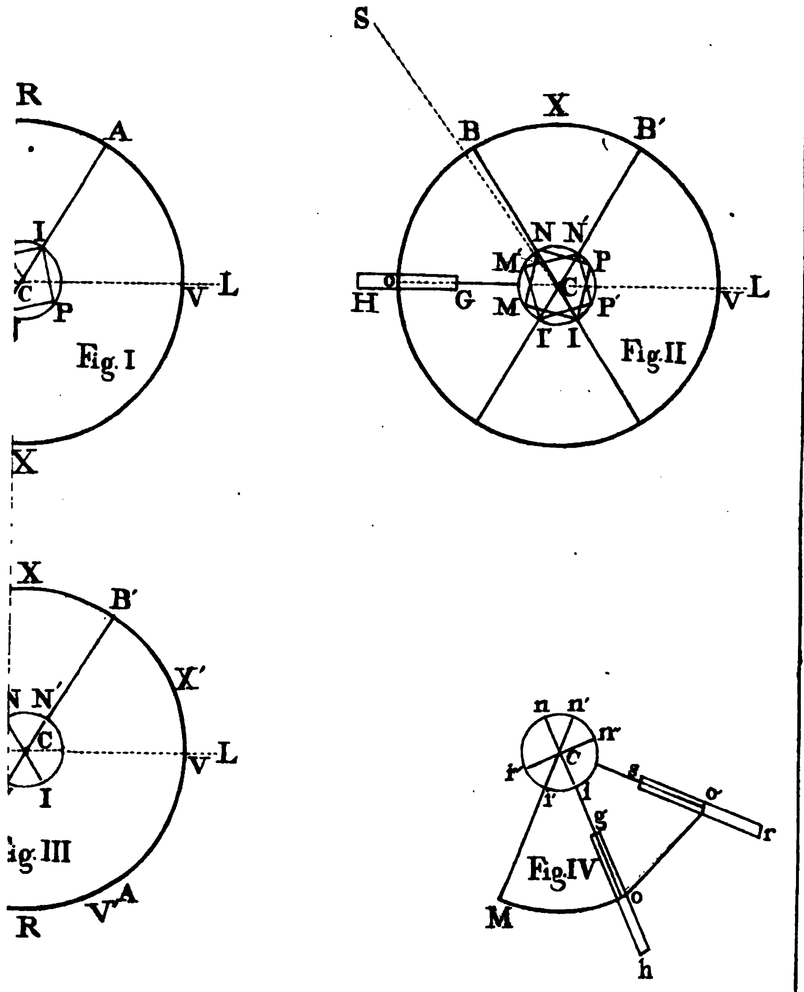
XXXIII. Observações Historicas e Criticas para servirem de Memorias ao systema da Diplomatica Portugueza, por João Pedro Ribeiro, Socio da Academia, Part. 1. 4.° - - - - - - - - 480

XXXIV. J. H. Lambert Supplementa Tabularum Logarithmicarum, et Trigonometricarum. 1. vol. 4.° - - - - - - - - - - - 960

XXXV. Obras Poeticas de Francisco Dias Gomes, 1. vol. 4.° - 800

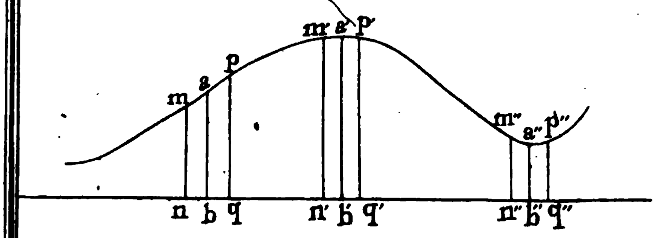
Vendem-se em Lisboa *na loja de* Bertrand; *e em* Coimbra, *e no* Porto *tambem pelos mesmos preços.*

Mem. pag. 159.



pag 15

Mem. pag. 168.



Mem. pag. 296.

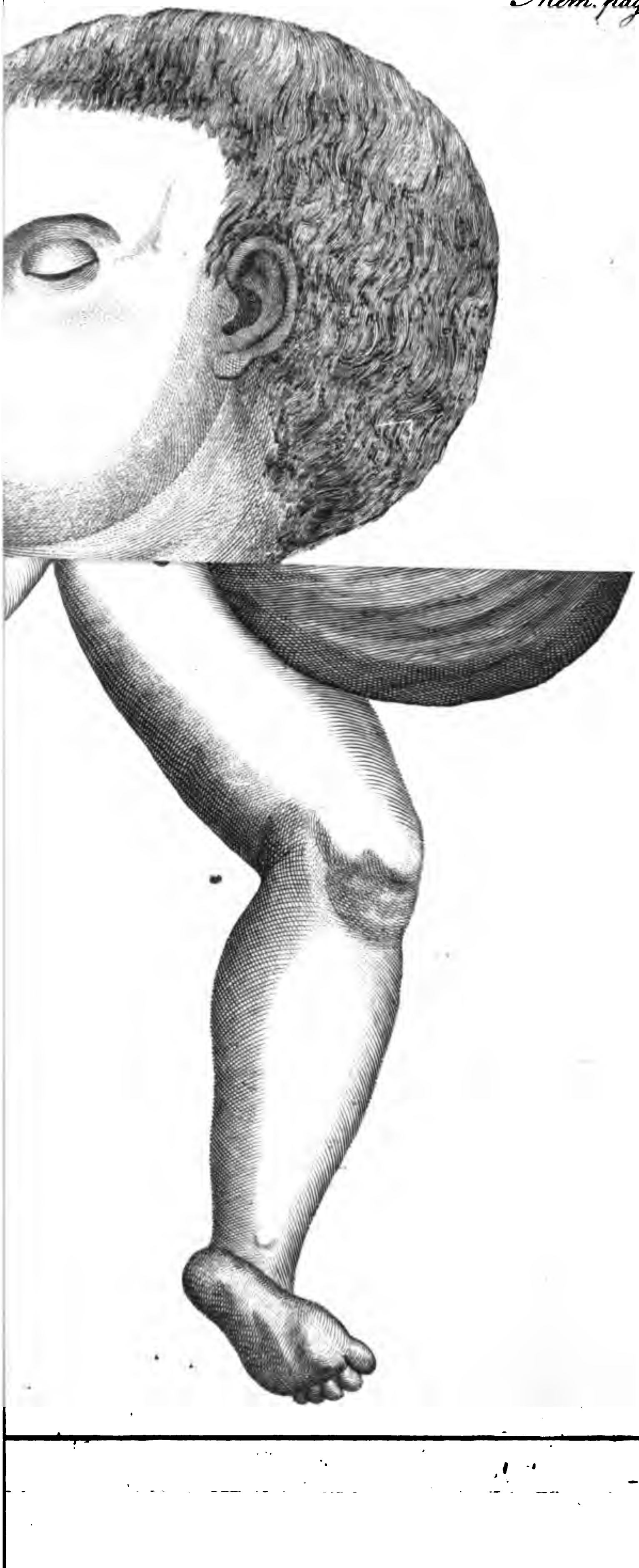


Fig. III

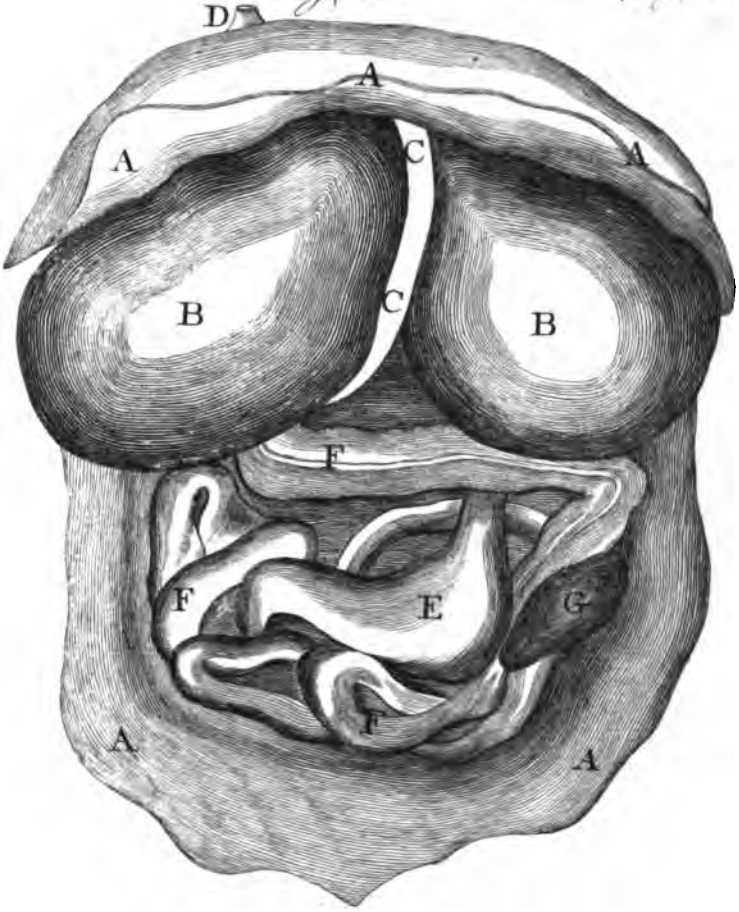


Fig. IIII

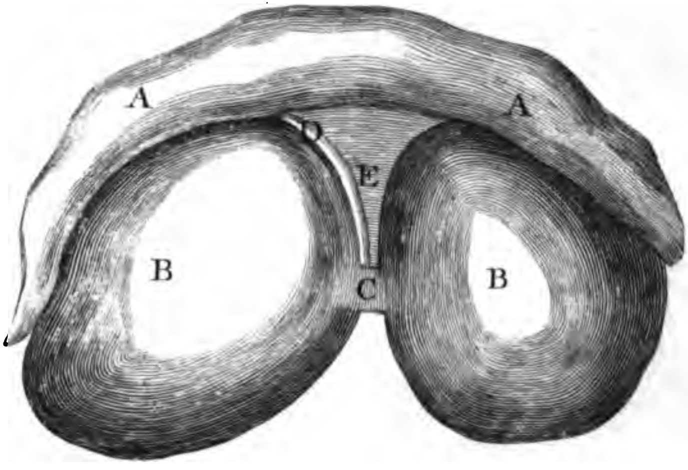


Fig. VI.

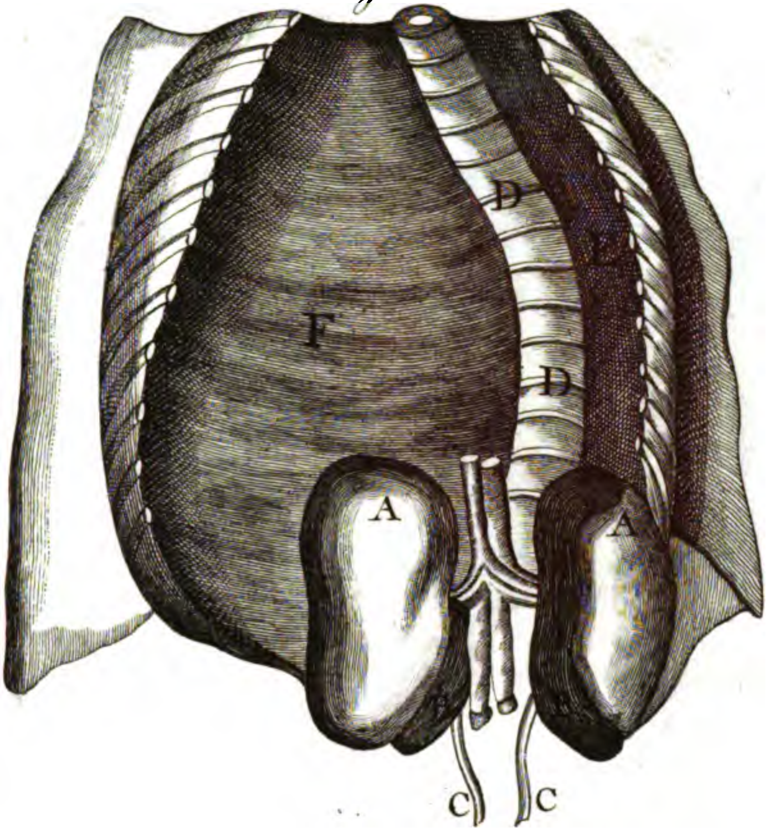
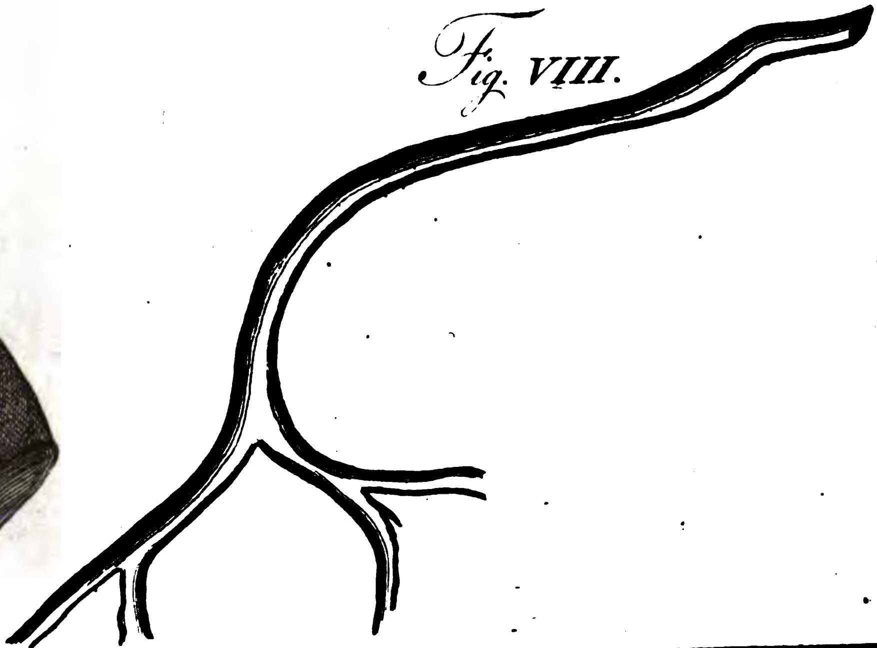


Fig. VIII.



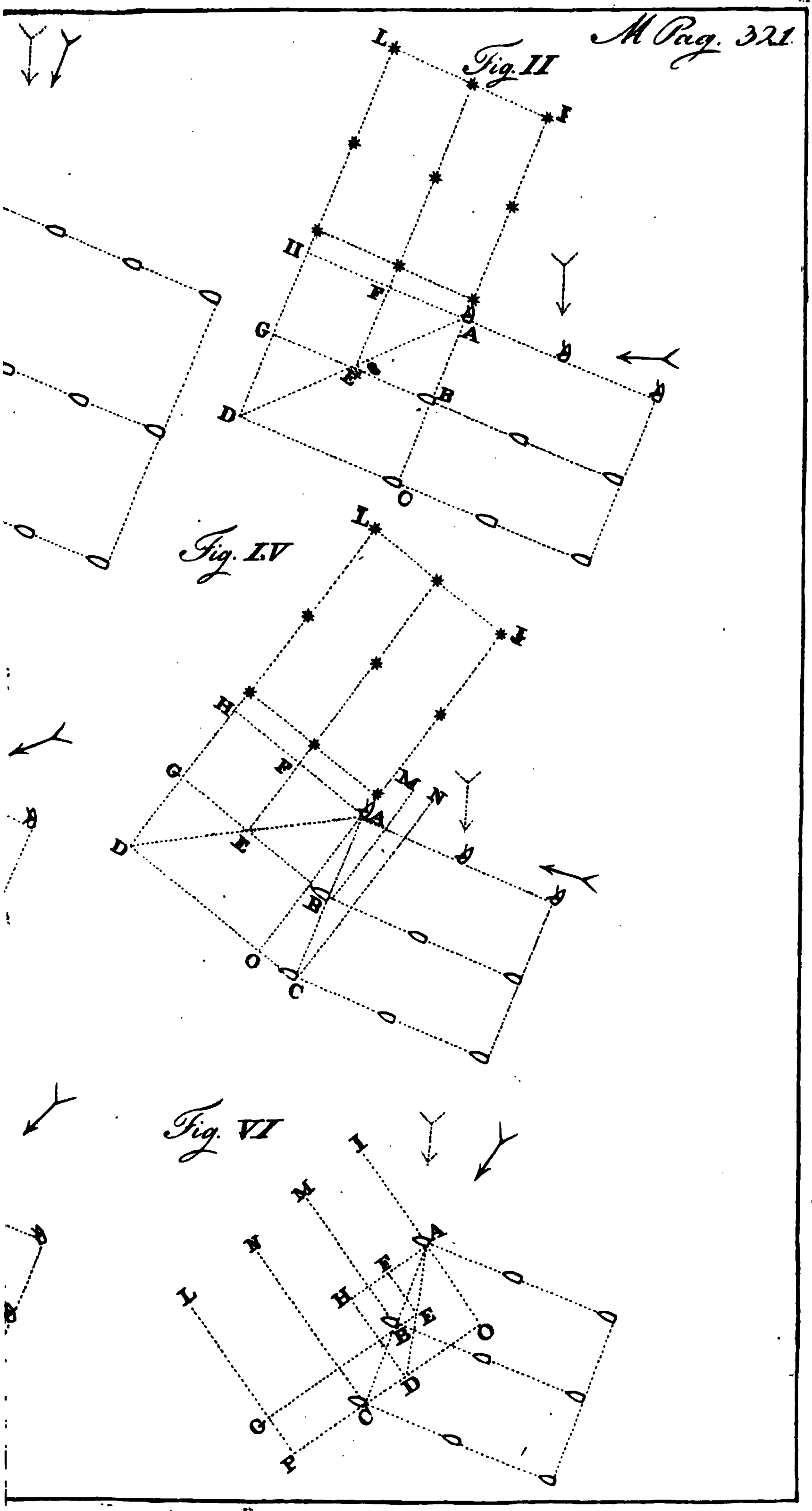


Fig. II
L
I
H
F
G
A
E
B
D
O
Fig. IV
L
I
H
G
F
M
N
A
D
E
E
O
C
Fig. VI
I
M
N
A
F
L
H
E
E
O
D
C
G
P

Fig. VIII

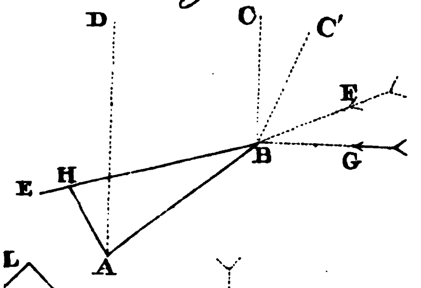


Fig. IX

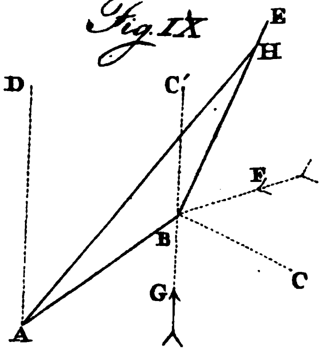


Fig. X

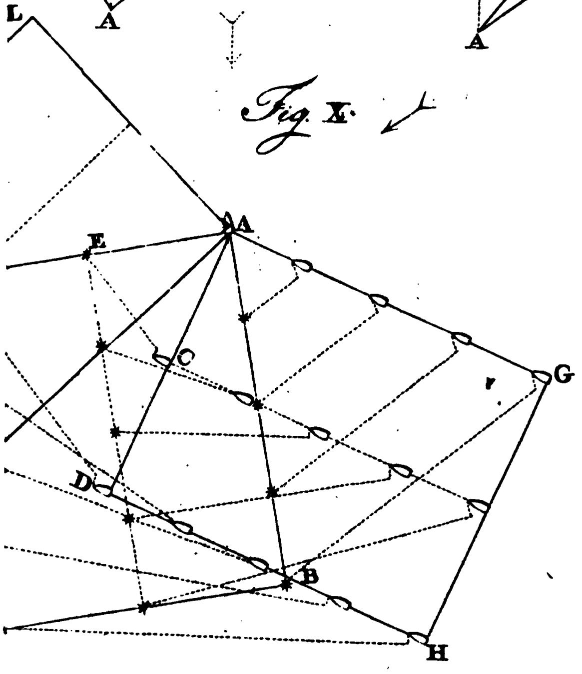
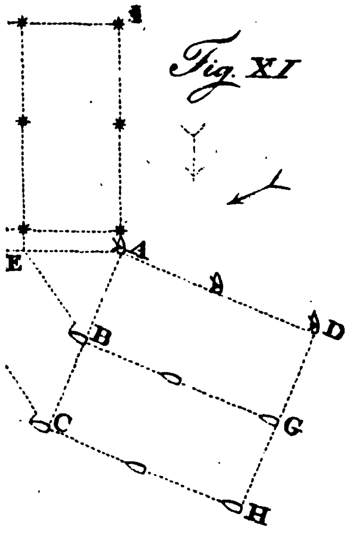
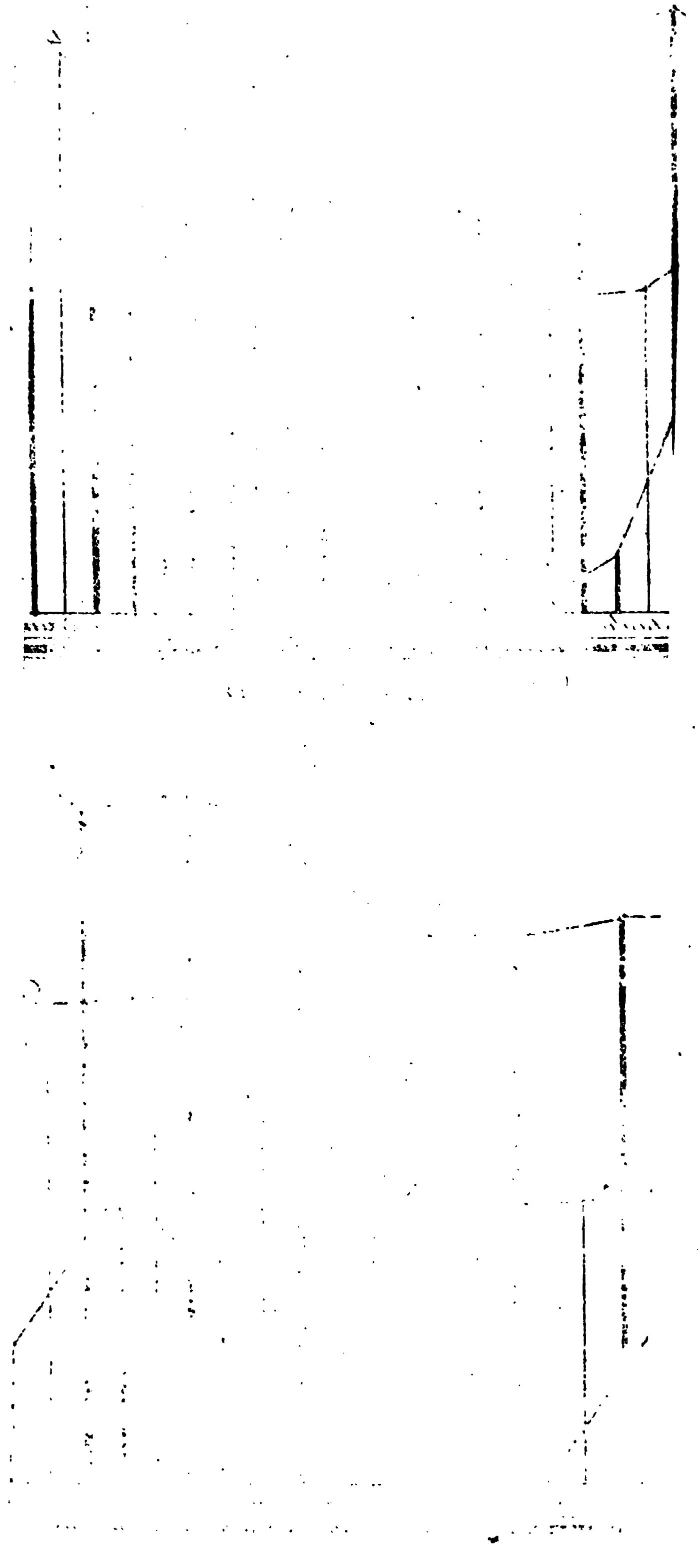
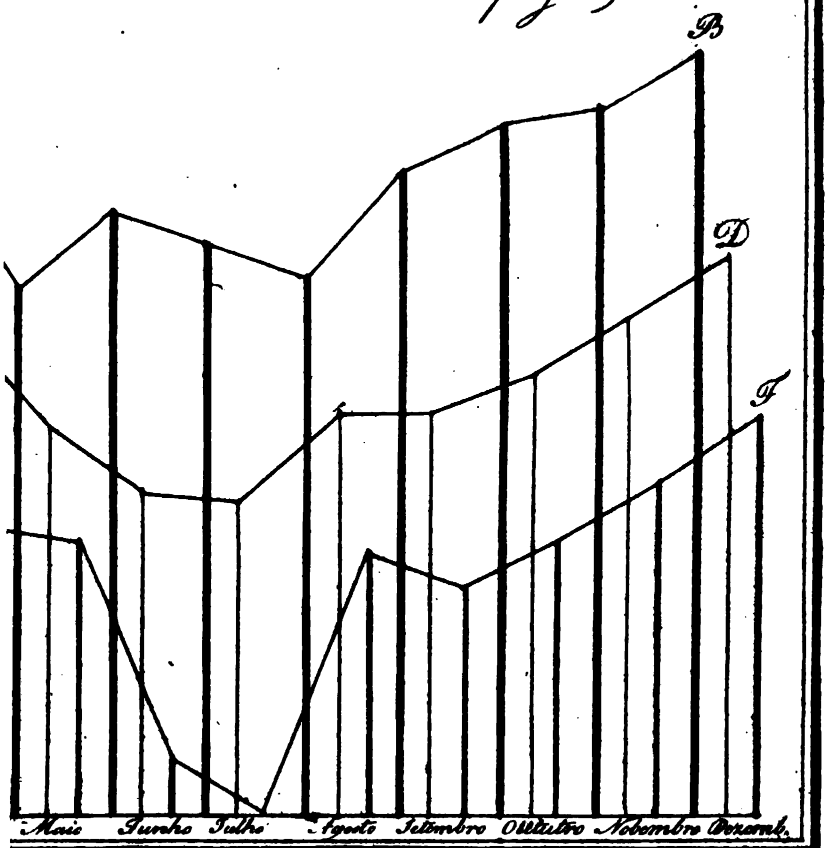


Fig. XI

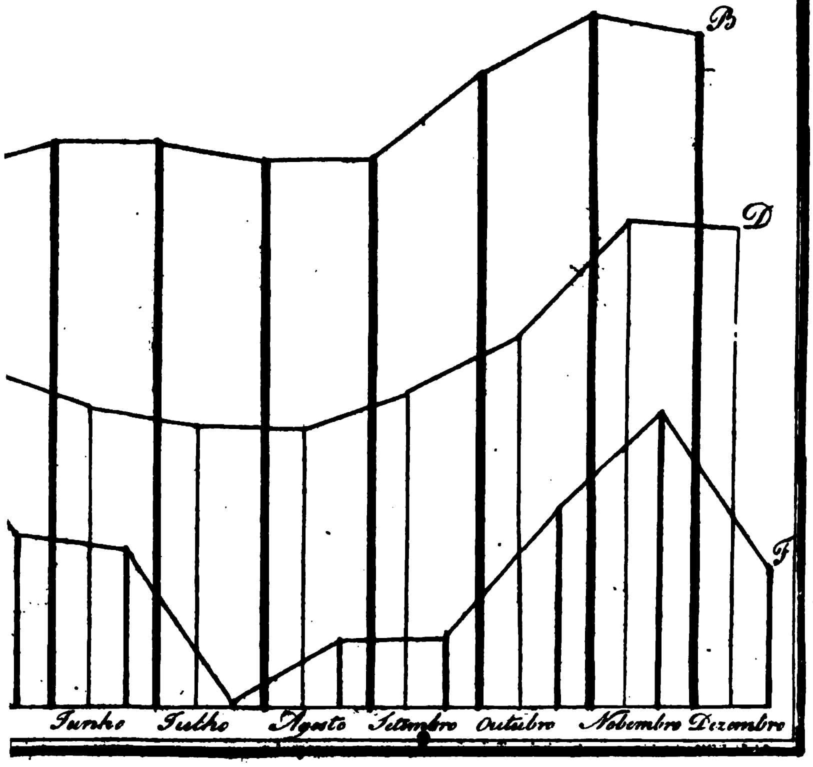




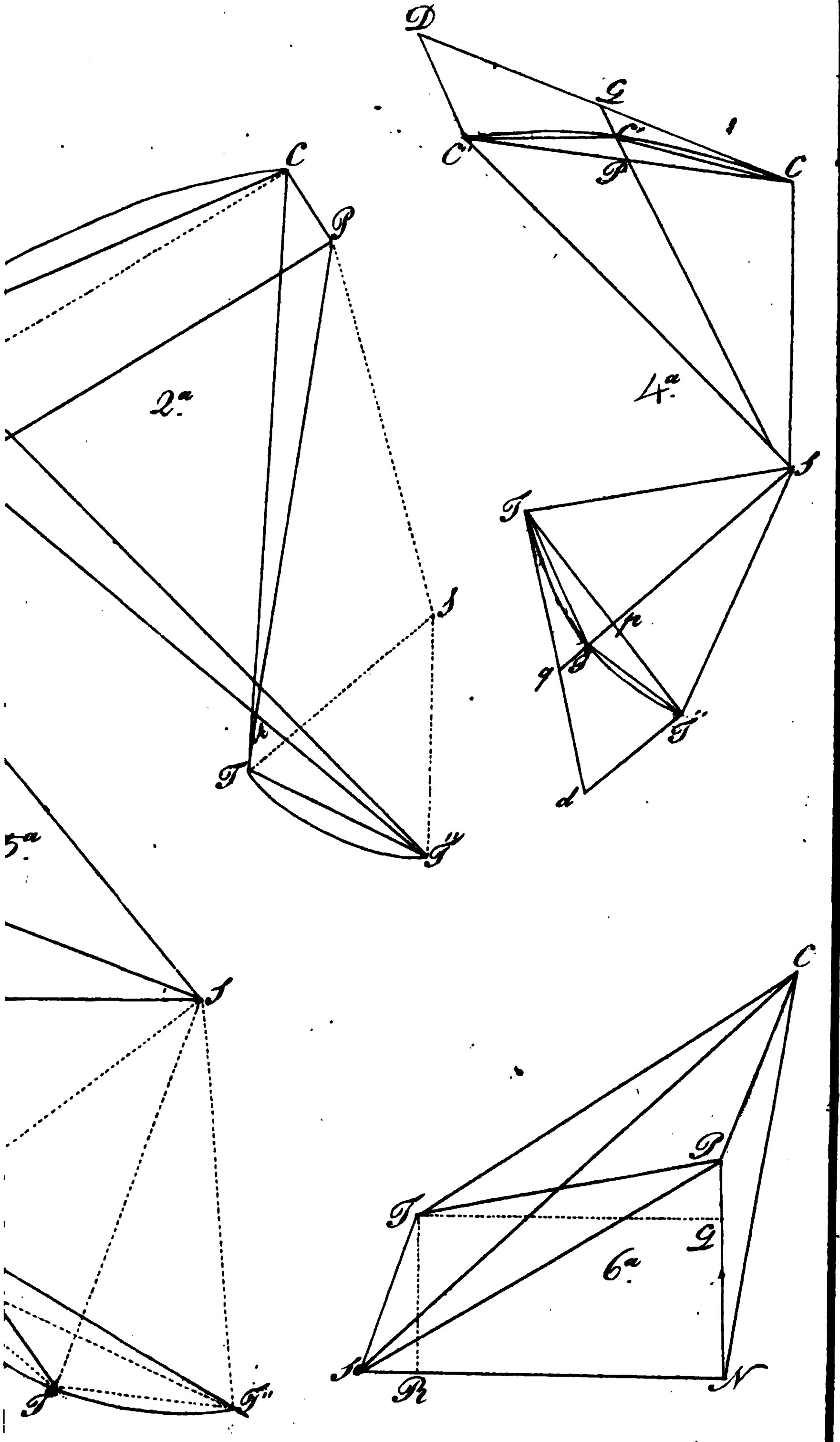
85. *Mem pag 369*



84. *Mem. pag. 346.*



Mem. pag. 402



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.